

简明数学全书

高等数学与现代数学



简 明 数 学 全 书

(II. 高等数学与现代数学)

〔德〕 W. 盖 勒 特　H. 奎斯特纳　M. 海尔维希　H. 凯斯特纳 著

科 学 顾 问

K. A. 郝 奇　H. 理查德

译 校 者

秦曾复　张莫宙　张志才　陈光宇　鲍修德

邱　森　王学锋　沈恩绍　董纯飞　陈信漪　华煜铣

上海科学技术出版社

MATHEMATICS AT A GLANCE

Editors: W. Gellert Dr. H. Küstner
Dr. M. Hellwich H. Kästner

Scientific advisors: Professor K. A. Hirsch
Professor H. Reichardt

VEB Bibliographisches Institut Leipzig
1975

简明数学全书

(II. 高等数学与现代数学)

〔德〕 W. 盖勒特 H. 奎斯特纳 / M. 海尔维希 H. 凯斯特纳 著

科学顾问

K. A. 郝奇 H. 理查德

译校者

秦曾复 张奠宙 张志才 陈光宇 鲍修德
邱森 王学铎 沈恩绍 董纯飞 陈信漪 华煜铣

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 22.125 字数 698,000
1985年9月第1版 1985年9月第1次印刷
印数: 1—12,600

统一书号: 13119·1165 定价: 3.60 元

出 版 说 明

《简明数学全书》是一本通俗简要地介绍数学学科的实用读物，内容包括数学各分支的概念、原理、实际应用，以及对数学史的回顾和对现代数学的综述等；既可用作自学，又可用作复习。本书的文字叙述，强调了数学概念的互相联系，并且与公式、定理及例题密切而有机地相结合，因此条理清晰，容易理解；文中配有大量的插图，使数学题材更为生动而形象化；编排形式也有别于一般教科书，读起来有清新感。原书出版后，深受广大读者的欢迎。

为了满足我国读者的需要，我们决定组织翻译本书。但因原书篇幅较大，故分两部分出版，第一部分为基础数学，第二部分为高等数学与现代数学，各自独立成册。书中用 **I.** 或 **II.** 来表示本书的第一部分或第二部分。

原书名《数学小百科全书》，英译作《数学概观》，根据本书的内容，我们改用现名。在版式方面，我们采用不同字体和符号来体现原书的特点，以求醒目。如重要的定义和公式组加粗线框，例题用黑括号，定理在文字下加曲线；原文中的黑体、斜体和正体，现采用黑体、活体和宋体。

本书对具有中等文化程度的学生、教师以及对数学有兴趣的读者来说，是一本有价值的参考书。

在出版工作方面如有不足之处，热切希望广大读者批评指正。

序

在我们的时代，要掌握科学和技术而不借助数学工具，无疑是不可能的；科学和技术的运用范围又日益扩大，直至日常生活的许多领域。这就普遍要求对数学的成果能有全面的了解，并要求采用非常规的方法，以便有可能填补我们知识的空白。欲达此目的，光靠罗列定理或搜集公式看来是不行的，因为这样做的话，势必会过于强调由数学符号和字母构成的符号语言的作用，而忽视数学概念的作用，但恰恰是数学概念，才是真正起决定作用的东西。我们的任务是尽可能简明扼要而又精确地叙述数学的内在关系。鉴于数学材料的浩瀚，不消说，我们所做的并非是把数量繁多的各数学分支的教科书的细目编制起来而已。我们的目的是为尽可能多的读者阅读专业的文献铺平道路。本书的德文版已销售七十多万册，故可企望我们达到了这一艰难的目标。

本书广泛利用色彩来帮助读者阅读*，还有充足的例题以帮助读者理解一般的论述。通常将数值计算分开书写，这样可将问题当作注释阅读，不需参阅计算；而计算又可看作有解题细节的例子。有些例子中的物理单位使用国际单位制(SI 制)，因为国际单位制正越来越成为法定的实用单位。日常生活中的例子使用日常单位，既有公制，也有其他单位制。

本书将题材按系统分目，并给出许多简明的段落标题和数表，以使读者能迅速而可靠地掌握题意。

谨向各章作者，特别是应邀参与校正与常用术语不符的措词，以使全书通俗易懂而做出贡献的人致以谢意。在此简短的说明中特别需要指出，有很多条目，尽管作者是有关方面的专家，但也感到仅靠浅涉条目，很难做到令人满意。

我们应特别感谢我们的顾问——伦敦大学玛丽女王学院的 K. A. 郝奇(K. A. Hirsch)教授和柏林洪博尔特大学数学系 H. 理查德(H. Reichardt) 教授，他们孜孜不倦地为本书作了修改，帮助我们撰写了这样一部著作，使读者们能从中取用可靠的资料。这也将使我们大家相信，数学从其本质来说是一门简明易学的学科。

编者和出版者

* 现中译本改用不同字体和符号以示区别。——译者注

引　　言

技术上绚丽多彩的伟大成就深刻地影响着每个人的生活，使人们普遍认识到数学的重要性。人人都知道，或至少相信，没有数学，就不能产生这一系列的成就。因此，人们对数学的兴趣便不断增长，从而造成对这门科学的资料的需求日益增长。

现在，数学在很多方面，特别是在提出问题和解答问题方面，已经成了一门特殊的科学。尽管在医学、动物学、植物学、地理学和地质学方面，或是在语言学、历史学、天文学方面，一位博闻广见、精熟当代学识的学者，可以成功地向一个门外汉讲解他的研究的绝大部分问题及其成果，甚至还可以介绍他特别感兴趣的方法和基本原理，使人对这一领域的内容有一定的了解，但是在当代化学和物理方面，他想达到这一目的，就会感到困难得多，而在数学方面则几乎是不可能的。这不仅是因为数学成果在数量上有了极为可观的增长，而且也因为数学问题太难解、太深奥，即使是数学家，对数学的全局也只能有一个肤浅的认识而已。

为了不使数学分成许多特别的分支，人们便尽可能地从各个不同的领域中概括出共同的特性，尽管这些特性有时从表面上看来是互不相关的，以此创立新的更加抽象的理论。正是通过这种努力，人们在那些初看起来相去甚远的领域之间建立了新的纽带。这可以看成是一个反复抽象的过程：既然象代数和几何这些基本原理是来源于对日常生活经验的抽象，人们就可以对代数和几何作进一步的抽象，以得出一个统一的理论，而且在某些情况下，这种抽象的过程可以一环套一环地反复进行。这里“抽象”这个词要严格地理解为“去除”的意思，也就是去掉那些对有关问题的来龙去脉或对某特定目的来说是非本质的东西。例如，在研究几何图形时不去考虑其色彩，尽管色彩在装潢方面很有用处。

这一切说明，即使要使门外汉对当代数学的全貌有一孔之见也是不可能的。在这里，门外汉不只是指知识仅限于教学大纲所规定的内容的人，取得毕业文凭或获得理学士学位的数学家和数学教师也都可以看作是许多专门的数学分支的门外汉。要想通过三、四年的学习，掌握数学各

个分支的专业知识，简直是不可能的。因此，本书的局限性势在难免，我们并不奢望它能广涉数学各领域的专门知识。

在历史上数学最初是以非常朴素的方式发展起来的。它从数 1, 2, 3, …和直观易见的几何图形如点、线段、直线、空间中的平面、角、三角形、圆等出发，逐步发展成具有数域和图形域的较为复杂的结构，这些数域和图形域的研究并不各自成一体系，而是通过测量这个概念来相互联系着的。正是在这种从直观简单明了的问题到较为复杂的问题的发展中，才产生了数学，这在巴比伦和埃及就可见一斑。巴比伦人和埃及人在天文方面取得了惊人的成就，比如，他们能预言月食。但是，将数学发展到一个崭新的阶段的却是希腊人，因为他们总觉得不能光是向前探索，更应回顾思索：在数学的研究方面，人们究竟干了些什么？其结果是，通过他们的努力，数学才发展成为具有现代观念的一门科学。一方面，他们已认识到，(数学)证明就是将数学命题通过最简单的合乎逻辑的推论，归纳为其他一些已知事实，即归纳为那些常为现实或经验证实、足以令人信服的东西。另一方面，他们也已意识到，这种归纳过程不可能无限进行下去，而只能局限于数或图形的某些最简单的性质，这些性质的可靠性又可由直观或经验来确定。

就这样，他们第一次有意识地收集了一系列的基本事实，如过两点只能引一条直线等，并将其编纂成集，他们还奠定了逻辑学的基础。这两方面的专著使几何学由简单到复杂地建立起来了。

长期以来，一本欧几里得(Euclidean)几何学除了作过几个小的增补之外，一直是这门学科的典范。但是约两千年以来，却没有人试图用同样方法来处理代数和稍晚的解析问题。希腊人对自然数的基本性质相当清楚，对可除性问题和有关质数的问题也感兴趣。他们知道如何处置普通分数，但却未曾试图引入负数的概念。但是，在研究直角等腰三角形时，他们却碰上了这么一个问题，即分数不足以表述所有量的比。他们发现，在这样的三角形中，直角边对斜边的比不能用分数来表示。可惜他们并未由此得出结论，即分数域必须扩大，以使该比值和其他所有可能出现的几何比都可以在数值上用更大的数域中的新数来表述。恰恰相反，他们使代数几何化。诚然，由此曾得出一个与我们的实数理论等价的理论，但是这种几何化的做法造成了极大的麻烦，使希腊数学走进了死胡同。

几个世纪以后，天文学家和航海家的实际工作迫切需要三角计算，而

这种计算只有借助某种三角函数表才能进行。由于观察值只能测量到有限的精度，故对需计算的量只要给出近似值即可，这就逐步导致有尽小数的发明。事实证明，有尽小数比普通分数更利于实际计算。很可能就产生了这种想法，即小数位数越取得多，结果便越精确，甚至认为任何预定精度均可通过充分多的小数位数来求得。归根结底，这个方法毕竟抓住了实数的本质，于是数学家们对无限多位的十进小数不再避而不谈。要是这个理论一直发展下去的话，本来是可以得出精确的实数理论的。

一个有趣的、具有十分重要意义的例子说明，早在阿基米德(Archimedes)设法计算平面上某些以曲线为边界的区域的面积时，上述想法就以大同小异的形式在他的研究工作中表现出来了。首先，阿基米德用其著名的逼近法成功地计算了以抛物线的某一段及其弦为边界的图形的面积。结果发现这类图形的面积有一个确定的比值：1/3，这个比值意义重大。但是，阿基米德却未能成功地为圆面积求出一个相应的简单结果，因为要解决这个问题，他就得算出π的值。现在我们知道，仅有分数知识，他是不可能算出的，他所能证明的只是，π的值介于两个分数，即$3\frac{1}{7}$和$3\frac{10}{71}$之间。为了计算圆的面积，他反复利用了毕达哥拉斯(Pythagoras)定理，计算了圆的内切和外切正凸96边形的面积，得出了圆面积的近似值。显然，他当时已经意识到，只要将边数和顶点数取得充分大，就可以将π限制在越来越小的范围内，并能将它计算到任何指定的精确度。用分数可以将一个数的近似值计算到预定精确度，这正是实数的一个特性。

随着时间的流逝，实数的这一性质已在很多不同场合为人们所熟识。例如早在微积分计算创立之前，在对数表的编制中，在笛卡尔(Descarte)的解析几何中，用坐标表示平面或空间的点，人们就已经牢固地确定了对这一性质的认识。后来在微积分计算的发展中，这种认识又有了进一步的加深。微积分计算始于莱布尼茨(Leibniz)和牛顿(Newton)，后来，似乎是为发现的欢乐所陶醉，伯努利(Bernoulli)、欧拉(Euler)、费尔马(Fermat)、柯西(Cauchy)、高斯(Gauss)和其他一些人又相继发展了它。现在再没有人认为对实数理论的建立还需作进一步深入细致的研究了。

但是，建立实数理论的问题也曾在数学的另外两个分支，即几何和代数中起过作用。如已经指出的，欧几里得几何是以一组非常简单的几何命题为出发点的，从这些简单的几何命题中可以推导出其他的定理。这

些称为公理的简单命题集中表现着当时的几何知识，从直观上看来极为显然，以致无人认为需加证明。唯有**平行线公理**(或**公设**)是一个例外。这个公理说:过一已知直线外的一已知点，有且仅有一条直线不与已知直线相交。是否能将它排除在公理之外，而用其他公理来加以推导呢?两千年来，数学家们为此绞尽脑汁，却一无所获，直到德国的高斯、俄国的罗巴契夫斯基(Lobachevskii)和匈牙利的波约(Bólyei)才成功地证明了平行线公理是独立于其他公理的。这一结果的重要意义只有在与其他方面的发展联系起来时才能看清。

在代数中，从二次方程根的公式可以得到表达式$\sqrt{-1}$。这个式子乍看起来毫无意义，但是，只要将它按一般的根式，如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$或者$\sqrt{\pi}$一样进行计算，所得结果却都有意义。这就无可置辨地令人相信$\sqrt{-1}$这个式子的合法身份，并采用符号i来表示它。差不多过了三百年，高斯和其他一些人才证明，人们一直沿用着的做法可以用一个完全有意义的方式来解释，即**将实数域扩大**，这样一来，就产生了一个新数，其平方等于-1。

尽管高斯对实数非常熟悉，能够毫无顾忌不加证明地使用它们，但只是到了柯西和当时的其他数学家在阐明**极限**概念的过程中遇到了一些困难时，实数才成了认真考虑的对象。当时大家都认识到，实数理论实际上可以用不同方式通过对分数的归纳来建立，反之，分数又可以归纳为自然数。从而再次表明，在自然数领域中，自然数的所有性质都可以归纳为少数几条十分显然的基本事实，即**皮亚诺**(Peano)**公理**。

对自然数的这种归纳，为实数和复数理论提供了依据，也为整个实数和复数的**解析**理论，乃至几何学提供了依据;因为解析几何所阐明的是如何用坐标表示基本的几何对象，特别是点，而坐标都是实数。

本书还提及数学的另一个发展。这一发展系于一百五十年前才初步开始。众所周知，数的乘法和加法的某些法则在形式上非常相似。同样，在其他**数学运算**中，例如在连续进行几种运算时，也可以看到一些形式上非常简单的规律。但是，数学家们却非常缓慢地才跨出合乎逻辑的第二步，即概括出这些共同的基本性质，并从这些性质出发，通过纯粹的逻辑推导，使得这一领域逐步发展成了今天的**群论**。在这儿正象在欧几里得几何中一样，人们再次看到了随着后来的各种发展而出现的一个公理体系。

现代数学的一些大的分支，特别是代数，以及在越来越大的程度上分

析和几何，都是建立在公理体系上的。其建立过程大致如下：已知为一组数学对象（通常称为集）、该集的各个元素和用于描述这些数学对象的基本性质的一组公理，接着就提出下列工作：首先由这些公理推出尽可能多的推论，即尽量将这一数学结构的理论扩展到最大范围；然后将有关公理体系的所有处理方法进行全面考察。可能发生的情况基本上是：仅有一种可能的处理方法；或有数种乃至无限多种处理方法，也可能不存在任何处理方法。例如，当给定公理互相矛盾时就是这样。如存在数种处理模式，即对这些公理有若干种处理方法，则应寻求一些特征，以便利用这些特征，经过有限步的推导，有效地将各种可能性彼此分辨开来。对于某些数学结构，这些工作早已完成，但对另一些数学结构，则离解决之日尚相去甚远。这种情况也表明了公理学和数理逻辑彼此交织得有多么紧密！

本世纪初，在一个新的结构理论——集合论中产生了矛盾，这就更加迫切需要有一个有效的数理逻辑。集合论是最简单的结构理论，因为它涉及的是完全任意的集合，如点、数、运动、函数、图形，同样还可以是人、星球、椅子以及其他种种东西，这些集合的元素不受任何公理的约束。因为没有做出任何结构上的假设，所以如果两个这样的集具有相同数量的元素，就可以看成是等价的，或等势的。在有限集的情况下，这方面的含义是显而易见的。但是，甚至对无限集也确定了诸如所谓幂，即基性的元素的数目，那确是个了不起的成就。当然，当问题涉及有限集的元素数目时，我们所熟悉的某些性质对无限集便不复适用了，例如在等价性方面，自然数的个数和分数相等，但是分数的个数则少于实数的数量，线上的点的集合与面上的点的集合基性相同。所有这些，从数学的严密性来说是完全无可非议的，尽管它们显然缺乏直观性。但是矛盾出现在集的非限定形式，例如，“所有集的集”这一概念就是自相矛盾的。然而，这并非是数学危机，尽管有时是这么叫的。相反，数学家们借此机会更彻底地思考了在定义数学概念时涉及到的问题。于是，一门系统的数理逻辑便发展起来了。今天，人们已完全懂得如何去回避这些矛盾。

人们可能会认为，在形成这些极为一般化的结构理论和数理逻辑的公理系统的过程中，这种高度的抽象可能会越来越偏离实事求是的应用数学。但这是绝对不会的。莱布尼茨在解决一些基本的逻辑问题而直接进行了创造性的数学工作的同时，制造了一架中用（切实可行）的计算机，这绝不是偶然的。

工厂生产的人工或电动的计算机的诞生，并没有引起重大的原则纷争。但是这一情况随着*电子计算机*的产生发生了根本的变化，因为有了电子计算机，计算速度大大提高了。诚然，这些计算机是按*简单的黑白原理*工作的，即在机器的每一个部件中，不是通电就是断电。然而，它们却能对付非其不能对付的计算问题。它们以难以想象的速度进行大量最简单的运算，因而能在不太长的时间内处理完一个程序复杂而冗长的问题。当然，这种计算的所费时间还有赖于程序编制技术。电子计算机发明以前，人们已做过一些初步工作，并很快发现程序编制要遵循一定的规则，这些规则在数理逻辑，例如*算法理论*中也起着作用。这再次表明某些仅仅为了理论上的需要而发展起来的纯数学研究的实用价值。计算技术方面的这一情况为纯数学和应用数学在本质上密切相关提供了一个确实的典型例子。

本书还适当地强调了数学问题的*理论可解性*和*实际可解性*之间的区别。在数学中，讨论的常常不是个别的、有给定数值的问题，而是取决于某些数据的一般性问题，这些数据的数值有很多种，实际上有无限多种取法。举一个简单的例子吧：三角形的面积取决于它的三条边，虽然有一个适用于所有三角形的面积计算公式，但每条边的长度却有无限多个可能值。

如果能给出一个公式，即一种*算法*，用它来算出各个特例的解，那么这种问题就算解决了。这里我们假定可用这个公式或程序经过有限步的运算求得数值结果。如果能做到这一点，在单纯的数学家看来，这个问题就算解决了。然而，实际上问题仍可能得不到解决，因为尽管须进行的运算步骤是有限的，但从时间和经济上来考虑却可能因为所费太大而不可解。这就会导致新的更有意义的纯数学问题，即找出更有效的计算程序，除非人们满足于近似解，或制造出更高速的计算机。

电子计算机的发明是这一方面的巨大进步，其结果是首先在应用数学中产生了一些新的分支，一些前所未有的分支因为一开始问题就很明显，即它们所涉及的主要问题不可能在实际允许的时间内攻克或解决。“九人莫利斯舞”和弈棋问题是原则上可解问题的两个例子。说它们在原则上可解，是因为根据法则，它们只可能有有限多种玩法。而现在九人莫利斯舞在实际上也已是可解的了，因为在玩的时候可以先给第一个游戏者以严格的训练，使他懂得如何应付对手的各种可能的动作，以便能赢得

每一局。在下棋时，同样有个走白子者能否一直占先的问题。尽管这是个有限性的问题，但至今未获解决。而且，即使动用当今世界上所有的电子计算机一起来解这么一个弈棋问题，恐怕也得不出问题的解，这可能需要比现在的计算机运转得不知快多少倍的计算机才行。

以上粗略地谈了数学的发展，它从数、运算、图形和测量的最简单的基本概念发展到今天包括大量高度抽象结构的完全公理化的形式，发展到现代计算机，但其发展远未到顶。将数学的这一发展和本书的目录表作一比较就可以看出很多直接和间接的关系。

第一部分“*基础数学*”的题材，在很大程度上同从古代经中世纪直到建立微积分计算之前数学的发展相吻合。所不同者仅是算术、数论和几何并非同时列出，而是按顺序先后排列的。我们从自然数和*初等运算法则*开始，就是因为它们对一般人来说是显而易见的，随后便建立一整套的*公理学*系统，从自然数起直到引入复数为止。

即使对这些简单的概念，现行数学符号却是为从前的希腊人所未知的，正因为如此，就产生了极其烦琐、笨拙的用字母代替数字的方法。今天，学校里已理所当然地采用了这种符号。这儿，数学符号与数学基本概念极为吻合，但是由于它过于简单易学，有时竟会产生轻率而机械地搬弄字母的危险。对于这种潜在的影响必须坚决反对，特别是在学校里；必须坚持数学概念第一，运算技巧第二，而绝不能反其道而行之。关于这个问题，高斯在 1850 年 9 月 1 日给斯库马柯(Schumacher)的信中写道：“现代数学的一个特征……就是在我们的符号和名词的语言中，有一个杠杆，通过这个杠杆可以将非常复杂的论证简化成某一个机理……尽管在大多数情况下，这样做的实质就是默认某些假设，然而机械地使用这个杠杆，却是多么的屡见不鲜。我认为，每当进行计算，每当运用概念时，我们都必须始终不忘初始条件，决不应把通过这种机理得出的结果，看成是超出明确规定范围的数学性质。”

有很多问题要求从已知量求得未知量。一般说来，采用字母能使我们简单明了地表达这类问题。常有这样的情况，有些问题初看起来完全不同，却能得出形式完全相同的最终方程或方程组。这再次表明数学解题方法和抽象之间的相似，所谓抽象者，即不计已知量和需解量的含义，仅保留其数学内核而已。

*函数概念*乃是现代数学的一个重要特征。这就是说，现代数学是研究

函数关系的数学，即研究一些量对另一些量的依赖关系。例如，三角形的面积或角对它的边长的依赖关系。在分析函数概念时，我们将会熟悉这类问题的另一些例子。

*初等几何*是研究平面或空间中的点、线段、角、直线、三角形、四边形、圆、四面体等问题的。由于需要对物体进行测量，所以在这里起主要作用的是前面讨论过的数的概念。当然，不应由此而忽视纯几何概念，特别是在解题时。人们试图用纯几何方法，即作图法来解几何问题。如何用平面作图法处理空间问题，这是*画法几何*的内容。几何和数值计算在*解析几何*中融合得最为紧密：凭借坐标概念，可以将几何问题化为数值问题。这样一来，几何就成了应用广泛的解析法的入门。

解析基本原理放在第二部分“*高等数学*”中加以讨论。虽然极限概念已在初等数学中以直观的方式作过使用，但高等数学却恰恰是从严格的*极限理论*开始的。这样极限一方面是*无穷数列*和函数理论的基础，另一方面又是函数的连续性概念和*微积分计算*的基础。连续函数和微积分的重要性不仅在于是整个数学结构的基础，而且在物理、技术等方面都有很重要的应用。很多几何物理问题本身都是以*微分方程*的形式出现的，也就是以一个函数和它的微商的关系式出现的。这个理论发展至今已有很大篇幅，这里只能粗略地谈及其中最简单的一些部分。*微分几何*也是一个引人入胜的数学分支，它是微积分计算在平面和空间曲线及空间曲面理论中的应用。

前面我们已经注意到，一个问题的理论解法常常与其直接应用的一些特例迥然不同，因为必要的数值计算往往过于累赘。*图示法*和*数值法*的任务就是将理论解变成直接可以应用的解。此外，*概率论*和*统计学*在实际应用中也起着很重要的作用。

最后一部分是“*现代数学简介*”。这一部分的目的是使读者对现代数学的若干研究领域有所了解。正如文首所述理由，不可能对各问题分别作较详尽的讨论，也不可能将现在仍处于萌芽阶段或仍处于深刻变革过程中的那些领域收编进本书之中。读者如欲更透彻地了解各数学分支，可以参阅专著，这对前两大部分同样适用。

汉斯·理查德

目　　录

第1章 集 合 论

集合论是现代数学大厦的基石。所有数学概念的精确定义都是建立在集合论基础上的，而且数学演绎方法就具有逻辑论证与集合论论证相结合的特征。简单地说，集合论语言是全世界数学家表达和领会的公共用语。由此可见，如果谁想在高等数学本身或者它的实际应用中取得任何进展，那末他就必须熟悉集合论的基本概念和结果，以及表达它们的语言。

下面引用的集合定义给出这样一个印象，朴素的集合概念由于它一目了然，所以是不难掌握的。实际上它导致巨大的困难，而这些困难只有通过发展集合论的公理系统才予以克服。

当 G. 康托尔(Georg Cantor, 1845～1918年)发表他大胆的新概念与新论证而建立集合论的时候，集合论的重要性仅仅为少数几个数学家所赏识。然而在其进一步的发展中，集合论渗透到了几乎所有的数学分支，对这些数学分支的发展有着深远的影响，还改变那些已经确立的理论的面貌。确实，有些学科，诸如拓扑学的发展，必不可少地依赖于集合论的方法。更加重要地，集合论表明是一种统一的力量，它给所有数学分支以一个公共的基础，给它们的概念带来一种新的清晰和准确性。

以下各节，着重于集合论在各个数学分支的发展中有着特别重要应用的那些部分。

1.1 集合的概念

通常，"集合"这个词用来指称某种意义下具有共同属性或者同类事物的汇总。这后一方面难以准确表述，因而不纳入数学概念。

康托尔的集合定义：集合是我们的感觉或者思维所完全确定的某些对象汇总成一个整体的结果；这些对象称为该集合的元素。

尽管这个定义缺乏准确性——它实际上导致矛盾（见例5）——但它足以引进几个重要的定义和概念。

如果对象 a 是集合 S 的元素，就写为 $a\in S$（读作"a 属于 S"或"S 包含 a"）；如果 a 不是集合 S 的元素，就写为 $a\notin S$。如果 S 是元素 $a, b, c, \cdots$ 的集合，就写为 $S=\{a, b, c, \cdots\}$。例如，$\{1, 2, \cdots\}$ 是自然数集。如果 S 只包含一个元素 a，那末 S 就叫做*独集*，$S=\{a\}$。如果 S 包含两个不同的元素 a 与 b，那末 S 就称为非有序对，$S=\{a, b\}$。

集合 S 的*子集* T 是指其元素全都属于 S 的任意一个集合；标记为 $T\subseteq S$。不同于 S 自身的 S 的子集 T 叫做 S 的*真子集*；在这种情况下就写为 $T\subset S$。*空集*是一个根本没有元素的集合。正如数0（历史上后期的一项发明）使得算术的命题和演算完美那样，引进空集业已表明便于集合论的命题和论证得以完美。空集通常的符号是 $\emptyset$。

其元素本身就是集合的这种集合称为*族或系统*，例如，民族是人的集合，而它又是民族"族"的一个元素。一个十分重要的系统就是给定集合 S 的所有子集的集合；它称为 S 的*幂集*并记为 $P(S)$。

【例1】　某一时刻 t 在某座大楼 B 内所有人的集合 S。即使在选定的时刻这座大楼内没有人，这个集合也是完全确定的；在那种情况下 S 是空集。时刻 t 在 B 内所有女人的集合 W 是 S 的一个子集，$W\subseteq S$；W 不一定是 S 的真子集。

【例2】　所有素数的集合。欧几里得早已证明这个集合是无限的，而例1的那种集合总是有限的。

【例3】　在计算 π 时使用的单位圆所有内接正多边形的集合。

【例4】　自然数的所有子集的集合。这也是无限的，事实上后面将要证明，它比自然数本身"更加"无限。

【例5】　不包含自身作为元素的所有集合的集合。这个集合在康托尔定义下是完全允许的，它导致著名的罗素(Bertrand Russell, 1872～

1970年)悖论。如果这个集合记为 R 而且假定 R 是其本身的一个元素($R\in R$)，那末 R——同 R 的其他元素一样——是一个不包含它自身为元素的集合($R\notin R$)；也就是说，该假定导致矛盾。另一方面，如果 R 不是自身的一个元素($R\notin R$)，那末由于 R 包含每一个不包含自身的集合，R 不能是这些集合中的某一个。因此 R 包含它自身($R\in R$)，这又是一个矛盾。因为这两个假定之中必定有一个为真，所以整个情形处于与逻辑定律相矛盾的境地。

例5表明，如果要回避矛盾，那末构造新的集合就不准无限制地扩充。

这些例子搞清楚了集合是怎样构造的。集合是由属性的摹状所确定的。说得稍为精确一点，集合是由所有这样的对象 ξ 组成的，带有对象变元 x 的命题 $A(x)$ 当用这些 ξ 代入时为真。

例1到例4中的命题依次是：

x 是时刻 t 在大楼 B 内的人，

x 是素数，

x 是单位圆的内接正多边形，

x 是自然数集合的子集。

如果 x 由任意一个对象来代替，则所得的命题或为真或为假。集合论的公理系统中十分重要的就在于确切地描述一个命题句，为了使它能用来定义一个集合所必须具有的逻辑形式。

> 由命题 $H(x)$ 定义的集合记为 $\{x\,|\,H(x)\}$(读作："使得 $H(x)$ 为真的所有 x 的集合")。

【例6】 $\{x\,|\,x$ 是自然数并且存在一个自然数 y，使 $x=y^2\}$ 是所有平方数的集合。这个记号可以缩写为：$\{x\in\mathbf{N}\,|\,x=y^2$，就某个 $y\in\mathbf{N}\}$。

本世纪前半叶发展起来的集合论公理系统一般都具有四个基本原则：外延性原则、集合构造原则、无限集合的存在性和选择公理。

外延性原则是说，两个具有相同元素(即具有相同外延)的集合 S 和 T 是恒等的($S=T$)。这里恒等这个词是在莱布尼茨(Leibniz)意义下采用的，就是说，在任何一个命题中 S 可以由 T 来代替，反之亦然，而不会改变该命题的真假。

构造原则断言，一定的限制类型的命题方能定义集合；通常的限制是命题只包含对象符号、逻辑符号以及符号 $\in$。

现在说一下**无限集合的存在性**。当然，必须将无限的含义弄确切。这个原则难以由直接参照现实而促成。然而少了它，大部分数学以及理论科学，诸如微积分和经典力学，将变得毫无意义。甚至不可能对自然数理论给出一个集合论的基础。

最后还有**选择公理**，它是许多数学论证的基础。然而许多学者对这个公理怀有疑虑，类似于先前对欧几里得平行公设那样的不相信。

> 选择公理。如果 S 为非空集的一个系统，那末存在一个集合 A，它与 S 中的每一个集合 S 严格地有一个公共元素。

1.2 集合的运算

集合的运算用来从给定的集合构造出新的集合。最重要的是集合 S 与集合 T 的交、并和差。

> 交：$S\cap T=_{\rm def}\{x|x\in S$ 并且 $x\in T\}$
> 并：$S\cup T=_{\rm def}\{x|x\in S$ 或者 $x\in T\}$
> 差：$S\backslash T=_{\rm def}\{x|x\in S$ 并且 $x\notin T\}$

【例 1】 $\{a, b, c\}\cap\{a, c, d\}=\{a, c\}$，$\{a, b, c\}\cup\{a, c, d\}=\{a, b, c, d\}$，$\{a, b, c\}\backslash\{a, c, d\}=\{b\}$。

【例 2】 所有矩形的集合与所有菱形的集合的交，是所有正方形的集合。

【例 3】 所有矩形的集合与所有平行四边形的集合的并，是所有平行四边形的集合，由于每一个矩形都是平行四边形，因而对于所有平行四边形的集合并没有增添什么东西。

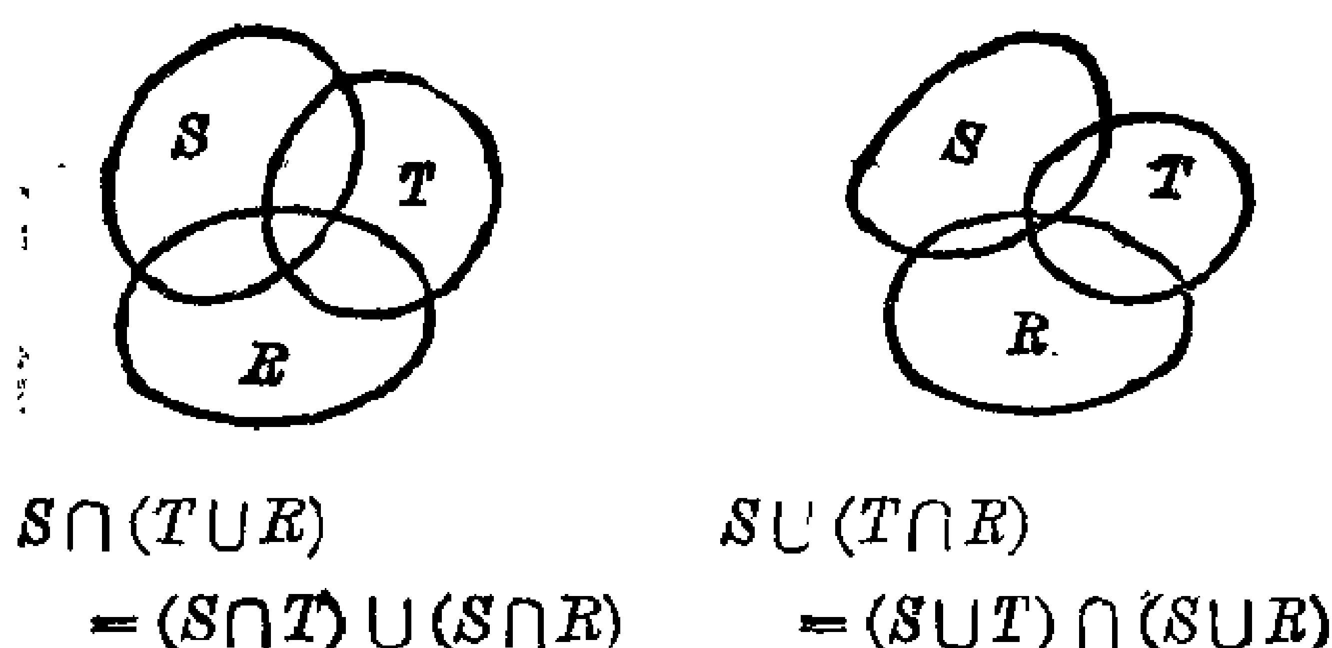
重要的是要区别并集 $S\cup T$ 与或者属于 S 或者属于 T（但不同时属于二者）的所有元素的集合。后面这种集合称为 S 和 T 的对称差，而这仅仅为了特殊目的才偶尔使用。

集合 S 和 T，如果它们的交是空集，则称为**不相交的**。如果 S 是 U

的任何子集，那末 $U\backslash S$ 就称为 S 在 U 中的补集。

下面表中集合运算的基本性质，可由平面上有界区域代表集合来加以说明(见图1.2-1)。

交换律	结合律
$S\cap T=T\cap S$	$S\cap(T\cap R)=(S\cap T)\cap R$
$S\cup T=T\cup S$	$S\cup(T\cup R)=(S\cup T)\cup R$
分配律	**幂等律**
$S\cap(T\cup R)=(S\cap T)\cup(S\cap R)$	$S\cap S=S$
$S\cup(T\cap R)=(S\cup T)\cap(S\cup R)$	$S\cup S=S$



$S\cap(T\cup R)=(S\cap T)\cup(S\cap R)$　　$S\cup(T\cap R)=(S\cup T)\cap(S\cup R)$

图1.2-1 ∩和∪的分配律

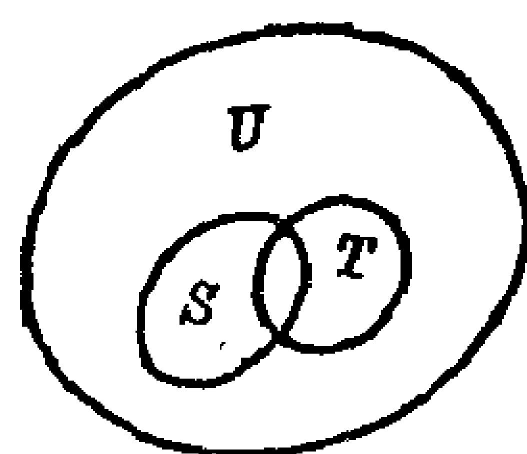


图1.2-2 德·摩尔根规则：$(S\cap T)'=S'\cup T'$

如果 S 和 T 是 U 的子集，它们在 U 中的补集简写作 S' 和 T'，那末成立德·摩尔根(De Morgan)规则：$(S\cap T)'=S'\cup T'$；$(S\cup T)'=S'\cap T'$。

作为一个例子，这里是第一个命题的证明(见图1.2-2)。为了说明 $(S\cap T)'=S'\cup T'$，来证两个命题(i) $(S\cap T)'\subseteq S'\cup T'$ 以及(ii) $(S\cap T)'\supseteq S'\cup T'$。

为了证明(i)，设 $x\in(S\cap T)'$，即 $x\in U$，但 $x\notin S\cap T$。现在或者 $x\in S$ 或者 $x\notin S$。若为后者，则 $x\notin S$ 因而 $x\in S'\cup T'$。若为前者，则 $x\notin T$，否则 x 将是 $S\cap T$ 的一个元素。因此 $x\in T'$，又有 $x\in S'\cup T'$。这就完成了(i)的证明。

为了证明(ii)，设 $x\in S'\cup T'$，即 $x\in S'$ 或者 $x\in T'$ (当然也可能二者都成立)。在第一种情形下 $x\notin S$，从而 $x\notin S\cap T$。在第二种情形下 $x\notin T$，又有 $x\notin S\cap T$。

集合的广义运算。交和并的运算，起初定义为二元运算。然而，它们

不但能推广到3, 4, …个集合，而且还能推广到任意一个集合系统上去。不过首先要有几点说明。

用黑体字母来记集合的系统。系统 $\mathbf{S}$ 的成员 S, T, … 有时带下标或者依赖于参数。例如，有限系统 $\mathbf{S}$ 可以写成 $\{S_1, \cdots, S_k\}$ 或者 $\mathbf{S}=\{S_i|_{i=1,\cdots,k}\}$。常常采用 $\mathbf{S}=\{S_i\}_{i\le k}$。这样，如果 $A_n=\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant n\}$，那末 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是自然数列所有起首截段的族。

一般地，$\{S_i\}_{i\in I}$ 称为**有标集族**，其中给定**下标集合** I，并且对于每一个 $i\in I$，指定族中的集合 S_i。族中的每一个集合必须至少出现一次，但并不要求不同的下标给出不同的集合。用映射的术语(见 II.1.4节)，一个有标族 $\mathbf{S}'$ 是 I 到 $\mathbf{S}$ 上的一个满射；这里 $\mathbf{S}$ 本身是映射的值域。每一个族 $\mathbf{S}$ 都可以将 $\mathbf{S}$ 本身取作下标集合而成为有标族。

任意一个系统 $\mathbf{S}$ 的交和并的定义：

$\cap\mathbf{S}=_{\text{def}}\{x|x\in S$, 就所有的 $S\in\mathbf{S}\}$；$\cup\mathbf{S}=_{\text{def}}\{x|x\in S$, 就某个 $S\in\mathbf{S}\}$。

如果 $\mathbf{S}$ 是有标的，$\mathbf{S}=\{S_i\}_{i\in I}$，则写成 $\cap\mathbf{S}=\bigcap\limits_{i\in I}S_i$；$\cup\mathbf{S}=\bigcup\limits_{i\in I}S_i$。

当该系统仅有两个成员的时候，这些定义也就包括原来两个集合的情况。

分配律的推广：$S\cap\bigcup\limits_{i\in I}S_i=\bigcup\limits_{i\in I}S\cap S_i$；$S\cup\bigcap\limits_{i\in I}S_i=\bigcap\limits_{i\in I}S\cup S_i$。

如果所有的集合都是集合 U 的子集，那末成立德·摩尔根规则的如下推广：

$$\left[\bigcap_{i\in I}S_i\right]'=\bigcup_{i\in I}S_i';\ \left[\bigcup_{i\in I}S_i\right]'=\bigcap_{i\in I}S_i'。$$

1.3 关系

已知如果 a 和 b 是不同的实数，那末 $a<b$ 或者 $b<a$。如果 $a<b$，那末也可以说对于数对 (a, b) 成立“小于”关系。这个关系可记为 $R_<$，而它完全由所有成立这个关系的有序实数对的集合来表征。这一思路的延拓就导致下述基本定义。

> 集合 S 上的一个关系 R 是 S 的有序元素对的一个集合。如果 $(a,b)\in R$,那末也说 R 对于有序对 (a,b) 成立,有时就将此写成 aRb。

在上面的定义中,"有序对"这个词是在朴素的、直观的意义下使用的,它是对象 a 和 b 的这样一种聚合,其中 a 表现为有序对 (a, b) 的第一个元素,而 b 则为第二个元素。本节的后面,将给出有序对概念严格的集合论定义。

【例 1】 此刻所有活着的人的集合 S 中,可由"A 是 B 的父母"或者"B 是 A 的孩子"来定义一个关系 C。

【例 2】 集合 $S=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 上的关系 R_d 用命题"x 整除 y"来定义,它由数对 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $\cdots$, $(2, 2)$, $(2, 4)$ 等等组成。在图 1.3-1 中,这个关系由一个箭头图来表示,其中用圆点表示数,如果在它们之间成立这个关系,就用箭头连结起来。因为每一个数整除它自身,所以每一个点都用环形箭头(圆圈)与自身连结起来。

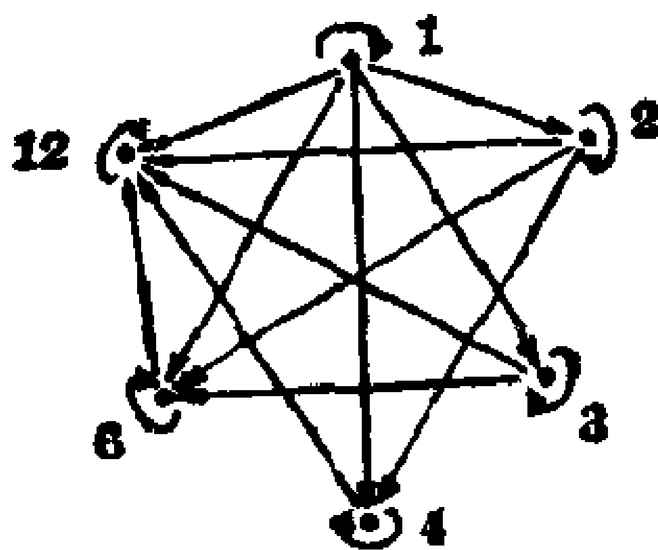


图 1.3-1 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 上整除关系的箭头图

> 集合 $\{x\in S\mid (x, y)\in R$, 至少一个 $y\in S\}$ 称为 R 的**支集**。集合 $\{x\in S\mid (y, x)\in R$, 至少一个 $y\in S\}$ 称为 R 的**值域**。R 的支集和值域记为 $\mathrm{Supp}R$ 和 $\mathrm{Ran}R$。集合 $\mathrm{Dom}R=\mathrm{Supp}R\cup\mathrm{Ran}R$ 称为**定义域**。显然,$\mathrm{Dom}R\subseteq S$。

例如在例 1 中,C 的支集由至少有一个孩子的人全体组成,值域则由其父母之中有一个还活着的人全体组成。在例 2 中所有的元素既属于支集又属于值域。

在数学中,关系的某些性质起着特殊的作用;下面表中给出几个最重要的性质(这里 R 为 S 上的一个关系)。

R 是自反的	$=_{def}$ 对于所有的 $x\in S$ 成立 xRx。
R 是非自反的	$=_{def}$ 不存在 $x\in S$ 使 xRx 成立。
R 是对称的	$=_{def}$ 对于所有的 x, $y\in S$, 如果 xRy, 则 yRx。
R 是非对称的	$=_{def}$ 不存在元素 x, $y\in S$ 具有 xRy 并且 yRx。
R 是反对称的	$=_{def}$ 对于所有的 x, $y\in S$: 如果 xRy 并且 yRx, 则 $x=y$。
R 是传递的	$=_{def}$ 对于所有的 x, y, $z\in S$: 如果 xRy 并且 yRz, 则 xRz。
R 是连通的	$=_{def}$ 对于所有的 x, $y\in S$: 如果 $x\neq y$, 则 xRy 或者 yRx。
R 是左方唯一的	$=_{def}$ 对于所有的 x, y, $z\in S$: 如果 xRz 并且 yRz, 则 $x=y$。
R 是右方唯一的	$=_{def}$ 对于所有的 x, y, $z\in S$: 如果 xRy 并且 xRz, 则 $y=z$。
R 是两方唯一的	$=_{def}$ R 是左方唯一的并且是右方唯一的。

关系的限制　如果 R 是 S 上的一个关系，并且 T 是 S 的一个子集，那末 $\{(x, y)\in R \mid x, y\in T\}$ 是 T 上的一个关系。它称为 R 于 T 的**限制**，常记为 $R|_T$。例如，自然数 $\mathbf{N}$ 上的"小于"关系是实数 $\mathbf{R}$ 上"小于"关系于 $\mathbf{N}$ 的限制。

等价关系　集合 S 上的等价关系是这样一个关系，它是自反的、对称的、传递的，并且具有支集 S。等价关系不仅在数学的每一个角落，而且在几乎所有的科学中都会遇到。

【例3】　线 l 平行于线 l': $l\parallel l'$。

【例4】　数 a 按模 m 同余于数 b: $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$。

【例5】　三角形 ABC 相似于三角形 $A'B'C'$: $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$，或图形 F 同胚于图形 F'(见 II. 第21章)。

【例6】　x 恒等于 y。S 上的恒等关系 id_S 为集合 $\{(x, x)\mid x\in S\}$。

S 上的一个等价关系 R 诱导出 S 的一个划分，将 S 划分成类，每一个类由彼此之间成立该等价关系的那些元素组成。

集合 S 的一个划分是 S 的非空子集族 $\boldsymbol{P}$，这些非空子集称为该划分的类，具有下述两个性质：1. 任何两个不同的类是不相交的，2. S 的每一个元素处于某个类中（见图 1.3-2）。

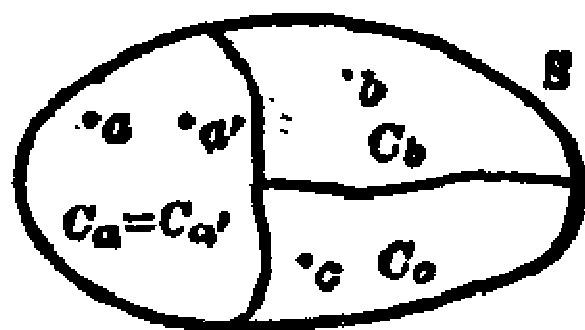


图 1.3-2 集合 S 分成三个类的划分

如果 $\boldsymbol{P}$ 是一个划分，那末 S 的每一个元素 a 就严格地处于一个类 $C\in\boldsymbol{P}$ 中，这个类便记为 C_a。显然 $C_a=C_b$，当且仅当 b 处于 C_a 中。

下面的简单定理具有基本的重要性。它是抽象恒等化原理的基础。

等价关系的主要定理 如果 $\boldsymbol{R}$ 是集合 $\boldsymbol{S}$ 上的一个等价关系，那末存在 S 的一个划分 $\boldsymbol{P}$，使元素 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{S}$ 处于 $\boldsymbol{P}$ 的同一类中当且仅当 $\boldsymbol{aRb}$ 成立。反之，如果 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的一个划分，那末关系 $\{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,|$ 存在一类 $\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{P}$ 以及 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}\}$ 是一个等价关系。

证明。设 R 为给定。定义 $C_a=_{\text{def}}\{x\in S\,|\,aRx\}$，并称之为 a 的等价类。设 $\boldsymbol{P}$ 是 S 元素的等价类族。因为对于 S 的所有元素成立 aRa，所以 $a\in C_a$。于是，S 的每一个元素处于 $\boldsymbol{P}$ 的某个类中。剩下要证明 $\boldsymbol{P}$ 的不同类是不相交的。假定 C_a 和 C_b 不是不相交的，譬如说 $c\in C_a\cap C_b$，那末 aRc 并且 bRc。因为 R 是对称的，这蕴涵着 cRb，再由 R 的传递律得 aRb。现在如果 $e\in C_b$，那末 bRe，并且再由传递律有 aRe。因此 $e\in C_a$，从而 $C_b\subseteq C_a$。用同样的方法证明 $C_a\subseteq C_b$，所以 $C_a=C_b$。这样，非不相交的类是恒等的，从而 $\boldsymbol{P}$ 是所要求的划分。

另一方面，设 $\boldsymbol{P}$ 是 S 的一个划分，并设 R 如定理的命题那样地定义，R 显然是自反的和对称的。假定 aRb 并且 bRc，那末根据定义存在 $\boldsymbol{P}$ 的类 C, C'，使 $a, b\in C$ 而 $b, c\in C'$。这两个类不是不相交的，因为 $b\in C\cap C'$，因此它们是恒等的。然而现在 $a, c\in C$，因而根据 R 的定义有 aRc。所以 R 是传递的。这就完成了证明。

上述例 1 的等价类是同年出生的人的集合，例 2 的等价类是有理数集合，而例 6 的等价类是 S 中的独集。

> **次序关系**。集合 S 上的一个关系 R，如果 R 是自反的、传递的并且反对称的，则称 R 为 S 上的一个偏序。如果 R 还是连通的，则它就称为全序或者线性有序。

【例 7】 整除性关系 R_d 是自然数的一个偏序。

【例 8】 “S 是 T 的子集”关系是集合 U 的子集的一个偏序。

【例 9】 关系 $a\leqslant b$“a 小于或等于 b”是实数集合的一个偏序，事实上是实数集合的一个全序。

> 一个有序集定义为一个对(S, R)，这里 R 是集合 S 的一个偏序。通常也用符号 S 代表有序集(S, R)。R 于 S 的子集 T 的限制 $R|_T$ 还是一个次序，换言之，有序集的子集也是有序的。如果 S 是具有偏序关系 $R_<$ 的有序集，那末要是对于所有的 $x\in T$，成立 $xR_<u$ 的话，就称元素 $u\in S$ 为 S 的子集 T 的一个上界。如果在 S 中不存在 $x\neq m$ 满足 $mR_<x$，则元素 $m\in S$ 称为 S 中最大的。

下面是整个数学中最常用的引理之一，它等价于选择公理。

库拉托夫斯基——佐恩(Kuratowski-Zorn) 引理。如果有序集(S, R)的每一个全序子集在 S 中有上界，那末 S 有一个最大元素。

在基数的那一节有一个应用这个引理的重要例子。

有序对的集合论定义　因为 a 表现为有序对(a, b)的左边成员，而 b 为右边成员，所以有序对不能简单地定义为 $\{a, b\}$。这个困难通过如下巧妙的定义而得以克服。

有序对的定义	$(a, b)=_{\rm def}\{\{a\}, \{a, b\}\}$

如果 $a\neq b$，则可将有序对(a, b)的左边元素表现为该集中独集的那个元素，而右边元素就是不在独集中的另外一个元素了。

由这个定义可以导出有序对的下面一个基本性质。

命题$(a_1, a_2)=(b_1, b_2)$成立，当且仅当 $a_1=b_1$，并且 $a_2=b_2$。

两个集合 S 与 T 的笛卡尔乘积 $S\times T$ 是所有有序对 (a, b) 的集合，其中 $a\in S$ 而 $b\in T$。乘积 $S\times S$ 缩写为 S^2, $S^2\times S$ 缩写为 S^3，等等。S^n 的元素称为 S 元素的 *n 元组*。三元组，或*三重组* $((a, b), c)$ 缩写为 (a, b, c)，以此类推。

【例 11】 复数集 $\mathbf{C}$ 可以看作为所有实数集与它自身的乘积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$。

S^n 的一个子集称为 S 上的一个 *n 元关系*。如果 S^1 定义为 S 自身，那末 S 上的一元关系就是 S 的子集。*二元关系*正是本节一直在讨论的关系。偶尔 n 元关系也称为*谓词*。

【例 12】 "点 X 位于点 Y 与 Z 之间"关系是平面上点的一个三元关系。

【例 13】 "z 是 x 与 y 的和"是在自然数集上的，也是在其他数集上的一个三元关系。

【例 14】 "平面上构成平行四边形的四点组 $[O, P, Q, R]$" 是平面点集上的一个四元关系。

1.4 映射

集合 S 上的其值在集合 T 内的一个*函数*，是支集在 S 内，值域在 T 内的一个*右方唯一的关系*。如果支集为整个 S，则称之为*从 S 到 T 内的一个映射*。如果映射的值域是整个 T，则称之为 S 到 T 上的一个映射，或称为*满射*。

注意。显然 S 上的其值在 T 内的函数是 $S\times T$ 的特殊子集。在有些数学分支(例如复分析)中函数不必取成右方唯一的。这里给出的定义符合数学中的普通习惯。

函数与映射遍及整个数学。最常见的是从一个集合 S 到另一个集合 T 内的映射，也写为 $F: S\to T$。S 到 T 内所有映射的集合记为 T^S。

因为常常要同时涉及几个不同类型的映射，例如其变元是函数或映射的那些映射(见例 3)，所以对于映射或者特殊类型的映射有一些同义

词。最常见的是**运算**(主要就 S^2 到 S 内的映射而言)、**算子**、**泛函**(主要就函数的实值函数而言)、**函子**以及**同态**(多半是就在某种意义上保持结构的映射而言)。

> **象与逆象**。如果 F 是一个在 S 上而其值在 T 内的函数，并且如果 $(x, y)\in F$，那末称 y 为在 F 之下 x 的**象**，或者称为 F 在 x 处的**值**。这可以用几种记法：$y=x^F$；$y=xF$，$y=F(x)$ 或 $y=F_x$。如果 $y=F(x)$，那末称 x 为在 F 之下 y 的一个**逆象**。集合 $F^{-1}(y)=_{\mathrm{def}}\{x\in S \mid F(x)=y\}$ 是 y 的**完全逆象**。

特定函数 在实数集 $\mathbf{R}$ 上且其值还在 $\mathbf{R}$ 内的函数称为**实函数**或**一元实变函数**。n 元实变函数是在 $\mathbf{R}^n$ 上且其值在 $\mathbf{R}$ 内的函数。自然数 $\mathbf{N}$ 到自身内的映射称为**算术函数**或者**数论函数**。

【例 1】 $y=x^2$ 是一个实函数；这个记号虽然常用，但容易引起误解，比较好的记号是 $F:x\to x^2$。此时函数就叫做 S_q。S_q 的支集显然是整个 $\mathbf{R}$，它的值域是 $\mathbf{R}^{\geq 0}$，非负实数集。

集合 $\{0, \cdots, n-1\}$ 到集合 S 内的映射称为 S 元素的 **n 项序列**。如果 $F(i)=a_i(i=0, \cdots, n-1)$，则 F 就写成 $F=(a_0, \cdots, a_{n-1})$。自然数集 $\mathbf{N}$ 到 S 内的映射简称为 S 元素的**序列**。具有 $F(i)=a_i$ 的序列 F 写成 $(a_1, a_2, \cdots)$ 或者 $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$。

映射的限制 如果 F 是 S 到 T 内的一个映射，并且如果 U 是 S 的一个子集，则 $\{(x, y)\in F \mid x\in U\}$ 是 U 到 T 内的一个映射。它称为 F 对 U 的限制，记成 $F|_U$。例如，自然数的加法运算是实数上同名运算的限制。正如这个例子所表明的那样，映射的限制常常记成同未限制的映射一样的符号。

> **内射函数**。一个在 S 上而其值在 T 内的函数，如果它还是一个左方唯一的关系，则称之为**内射的**、**可逆的**或**一对一的**。在这种情形下，F 值域的每一个元素具有唯一的逆象，从而集合 $\{(y, x)\in T\times S \mid (x, y)\in F\}$ 是在 T 上而其值在 S 内的一个函数。它称为 F 的**反函数**，记为 F^{-1}。如果 F 是一个内射，那末 F^{-1} 是一个映射，当且仅当 F 是满射。这样的映射就称为**双射的**。一个双射的逆还是双射的。

【例 2】 id_S 是 S 到自身上的一个双射；它就等于其逆。

【例 3】 $S^{\{0,1\}}$是 $\{0, 1\}$ 到 S 内所有映射的集合，即 S 元素的所有两项序列的集合：$\{(a_0, a_1) | a_0, a_1 \in S\}$。设 $F: M^{\{0,1\}} \to M^2$ 是将序列 (a_0, a_1) 与有序对 (a_0, a_1) 联系起来的映射，显然 F 是双射的。由此可见，在 S 元素的 n 项序列与 S 元素的 n 元组之间没有实质性的差异。

【例 4】 设 S 是一个集族而 A 是与该族的每一个成员严格地有一个公共元素的集合。将该族的每一个成员 S 与 $S \cap A$ 的唯一元素联系起来。这样定义的从 S 到 A 上的映射 ε 就称为对于 S 的一个选择函数。选择函数只是在特殊情况下才是可逆的。

映射的组合 如果 F 和 G 是函数，则集合

$$H =_{\text{def}} \{(x, z) | \text{存在一个 } y \text{ 使}(x, y) \in F \text{ 并且 } (y, z) \in G\}$$

又是一个函数，它的支集包含在 F 的支集内，而它的值域包含在 G 的值域内。这个 H 称为 F 和 G 的**组合、复合或乘积**。如果在函数之下的象写为 $F(x)$ 等等，那末它就记为 $G \cdot F$，因为 $z = H(x)$ 意味着 $z = G(F(x))$。如果使用记号 $y = x^F$ 和 $z = y^G$，那末乘积就以相反的次序写成 $z = (x^F)^G = x^{FG}$。必须注意确保所用的记号是明白无误的。

如果 F 是从 S 到 U 的一个映射，而 G 是从 U 到 T 的一个映射，则 $H = G \cdot F$（这里取前一段的次序）是从 S 到 T 的一个映射。这里 $F \cdot G$ 甚至不必含有任何一个有序对。映射的乘积满足结合律，即对于任意三个映射 F, G 和 H，有 $F \cdot (G \cdot H) = (F \cdot G) \cdot H$。

【例 5】 平行位移是平面点集到自身上的特殊映射（双射）。在这种情形下，两个平行位移 p 和 q 的复合写为和 $p+q$。运算+满足交换律，但是一般地说，函数的复合不满足交换律。

1.5 无限集合与基数

有限性定义 在朴素的意义下，如果存在一个自然数 n，使得集合 S 的元素可以用 n 之前的自然数一一数出，则集合 S 是有限的；更确切地说，假如存在从小于 n 的自然数集合到 S 上的一个双射，就称 S 为有限集合。

这个定义有一个缺点，即把自然数作为早已给定了的。另一方面，为了定义自然数，反过来又需要有限集合的概念。这个困难首先由戴德金(Dedekind)明确地认识到。他避免使用自然数而代之以使用映射给出有

限性的一个定义，克服了这个困难。

> **戴德金的有限性定义。**如果 S 到自身的每一个内射都是双射的，则这个集合 S 是有限的。

由这个定义可以得出，当且仅当存在 S 到自身的一个内射，但它不是一个满射，换句话说，如果存在 S 到 S 的某个真子集上的一个双射，S 是无限的。

也许最常用特别方便的是罗素提出的定义。

> **罗素的有限性定义。**如果集合 S 属于具有如下性质的一切可能的系统 $\mathbf{S}$: 1. $\emptyset\in\mathbf{S}$; 2. 如果 $U\in\mathbf{S}$, 那末对于所有的 $a\in S$ 来说 $U\cup\{a\}\in\mathbf{S}$，则这个集合 S 是有限的。

容易证明，一个集合在罗素定义的意义下有限的，也就在戴德金意义下有限。逆命题可以用选择公理来证明。

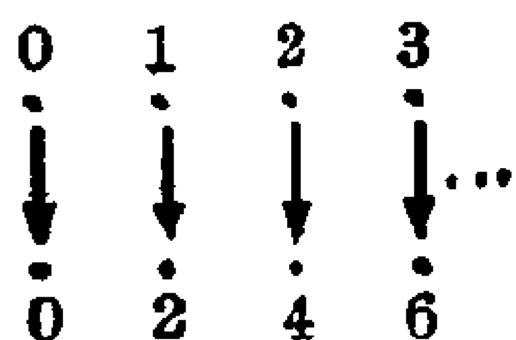


图 1.5-1　自然数集 $\mathbf{N}$ 到一个真子集上的双射(仿照伽利略)

【例 1】 自然数集 $\mathbf{N}$ 是无限的，因为存在 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的某个真子集，例如偶数集上的一个内射(见图 1.5-1)。一个同样适用的映射是 $F: n\to n+1$。

基数

> 两个集合 S 和 T，如果存在从 S 到 T 的一个双射，则这两集合叫做等势的或说具有相同的势(写为：$S\sim T$)。

显而易见，上面定义的关系是在任何一个适当的集族上的一个等价关系。因此它导致族的一个划分，将该族划分成等势集的类。

> 基数是与给定集合等势的集合类。有限集的基数称为**自然数**。无限集的基数称为**超限数**。

不能对所有集合的族，甚至也不能对与给定集合等势的所有集合的族进行运算，因为这样会导致罗素悖论。为了回避这种情况，通常将上述定义限制于一个既是可能那样大又是必要那样大的族 $\boldsymbol{F}$。在那种场合下，基数自身就是集合，即集族。不过后面可能有必要扩大族 $\boldsymbol{F}$。

基数的比较　集合 S 的势或基数记为 $\mathrm{card}\, S$。基数则记为小写黑体字母 $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ 等等。

$n \leqslant s =_{\text{def}} n$ 是 $\text{card}S = s$ 的集合 S 的一个子集的基数。

这个定义与 S 的选择无关。

伯恩斯坦(Bernstein)定理。如果存在从 S 到 T 内的一个内射，又存在从 T 到 S 内的一个内射，则 S 和 T 等势。

这个定理蕴涵着基数上的关系 $\leqslant$ 是反对称的。

定理。基数上的关系 $\leqslant$ 是一个次序。

本节末尾将要证明，任何两个基数都可以比较，就是说 $\leqslant$ 是一个全序。在 1.6 节还将证明，任何一个非空的基数集含有最小元素。

任意大基数的存在性 下面的康托尔定理是超限基数理论的基础。

康托尔定理 对于任何一个集合确实存在一个势更高的集合，$\text{card}\boldsymbol{P}(S) > \text{card}S$。

这个定理的证明惊人地简短而优美。一方面，显然存在一个 S 到 $\boldsymbol{P}(S)$ 的内射，就是将元素 $a \in S$ 对应于 $\boldsymbol{P}(S)$ 中的独集 $\{a\}$。现在必须证明，没有一个从 S 到 $\boldsymbol{P}(S)$ 的内射是满射的，换句话说对于从 S 到 $\boldsymbol{P}(S)$ 的每一个内射，存在没有逆象的 $\boldsymbol{P}(S)$ 元素。这只要证明集合 $U =_{\text{def}} \{x \in S \mid x \notin \varphi(x)\}$ 决不是在 φ 之下的一个象就行了。假定相反：譬如说对于某个 $u \in S$，有 $U = \varphi(u)$。现在或者 $u \in U$ 或者 $u \notin U$。如果 $u \in U$，则因为 $U = \varphi(u)$，于是 $u \in \varphi(u) = U$；但是根据定义，U 仅仅包含 S 的这样一些元素，它们不是在 φ 之下其象的元素。于是这个假定导致矛盾。而另外一个假定也导致矛盾，因为 $u \notin U$ 意味着 $u \notin \varphi(u)$，由于 U 包含着 S 中不是其象的元素的所有元素，这蕴涵着 $u \in U$。因此原先的假定站不住脚(这个证明与罗素悖论相比，这里作了一个假定，因为它导致矛盾从而证明这个假定站不住脚；在罗素悖论中应用于所有集合的集合的论证与此是一样的，不过没有预先的假定，由此它导致一个不可解的悖论)。

可列集

一个集合 S，如果它等势于自然数集 $\mathbf{N}$，也就是说，如果存在一个从 $\mathbf{N}$ 到 S 上的双射 $\varphi: n \to a_n$，则这集合 S 称为可列的(或可数的)。可列集的基数记为 $\aleph_0$。

最小超限基数是 $\aleph_0$。

证明。例 1 表明 $\aleph_0$ 是超限的。剩下的就是要证明对于所有的超限

基数，$\aleph_0 \leqslant n$，即每一个超限集包含一个可列子集。为此设 S 是无限的并设 φ 是 S 到 S 的一个真子集 T 的内射。选择 $a \in S \setminus T$ 并置 $a = a_0$，再归纳地定义 $a_{n+1} = \varphi(a_n)$。集合 $\{a_i | i \in \mathbf{N}\}$ 是 S 的一个可列子集。

在这个定理的通常朴素的证明中，先是选出 S 的一个元素 a_0，然后选出 $S_1 = S \setminus \{a_0\}$ 的元素 a_1，并以此方式类推。这个过程不会中断，因为 S 为无限这个事实蕴涵着集 S_i 非空。这一论证悄悄地应用了选择公理，不过它是能说得完全精确的。

可列多个可列集的并是可列的。

设 $M_i = \{a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \cdots\}$ 并且假设所有这些集合 M_i 的元素排列成一个无限矩阵(见图1.5-2)。计数可以在左上角开始并且按照由箭头显示的方式对角地继续下去。元素只计数一次，重复出现者就略去。例如，若 $a_{11} = a_{20}$，则 a_{11} 就略去。显然，用这个方式 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} M_i$ 全部被一一数出。

图 1.5-2　为了证明可列多个可列集 $M_i = \{a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \cdots\}$ 的并可列而作的矩阵排列

这个证明曾被康托尔用来说明有理数集是可列的。可以想象它们是用如无限矩阵中的元素 a_{ij} 同样的方式排列着。

基数的和与积　如果 S 和 T 是基数 s 和 t 互不相交的代表，那末 s 与 t 的和定义为 $s + t =_{\text{def}} \text{card}(S \cup T)$，而积为 $s \cdot t =_{\text{def}} \text{card}(S \times T)$。这些定义可以拓广到任意多个基数的情况。

> 设 $\{m_i\}_{i \in I}$ 是一个基数系统而 $\{M_i\}_{i \in I}$ 是一个互不相交的代表系统，于是定义 $\sum\limits_{i \in I} m_i =_{\text{def}} \text{card} \bigcup\limits_{i \in I} M_i$。

为了定义基数的积以及最后定义基数的幂，需要将笛卡尔乘积推广到任意的集合系统 $\{S_i | i \in I\}$。这个推广在数学的其他部分也有用。

> 笛卡尔乘积的推广
>
> $\bigtimes_{i\in I} S_i =_{\text{def}} \{f \mid f$ 是从 I 到 $\bigcup_{i\in I} S_i$ 内的一个映射，其中 $f(i)\in S_i\}$
>
> $$\prod_{i\in I} m_i =_{\text{def}} \operatorname{card} \bigtimes_{i\in I} M_i$$
>
> 如果对于所有的 $i\in I$, $S_i=S$, 则对于 $\bigtimes_{i\in I} S_i$ 就写为 S^I，类似地，如果所有基数 m_i 相等，则就是 $m^n (n=\operatorname{card} I)$。

可以证明，对于超限基数来说，$m+n=m\cdot n=\max(m, n)$。特别是对于任何一个超限基数m有 $m+\aleph_0=m\cdot\aleph_0=m$。这意味着通常的算术运算当拓广到超限基数时就变成平凡的了。然而这对于乘幂不真，例如，下面的定理表明 $m<2^m$。

如果集合 M 具有基数 m，那末 $P(M)$ 具有基数 2^m。

为了证明这一点，将 M 的每一个子集 T 与它的*特征函数* $\chi=\chi_T$ 联系起来，特征函数定义为

$$\chi(a)=\begin{cases}1 & \text{如果 } a\in T\\ 0 & \text{如果 } a\in M\backslash T。\end{cases}$$

这给出了 $P(M)$到从 M 到 $\{0, 1\}$ 所有映射的集合 $\{0, 1\}^M$ 上的一个双射。而根据定义，这些映射的集合具有基数 2^m。

连续统 实数集的基数叫做*连续统基数*，记为 $\aleph$ 或 c。在开区间$(0, 1)$内的实数集合的基数还是 $\aleph$，因为这个区间，例如由函数 $y=(x-1/2)/[x(1-x)]$双射地映射到所有实数集(见图 1.5-3)。

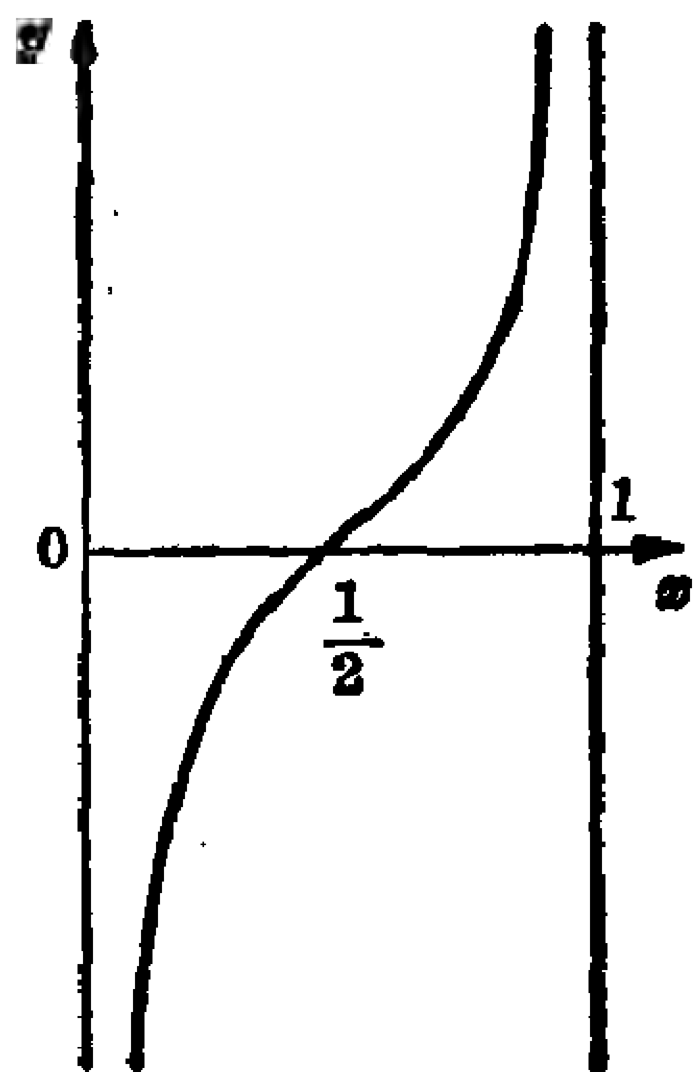


图 1.5-3 由函数 $y=(x-1/2)/[x(1-x)]=1/(1-x)-1/[2x(1-x)]$ 将区间 $(0, 1)$ 映射到整个实线上

基数 $\aleph_0$ 和 $\aleph$ 由公式 $\aleph=2^{\aleph_0}$ 相联系。

这是通过定义两个映射来证明的。第一个是从 $P(\mathbf{N})$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的内射：如果 $M\in P(\mathbf{N})$，那末 M 映射为小数 $0\cdot a_1a_2\cdots$，其中当 $i\in M$ 时 $a_i=1$，否则 $a_i=0$。这就证明了$2^{\aleph_0}\leqslant\aleph_0$。第二个是将$(0, 1)$内的实数集合内射到 $P(\mathbf{N})$内：设 $r=0\cdot a_1a_2\cdots(0\leqslant a_i\leqslant 9)$，并且排除数字 9 的循环。于是 r 映射到

自然数集 $\{1a_1, 1a_1a_2, \cdots\}$，例如 $r=0.1406\cdots$ 映射到集合 $\{11, 114, 1140, 11406, \cdots\}$。这就证明了 $\aleph\leqslant 2^{\aleph_0}$，由此得出 $\aleph=2^{\aleph_0}$。

连续统假设断言在 $\aleph_0$ 和 $\aleph$ 之间不存在基数，换一句话说，实数的无限集合或者可列或者具有基数 $\aleph$。1964 年柯亨(Cohen)证明了，借助于标准的集合论公理不可能证明连续统假设。在此之前，1938 年哥德尔(Gödel)曾证明连续统假设与这些公理不矛盾。这两个结果合起来表明连续统假设独立于其他集合论公理。

基数的比较

对于任何两个基数 $m\neq n$，关系 $m<n$ 或 $m>n$ 之一成立。

这只要证明对于任何一对集合 M 和 N，存在一个在 M 上而其值在 N 内的内射函数 φ，使 φ 的支集是 M 或者 φ 的值域是 N 就行了。因为在第一种情况下 $\operatorname{card} M\leqslant\operatorname{card} N$，而在第二种情况下 $\operatorname{card} N\leqslant\operatorname{card} M$。这里所给的证明表现了佐恩-库拉托夫斯基引理的一种用途，它对于现代数学来说具有典型性。

设 Φ 是 M 上而其值在 N 的内射函数集合。这个集合非空，因为空函数 φ_0 包含在 Φ 内，其中 $\operatorname{Supp}\varphi_0=\operatorname{Ran}\varphi_0=\emptyset$。对于 Φ 的元素 φ, ψ 规定，如果 φ 是 ψ 的一个限制，则 $\varphi\leqslant\psi$ 或者等价地规定，当这些映射作为有序对集合时，如果 $\varphi\subseteq\psi$，则 $\varphi\leqslant\psi$。显然，$\leqslant$ 是 Φ 的一个次序。现在如果 Ω 是 Φ 的一个链(全序子集)，那末 $\cup\Omega$(其中函数再一次作为对集)是一个 M 上而其值在 N 的内射函数，从而是 Ω 在 Φ 内的一个上界。现在根据佐恩引理，Φ 包含一个最大元素 φ^*。假定 $\operatorname{Supp}\varphi^*\subset M$ 并且 $\operatorname{Ran}\varphi^*\subset N$，于是设 $a\in M\setminus\operatorname{Supp}\varphi^*$ 以及 $b\in N\setminus\operatorname{Ran}\varphi^*$，并定义 $\varphi'=\varphi^*\cup\{(a, b)\}$。因为 φ' 仍然是内射，所以它在 Φ 内，然而这与 φ^* 的极大性相矛盾。因此 $\operatorname{Supp}\varphi^*=M$ 或 $\operatorname{Ran}\varphi^*=N$，证毕。

1.6　良序集合与序数

序型

> 两个有序集合 S 和 T，如果存在一个从 S 到 T 的双射 φ，使对于所有的 $a, b\in S$ 来说 $a<b$，当且仅当 $a^\varphi<b^\varphi$，则称 S 和 T 为相似的。

相似性是有序集合上的一个等价关系。等价类称为有序集合的相

似型。

对于任意集合的等势关系所出现的困难同样也出现在这个关系上。可以用同样的方式来回避这些困难，即将所有的论证限制于一个适当大的有序集族。

序型是全序集合的相似类。

【例 2】 所有实数集具有与开区间(0, 1)内的实数集合相同的序型，因为上节中给出的双射沿着两个方向保持次序。这叫做线性连续统的序型。

【例 3】 有序的有理数集具有以下性质：1. 它是可列的；2. 它是稠密的，即在任何两个不同的元素之间存在一个另外的元素；以及 3. 它没有初始元素也没有终极元素。康托尔证明满足性质 1.，2. 和 3. 的所有全序集具有相同的序型 η。因而这是每一个开有理区间的序型，也是所有代数数集合按它们的自然次序的序型，因为该集合是可列多个可列集的并，从而是可列的。

【例 4】 两个有限的全序集具有相同的序型，当且仅当它们具有相同的基数。相似性是这样构成的：首先将一个的最小元素映射成另一个的最小元素，然后轮到它上面的那个最小元素，等等。这样，有限序型与有限基数一一对应。自然数既可当作基数又可当作序型。

【例 5】 偶数的序型与自然数的序型相同。实际上，任何一个可列集合 S 都可以给予一个与自然数同样类型的次序，即用一个双射 $\varphi:\mathbf{N}\to S$ 规定 S 上的次序：当且仅当 $m\leqslant n$ 时，$m^{\varphi}\leqslant n^{\varphi}$。

序型的加法和乘法。设 A 和 B 是序型 α 与 β 的互不相交的代表，因此是全序集。和 $\alpha+\beta$ 定义为 $A\cup B$ 的序型，次序是将 B 安置在 A 的后面；即对于所有的 $a, b\in A\cup B$，规定：

$$\text{在 } A\cup B \text{ 内 } a<b\text{，当且仅当}\begin{cases}a\in A,\text{ 而 } b\in B \text{ 或者}\\ a, b\in A\text{（或 }B\text{）并且在 }A\text{（或 }B\text{）内 } a<b\text{。}\end{cases}$$

积 $\alpha\cdot\beta$ 定义为具有如下次序的乘积 $A\times B$ 的序型：

$$(a, b)<(c, d)\text{ 当且仅当}\begin{cases}b<d \text{ 或者}\\ b=d \text{ 并且 } a<c\text{。}\end{cases}$$

这称为 $A\times B$ 的反字典次序。

对于当作序型的自然数来说，和与积同早已定义的一样。序型的加法与乘法满足结合律和分配律，但一般地不满足交换律。

良序集合　有序的自然数集合具有一个值得注意的性质：每一个非空子集具有最小元素。这个性质用于计算自然数的时候总可取到最小的“未用”数，同时这个性质是数学归纳法原理的基础。康托尔认识到这个性质具有的重要意义并用它来定义良序集合。

> **一个全序集合$(S, <)$，如果每一个非空子集具有最小(唯一极小)元素，则称这全序集为良序集合。良序集合的序型称为序数。**

根据定义，每一个良序集合都有最小元素。自然数集按其自然次序是良序的。它的(超限)序数记为 ω(见图 1.6-1)。良序集合 S 的段是 S 的这样一个真子集 T，它包含 S 中小于 T 的某个元素的所有元素。如果 A 是 S 的一个段，则总有一个元素 $a\in S$，使得 $A=\{x\in S|x<a\}$。借助于这个概念，现在就可能来规定序数的比较。

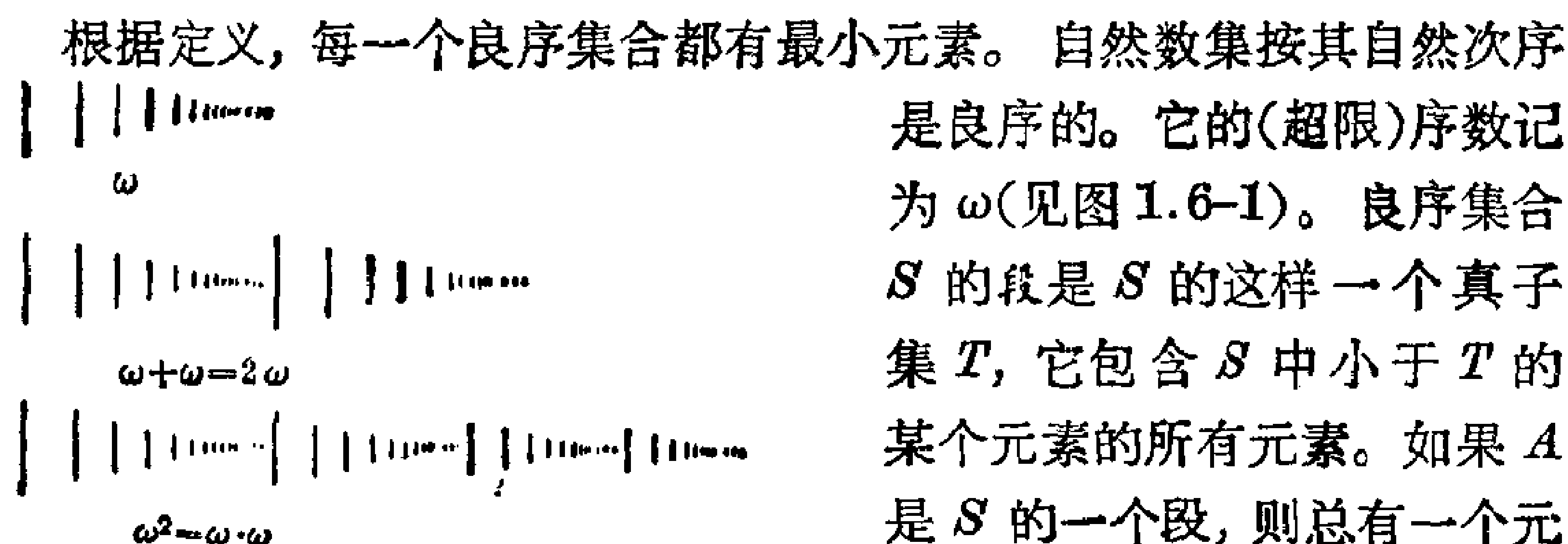


图 1.6-1　某些序数的图式表示

> *如果α和β是序数，其代表为 A 和 B，则规定 $\alpha<\beta$ 意味着 A 相似于 B 的一段，换句话说，如果 α 是 B 的一个段的序数，则 $\alpha<\beta$。*

每一个序数集合按 $<$ 为全序的。

这个定理不能改写成“*所有序数集合是全序的*”，因为“所有序数集合”这个概念将导致“所有基数集合”同样的矛盾。

直接可知 $<$ 是传递的。$<$ 非自反这个命题等价于不存在良序集合能相似于它的某个段的命题。相反的假定将导致矛盾。为此假定有一个 S 到它的段 A 上的相似性 φ。于是必有元素 $x\in S$，使得 $x^\varphi<x$。设 a 是最小的这种元素并且 $b=a^\varphi$。因为 $b<a$，由此得出 $b^\varphi<a^\varphi=b$，所以 $b^\varphi<b$，这与 a 的极小性相矛盾。任何两个序数是可比较的证明稍为复杂一点。

每一个序数集合是良序的，换言之，每一个序数集合具有最小元素。
为了证明这一点，设 $W(\alpha)$为小于给定序数 α 的所有序数集合。如果 A 是 α 型的良序集合，则 A 与 $W(\alpha)$相似；对于每一个序数 $\beta<\alpha$ 相应有 A 的一个段 S，而这个段 S 又对应于 A 的一个元素 b，满足 $S=\{x\in A\mid x<b\}$。于是，$W(\alpha)$是良序的。现在如果 Z 是任一序数集合并且在 Z 中任意地选取 α，那末 $Z\cap W(\alpha)$只要非空，根据第一部分的结论就具有最小元素，而这必定是 Z 的最小元素。

最小的超限序数是 ω。

序数类 如果 $\boldsymbol{m}$ 是一个超限基数，则可考虑其代表具有基数 $\boldsymbol{m}$ 的所有序数类。这些集合称为*超限序数类*，在每一个非空类中有一个最小序数；这叫作该类的*初始序数*。康托尔将有限序数组合成*第一类*，将可列集合的序数组合成*第二类*（见基数的良序）。

对于每一个序数 α，都有更大的序数，例如它的后继者 $\alpha+1$；此外，对于任一序数集合 Z 存在一个比任何 $\alpha\in Z$ 更大的序数。因为集合 $\bigcup_{\alpha\in Z}W(\alpha)$是良序的，它的序数 β 大于任何 $\alpha\in Z$。实际上 β 是最小的这种序数并叫作 Z 的*上确界*（Sup Z）。

显然 $\operatorname{Sup}W(\alpha)=\alpha$，特别地 $\operatorname{Sup}\{0, 1, 2, \cdots\}=\omega$。

如果 $W(\alpha)$没有最大元素，则将序数 α 称为*极限数*。所有其他的序数都有直接的前驱者，并称之为*孤立的*。

这样，ω 是一个极限序数，而所有的有限序数都是孤立的，$\omega+1$ 亦然。

递归原理（超限归纳） 这是归纳原理对于任意良序集合的一个重要推广。

通过递归证明。 设 S 是良序的并且假定一个命题对于 S 的最小元素为真，进一步地，假定对于 S 的任何一个元素来说如果对比其小的所有元素它为真，则对此元素它为真。于是这个命题对于 S 的每一个元素为真。

这是非常容易证明的。假定这个命题并不对于 S 的每一个元素为真，就会导致矛盾。如果 α 是此命题为假的最小元素（根据良序的定义，

根据数学严格性的现代标准，这样的论证只能当作一种启发式的初步探讨。严格的证明很长，放在这里过于复杂。

基数的良序 根据良序定理，没有一个超限基数 $\boldsymbol{m}$ 具有空的序数类 $Z_{\boldsymbol{m}}$。良序定理可用来证明，任意两个基数是可以比较的，也就是说对于任何两个集合 S 和 T，存在从 S 到 T 或者从 T 到 S 的一个内射。这并不奇怪，因为佐恩引理、选择公理和良序定理全都等价。通过良序化 S 和 T，这个命题就归结为序数的可比较性了。

此外，现在还可证明，每个非空的基数集合 K 具有最小元素；因为基数集合相似于属其类的初始序数集合（事实上，基数常常等同于这些初始数）。从这种等同化还可得出对任一基数集合存在一个比该集任何元素更大的基数。这样就可能按下列方式用序数来将基数编号:

$$\aleph_0 = \text{最小的无限基数},$$

$$\aleph_{\alpha+1} = \text{大于 } \aleph_\alpha \text{ 的最小基数},$$

$$\aleph_\lambda = \mathrm{Sup}\{\aleph_\xi \mid \xi < \lambda\}, \text{就极限序数 } \lambda \text{ 而言。}$$

这给出了著名的康托尔基数序列 $\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_\omega, \cdots$

因为 $2^{\aleph_0} > \aleph_0$，所以连续统假设的问题可以改说成连续统的基数 $\aleph$ 出现在序列中什么位置上的问题。康托尔的连续统假设就是 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$。所谓的广义连续统假设则是 $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$。

第2章　数理逻辑基础

数理逻辑的主要任务之一是用取自代数或算法理论的数学方法研究*形式思维和推理*。

这个任务有它在哲学中的起因，但并不是只此一个任务；现今的数理逻辑包括着从截然不同的领域，诸如自然科学、开关代数、数据处理系统理论、语言学以及象哲学、法学和伦理学等社会科学若干分支所提出的许多问题和应用。

推动数理逻辑发展的一个决定性力量来自19世纪末数学的形势。那时数学已经积累了丰富的种种结果，并已达到了高度的抽象，但关于基本概念的内容还没有达到相应的明晰程度，仍然以直观的方式使用着，例如集合的概念或逻辑推理的概念(见II. 第29章)。除了为使集合概念有一个无可非议的基础需要数理逻辑之外，为了洞察逻辑及逻辑演绎的真正含义，数理逻辑也第一次成为必要的了。

2.1　命题逻辑

古典命题逻辑的原理　*命题*是指用以描述和传达事实的一定的语言组织。*古典命题逻辑*从两个假定出发。按照*二值原理*，每一个命题或者为真或者为假。这里所用的*真值*概念一直要追溯到亚里士多德。一个命题，如果由它所表示的那句话对应着一件事实，那末他就认为这个命题是真的。二值原理实际上包含两个原理：

1. *排中原理*，按照这个原理每一个命题不是真就是假；还有2. *不矛盾原理*，按照这个原理没有一个命题同时为真又为假。因而所有命题的类分成两个不相交的子类，用符号记为1(真)和0(假)，统称为*真值*。

借助于语言连词，诸如“非”、“且”、“或”等等，一些给定的命题可以组合成更为复杂的命题。按照第二个基本原理，即*外延性原理*，一个复合命

题的真值无例外地由它的组成部分的真值来确定，而与它们的含义无关。因而，这样的组合可以看作函项，它对 n 元真值指定其真值。

命题逻辑中最常用的联结词对应有**真值函项**：函项 non 对应于“非”，et 对应于“且”，vel 对应于“或”，seq 对应于“如果…，则…”，还有 aeq 对应于“当且仅当…”。这些函项确定如下：

真值函项	函子记号	p 0	p 1	$p\ q$ 0 0	$p\ q$ 0 1	$p\ q$ 1 0	$p\ q$ 1 1
non p	$\sim p$	1	0				
et(p, q)	$p \wedge q$			0	0	0	1
vel(p, q)	$p \vee q$			0	1	1	1
seq(p, q)	$p \rightarrow q$			1	1	0	1
aeq(p, q)	$p \leftrightarrow q$			1	0	0	1

这些定义与日常用语中连词的含义不尽相同。例如，下述命题为真：“如果 $2 \cdot 2=5$，则月亮上居住着有意识的生物”，因为按照函子记号 $(0 \rightarrow 0) \rightarrow 1$。

命题逻辑的任务在于这些概念的数学分析，为此目的，这些概念在命题演算的框架内予以形式化。命题演算是从下面几种**基本符号**发展起来的：

(i) 命题**变项**：$p_1, p_2, \cdots; p, q, r, s \cdots$；

(ii) **函子** $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$，依次表示函项 non, et, vel, seq, aeq；

(iii) **技术性符号**：(,)。

在所有的符号序列集中，现在通过归纳定义选出命题演算的基本对象，即所谓的**表达式**：

表达式的定义

(i) 变项 $p, q, \cdots$是表达式。

(ii) 如果 H 和 G 是表达式，则$\sim H$, $(H \wedge G)$, $(H \vee G)$, $(H \rightarrow G)$, $(H \leftrightarrow G)$也是表达式。

(iii) 一个符号序列，仅当它依照(i)和(ii)构成时，才是一个表达式。

这个定义使有可能在有限步内判定一个给定的符号序列是不是一个表达式。

【例 1】　下列是表达式：$((p\to q)\wedge(r\vee s))$与$((p\leftrightarrow q)\to(\sim q\to\sim p))$。

为了简化表达式的陈述，采用*省括号规则*：

(i) 如果整个表达式被包含在括号内，则这些括号可以省略。

(ii) 就分离级别来说，按$\sim$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$这种顺序，每个函子较其前面的函子更强；例如，$p\wedge q\to r$应毫不含糊地读作$(p\wedge q)\to r$。

(iii) 在下方记有一个黑点的函子较没有黑点的同样函子分离级别更强(见例 3.,4.,5.,6.；在 6. 中两个黑点比一个黑点分离级别更强)。

*语义*提供了真值和真值函项之间一方面的联系，而表达式则提供了另一方面的联系。这是借助于覆盖的概念来完成的。*命题变项的覆盖*是这样一个函项，它对每一个变项指定两个真值 0 或 1 中的一个值。这样的一个覆盖f可以按自然的方式延拓成一个函项ν_f，它对每一个表达式指定一个真值。对于给定的f，这个函项ν_f归纳定义为：

(i) 对于变项p有：$\nu_f(p)=f(p)$；

(ii) $\nu_f(\sim H)=\mathrm{non}(\nu_f(H))$；

(iii) 对于表达式H和G有：

$$\nu_f(H\wedge G)=\mathrm{et}(\nu_f(H),\ \nu_f(G)),$$
$$\nu_f(H\vee G)=\mathrm{vel}(\nu_f(H),\ \nu_f(G)),$$
$$\nu_f(H\to G)=\mathrm{seq}(\nu_f(H),\ \nu_f(G)),$$
$$\nu_f(H\leftrightarrow G)=\mathrm{aeq}(\nu_f(H),\ \nu_f(G))。$$

现在可以定义*语义等价性*以及*普遍有效性*这两个重要概念了。两个表达式H和G，如果对于每一个覆盖f有$\nu_f(H)=\nu_f(G)$，就称它们是*语义等价的*，记成$H\equiv G$。表达式H，如果$\nu_f(H)=1$，换句话说，如果对于每一个覆盖f，H为真，则称它是*普遍有效的*或者*重言的*。

【例 2】　根据排中原理，$p\to(q\to p)$是一个重言式；$p\to(p\to q)\underset{\cdot}{\to}q$是一个重言式；$(p\to q)\wedge(p\to\sim q)\to\sim p$是一个重言式。

*逻辑推理*用来从已经确立为真的若干给定命题获得某些新的真命题。因此所用的*推理规则*必须将一个表达式的真值转移到演绎所得的表达式。在这种推理规则的推导中重言式起着特殊的作用：形如$H\to G$的每一个重言式导致一个推理规则。应用一个规则时的条件，即*前提*，写在

水平线上面，而应用的结果，即结论，写在下面。一组推理规则 S 确定一个关系"A 可由 S 推出"，用符号表示为 $S \vdash A$。

推理规则的例子如下，其中 H, G, F 记表达式而 S 记一组表达式。

【例 3】 $p \to (p \to q) \dot{\to} q$

导致规则：

$$\frac{S \vdash H \qquad S \vdash H \to G}{S \vdash G}$$

【例 4】 推理链

$(p \to q) \to (q \to r) \dot{\to} p \to r$

导致规则：

$$\frac{S \vdash H \to G \qquad S \vdash G \to F}{S \vdash H \to F}$$

【例 5】 换质位法

$p \to \sim q \dot{\to} q \to \sim p$

导致规则：

$$\frac{S \vdash H \to \sim G}{S \vdash G \to \sim H}$$

【例 6】 矛盾原理

$p \to q \dot{\to} p \to \sim q \dot{\to} \sim p$

导致规则：

$$\frac{S \vdash H \to G \qquad S \vdash H \to \sim G}{S \vdash \sim H}$$

命题演算的推理规则并不考虑命题的精细结构；更加深入的推理规则将在谓词演算中予以讨论。

2.2 谓词逻辑

命题演算的表达式还不足以表述数学中出现的各种事实。数理语言的形式化叙述必须相当丰富。有一个特点是经常使用变项以及对于函项或关系的特殊符号。变项是一些预先指定的符号，它们表示事先划定区域的任意对象。含义固定的符号称为常项，诸如 0 及自然数范围内的 +。

数理语言的另一个特点是借助于谓词逻辑的量词形成约束变项的可能性。

在表达式"存在素数 p 和 q 使得 $2n=p+q$"之中，符号 p 和 q 为谓词逻辑函子"存在……"所约束，而变项 n 则是自由的。已经证明，在数学中就约束变项的目的而言，只需要两个谓词逻辑运算 $\exists$"*存在…*"和 $\forall$"*对于所有的…*"就够了。因此谓词逻辑的语言就只建立在这种类型约束变项的基础上。

在*谓词逻辑*中要研究数学语句的精细结构；例如命题演算没有能力掌握关于有理数的语句：

$$\forall x\ \forall y\ \exists z(x<y\to x<z<y)。$$

初等语言的句法　数学理论的命题包含一些作为基本概念的谓词和函项；例如，在集合论中关系 $\in$ "…是属于…的元素"，在几何学中关联和介于的关系，在算术中加法、乘法以及次序关系。对于这些基本概念引进符号，它们一起形成这门理论的*符号特征*。因此符号特征是由关系、函项以及个体的符号组成的。这些符号中的每一个都有其适当的价。在初等算术的符号特征 $\Sigma=\{+,\cdot,<,0,1\}$ 中，$+$ 和 $\cdot$ 是二元运算的符号，$<$ 是二元关系的符号，而 0 与 1 是表示个体的符号。

除了在 Σ 中的符号以外，数学理论还使用代表个体的变项，诸如符号 $x, y, z, \cdots$ 和逻辑符号如 $\sim, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, =, \exists, \forall$ 以及辅助性的技术符号。

象在命题演算中一样，现在可以参照给定的符号特征，借助于这些基本符号来定义一个*初等语言* L_Σ(或谓词演算的语言)。它的元素是某些符号序列，称做*表达式*或*命题形式*。在引进所谓的项之后再来构造这些表达式。

项的定义

(i) 代表个体的变项和常项是项。

(ii) 如果 F 是一个 n 元函项符号而 $t_1, \cdots, t_n$ 是项，那末 $Ft_1, \cdots, t_n$ 也是项。

(iii) 一个符号序列只有当它依照(i)和(ii)形成时才是项。

【例7】　如果 sin, $+$, $\cdot$ 是通常在实数范围内说明的函数符号，那末下述符号序列是项：$\sin x$, $x^2\cdot y+y^3+z^3$, $\sin(x+\sin(y^2+x))$。

初等语言 L_Σ 的表达式归纳地加以描述。

表达式和命题形式的定义

(i) 如果 R 是一个 n 元关系符号而 $t_1, \cdots, t_n$ 是项，则 $Rt_1\cdots t_n$ 是一个表达式，一个所谓的**原子表达式**。

(ii) 如果 A 和 B 是表达式，那末 $\sim A$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$ 也是表达式。

(iii) 如果 $A(x)$ 是一个包含变项 x 而不包含符号 $\exists x$ 或 $\forall x$ 的表达式，那末 $\exists xA(x)$ 和 $\forall xA(x)$ 也是表达式。

(iv) 一个符号序列仅当它依照(i)～(iii)形成时，才是一个表达式。

【例 8】 在符号特征 $\Sigma=\{P, Q, R, f, g, T\}$ 中，下述的符号序列是表达式：$\forall x[Rxy\rightarrow Qxf(y)]$, $\sim\exists x[Rxy\vee Qxg(y, x)]$, $\forall x[Px\wedge\exists y(Tyx\rightarrow Sxy)]$。

象在命题演算中一样，现在也可以在有限步内判定一个给定的符号序列是不是一个表达式。

如果在 H 中出现 x 而没有 $\exists x$ 或 $\forall x$，则称变项 x **自由地**出现在表达式 H 中；如果出现 $\exists x$ 或 $\forall x$，则 x 在其中是**量词限定**。在形式 Θx 的每一个位置后面，那里的 Θ 是 $\exists$ 或 $\forall$，总是存在 H 的唯一确定的部分表达式 H'，在其中变项 x 没有这种符号 Θx 而是自由的。H 的这个部分表达式 H' 就称为所讨论的那个位置的**量词 Θ 的影响域**。在这个影响域中变项 x 是量词限定的。一个变项 x 在表达式 H 的某处自由地出现，如果它出现之处既不是量词限定它也不在量词的影响域内。如果变项 x 在 H 中至少有一处自由地出现，则称 x 在 H 中自由地出现。

【例 9】 在表达式 $\overset{1}{\exists} x[\overset{6}{p}x\wedge Q\overset{8}{y}\wedge \overset{10}{g}(\overset{12}{y})=\overset{16}{z}]\rightarrow[\exists \overset{20}{x}\forall \overset{22}{y} Rx\overset{25}{y}\wedge f(x, \overset{30}{z})=z]$ 中，用符号上方的数字来指出不同的位置。变项 y 在 8 和 12 处自由地出现，而在 22 和 25 处受约束；22 处是量词限定，而在 25 处它位于在 21 处的量词的影响域内。

一般说来，表达式并不是命题。表达式 $x<y$，其中 $<$ 表示自然数之间的次序，仅当变项 x 和 y 代入确定的符号，例如 $0<1$, $2<3$, $5<7$，或者自由变项受量词约束，例如 $\forall x\exists y x<y$ 的时候，它才成为一个命题。因此**命题**可以表述为**无自由变项**的表达式。

命题举例：

【例10】 自然数加法的单调律：$\forall x\forall y\forall z(x<y\rightarrow x+z<y+z)$。

【例11】 费尔马(Fermat)猜想：$\sim\exists x\exists y\exists z\exists n(n>2\wedge x^n+y^n=z^n)$。

【例12】 哥德巴赫(Goldbach)猜想：$\forall x[2|x\wedge x\neq 2\wedge x\neq 0\rightarrow\exists y\exists z$(素数 $y\wedge$ 素数 $z\wedge x=y+z$)]；这里素数 y 是 $y\neq 1\wedge\forall u\forall v(y=u\cdot v\rightarrow u=1\vee v=1)$ 的缩写，而 $2|x$ 是 $\exists y(y+y=x)$ 的缩写。这个表达式读作："对于所有的自然数 x，如果 x 为不等于 2 的非零偶数，那末存在素数 y 与 z，使 x 是 y 与 z 的和"。

如果允许一元谓词的量词化，即如果可以象对待个体那样地对待一元谓词，那末就得到初等语言的一个推广。在这个二阶一元语言中，可以表达的语句比在初等语言中多得多。

二阶一元语言中的命题举例：

【例13】 皮亚诺(Peano)自然数公理：

$\forall P(P0\wedge\forall x(Px\rightarrow Px')\rightarrow\forall xPx)$；用文字表示，就是"如果一元谓词 P 对于 0 成立，并且如果当 P 对于元素 x 成立时，对于它的后继元素 x' 也成立，那末 P 对于所有的自然数成立"。

【例14】 实数的上确界公理：

$\forall P[\exists zPz\wedge\exists u\forall u(Pv\rightarrow v<u)\rightarrow\exists y(\forall v(Pv\rightarrow v\leqslant y)\wedge\sim\exists y'(\forall v(Pv\rightarrow v\leqslant y')\wedge y'<y))]$；用文字表示，就是："每一个有上界的非空实数集有上确界"。

谓词逻辑的语言是描述性的，即这种语言的表达式描述在数学结构中普遍的关系。

随着计算机进行数据处理的发展，算法语言的重要性正在增长。**算法语言**具有作出指令，着手运行并管理过程的用途。用于程序设计的算法语言例子是 ALGOL60, PL1, FORTRAN, COBOL 等。

有些算法要素甚至包含在初等语言之中；一个项可以看作一串要实行的指令；例如$(x+1)\cdot y$ 就表示"对 x 加 1 然后将所得结果乘以 y"这个序列。

初等语言的语义　象在命题演算中一样，语义是在 L_Σ 的表达式与数学结构的论域之间确立一种联系，在论域中表达式具有意义。

设 Σ 是运算符号和函数符号的一个集合，并且 S 是一非空集合。所谓 Σ 在 S 中的一种**解释**，是指一个映照 δ，它对 Σ 中的每一个 n 元关系符号 R 指定 S 上的一个 n 元关系 R^δ，即 S^n 的一个子集，并对每一个 n

元运算符号 F 指定 S 上的一个 n 元函数 F^δ，即 S^n 到 S 内的一个单值映射。相等符号＝总是解释为恒等关系。

设 δ_Σ 表示对 Σ 中符号指定的关系和运算序列。

Σ 结构，Σ 代数，或 Σ 模型定义为有序对 $\mathbf{S}=(S, \delta_\Sigma)$。设 $\mathbf{K}_\Sigma$ 表示所有 Σ 结构的类。包含在 Σ 中的符号总是归属于类 $\mathbf{K}_\Sigma$。现在可以提出初等语言 L_Σ 的真值概念，即语句的定义："在结构 $\mathbf{S}$ 内命题 H 是真的"，用符号表示为 $\mathbf{S}\models H$。这个概念对于整个语义来说是基本的。初等语言中的真值概念可以通过引入如下更一般的概念而精确起来："在 $\mathbf{S}$ 中 S-覆盖 α 满足表达式 H"，用符号表示为 $\mathbf{S}\models_\alpha H$。

所谓 S-覆盖 α，是指一个函数，它对每一个个体变项指定 S 的一个元素。象在命题演算中那样，这样的一个覆盖 α 可以按自然的方式扩充为 L_Σ 的所有项到 S 内的一个映射 α: $x^\alpha=c^\delta$，其中对于 Σ 中的一个个体来说 c 是一个常数：

$$(F(t_1, \cdots, t_n))^\alpha=F^\delta(t_1^\alpha, \cdots, t_n^\alpha)。$$

【例 15】 设 $t=(x+1)\cdot y$, $\alpha(x)=2$, $\alpha(y)=3$。于是 $t^\alpha=(x^\alpha-1)\cdot y^\alpha=(2+1)\cdot 3=9$。

关系"在 $\mathbf{S}$ 中 α 满足 A"的定义，用符号表示为 $\mathbf{S}\models_\alpha A$，这里 iff 代表"当且仅当"。

(i) $\mathbf{S}\models_\alpha Rt_1, \cdots, t_n$ iff $(t_1^\alpha, \cdots, t_n^\alpha)\in R$，也就是说对于 n 元组 $(t_1^\alpha, \cdots, t_n^\alpha)$，$R$ 成立；

(ii) $\mathbf{S}\models_\alpha \sim A$ iff 没有 $\mathbf{S}\models_\alpha A$；

$\mathbf{S}\models_\alpha A\wedge B$ iff $\mathbf{S}\models_\alpha A$ 并且 $\mathbf{S}\models_\alpha B$；

$\mathbf{S}\models_\alpha A\vee B$ iff $\mathbf{S}\models_\alpha A$ 或者 $\mathbf{S}\models_\alpha B$；

$\mathbf{S}\models_\alpha A\to B$ iff $\mathbf{S}\models_\alpha A$ 蕴涵 $\mathbf{S}\models_\alpha B$；

$\mathbf{S}\models_\alpha A\leftrightarrow B$ iff $\mathbf{S}\models_\alpha A\to B$ 并且 $\mathbf{S}\models_\alpha B\to A$；

(iii) $\mathbf{S}\models_\alpha \exists xA(x)$ iff 对于变项 x，可修改 α 的值使得在 $\mathbf{S}$ 中修改了的覆盖 α' 满足表达式 $A(x)$；

$\mathbf{S}\models_\alpha \forall xA(x)$ iff 在 $\mathbf{S}$ 中每一个仅对变项 x 修改其值的覆盖 α' 满足表达式 $A(x)$。

【例 16】 $\exists x(y=x\cdot x)$，其中·表示自然数的乘法。如果 α 是所有变项的一个覆盖，使得 $y^\alpha=4$，那末 α 满足这个表达式；因为对变项 x 指定

值 2,而对所有其余变项与 α 相符的覆盖 α',满足表达式 $y=x\cdot x$。

这个例子表明,$S\models_{\alpha}A$ 是否成立,仅仅取决于 A 中自由出现的变项。如果 A 是一个命题,也就是说没有自由变项的表达式,则 $S\models_{\alpha}A$ 或者对于所有 α 成立,或者没有 α 能成立。

定义。(i) 称表达式 A 在 $\boldsymbol{S}$ 中有效,用符号表示为 $\boldsymbol{S}\models A$,当且仅当在 $\boldsymbol{S}$ 中每一个覆盖 α 满足表达式 A,也就是说如果 $\boldsymbol{S}\models_{\alpha}A$ 对于每一个 S-覆盖 α 成立;

(ii) 一个表达式 $A\in L_{\Sigma}$,如果 A 在每一个 Σ 结构中有效,就称它为**普遍有效**(或**在谓词逻辑中有效**)。

【例 17】 命题 $\forall x\exists y\ x<y$ 在自然数变域中有效;但并非普遍有效,因在有限的有序集合$(S,<)$中它为假。

【例 18】 命题 $\forall x\forall y\,Rxy\vee\sim\forall x\forall y\,Rxy$ 普遍有效;事实上,对于每一个命题 H 和每一个结构 $\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{S}\models H$ 或 $\boldsymbol{S}\models\sim H$ 成立。

一个表达式 H,如果它以量词开始,即如果 H 具有形式 $H=\Theta xH'$,其中 Θ 代表 $\exists$ 或者 $\forall$,就称它**在命题逻辑中不可分解**。每一个表达式是由若干不可分解的表达式借助于函子$\sim$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,以及$\leftrightarrow$构成的。当用命题变项来代替表达式的不可分解成分时,就得到命题演算的一个表达式;例如,表达式 $\forall x\forall y\,Rxy\vee\sim\forall x\forall y\,Rxy$ 就变为重言式 $p\vee\sim p$。一个表达式 H,如果相应的命题逻辑表达式在命题演算的框架内是普遍有效的,则称它**在命题逻辑中普遍有效**。如果 H 是在命题逻辑中普遍有效的,那末在谓词演算中亦然。然而,有些表达式在谓词逻辑中是普遍有效的,但在命题逻辑中则不然;一个例子是:$\forall x\,Px\rightarrow\exists xPx$。这是出现在谓词逻辑中的推理方法不能在命题演算中加以利用的原因。

定义。 设 S 是 L_{Σ} 中表达式的一个集合。称 Σ 结构 $\boldsymbol{M}$ 是 S 的一个模型,如果所有的表达式 $A\in S$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中有效。设 $\mathrm{Mod}S$ 为 S 所有模型的类。

设 $\Sigma=\{+,0\}$,并设 $S\subseteq L_{\Sigma}$ 是如下的表达式集:

(i) $(x+y)+z=x+(y+z)$,　(iii) $\forall x\exists y(x+y=0)$,

(ii) $\forall x(x+0=x)$,　(iv) $\forall x\,\forall y(x+y=y+x)$。

一个 Σ 结构 $\boldsymbol{M}=(M, +, 0)$ 是 S 的一个模型，当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 是一个加法阿贝尔群，从而 $\mathrm{Mod}S$ 是所有阿贝尔群的类。

两个表达式 H 与 G，如果表达式 $H\leftrightarrow G$ 普遍有效，就称它们为*语义等价或逻辑等价*。

逻辑等价的例子：

【例 19】 $\sim\exists xA(x)\equiv\forall x\sim A(x)$。

【例 20】 $\sim\forall xA(x)\equiv\exists x\sim A(x)$。

【例 21】 如果 y 不在 $A(x)$ 中出现，x 也不在 $A(y)$ 中出现，并且 Θ 是量词 $\exists$ 或 $\forall$ 中的一个，则 $\Theta xA(x)\equiv\Theta yA(y)$。

【例 22】 $\forall x[A(x)\wedge B(x)]\equiv\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$。

【例 23】 $\exists x[A(x)\vee B(x)]\equiv\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$。

具有形式 $\Theta_1x_1\cdots\Theta_nx_nA(x_1, \cdots, x_n)$ 的表达式，其中每一个 Θ_i 是 $\exists$ 或 $\forall$，而 A 无量词这样的表达式叫做具有*前束形式*。

每一个表达式逻辑等价于一个有相同符号特征，并且有相同自由变项的前束形式的表达式。

将一个表达式转换成一个逻辑等价于它的前束形式表达式举例。

【例 24】 $\forall x\forall y[x<y\to\exists z(x<z<y)]\equiv\forall x\forall y\exists z(x<y\to x<z<y)$。

【例 25】 $\forall x\exists y\forall zQxyz\to\forall y\exists zRyz\equiv\forall u\exists v\exists x\forall y\exists z(\sim Qxyz\vee Ruv)$。

数学推理 数学推理用于从给定的真命题获得新的真命题。数学推理的中枢是结论。如果 S 是一个在结构 $\boldsymbol{S}$ 中为真的命题集合，并且如果一个命题 A 可从 S 演绎出来，则 A 必须在 $\boldsymbol{S}$ 中保持其真值，即此命题 A 在结构 $\boldsymbol{S}$ 中必定为真。

结论的定义。 设 S 是初等语言 L_Σ 的一个命题集合，并设 H 是 L_Σ 中的一个表达式，如果 S 的每一个模型也是 H 的一个模型，就是说如果 $\mathrm{Mod}\,S\subseteq\mathrm{Mod}\,H$，则称 H 从 S 得出，用符号表示为 $S\models H$，S 的推论集合为 $S^{\models}=\{H\in L_\Sigma; S\models H\}$。

例如，若 S 是如下的公理系统：

$$\forall x\forall y\forall z(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z),\quad \forall x\forall yx\cdot y=y\cdot x,$$

$$\forall x \forall y \forall z(y\cdot x = z\cdot x \rightarrow y = z),$$

于是，当且仅当命题 H 在每一个交换消去半群中成立时，H 才是从 S 得出的。因而 S 的推论集包含所有交换消去半群类初等理论中的所有命题。

在数学推理中，人们并不总是追溯到结论的定义上去，而是使用某些**推理规则**，它们是**在结论之下可传的**，即对于结论过程是有效的。

推理的结论可传规则举例。

【例 26】 **分离规则**：

$$\frac{S \Vdash H \qquad S \Vdash H \rightarrow G}{S \Vdash G}$$

【例 27】 **诱导规则**：

$$\frac{S \cup \{A\} \Vdash B}{S \Vdash A \rightarrow B}$$

【例 28】 **演绎定理**：

$$\frac{S \Vdash A \rightarrow B}{S \cup \{A\} \Vdash B}$$

【例 29】 **间接结论**：

$$\frac{S \cup \{A\} \Vdash B \qquad S \cup \{A\} \Vdash \sim B}{S \Vdash \sim A}$$

对于有这种推理规则的每一个系统 R，能定义一个**可导性关系**："表达式 A 是由集合 S 可导的，可证的"。如果一个表达式 A 能从某些属于 S 的初始表达式，通过有限次应用 R 中的规则而得到，则称 A 由 S 用 R 规则可导或可证。A 的一个证明或推导可以看作一个有限的表达式序列$(F_1, \cdots, F_n, A)$，它可以由 S 逐次应用 R 中的规则而得出。如果规则集 R 和初始集 S 是有限的，那末总能在有限步内判定所给的有限的表达式序列是不是一个证明。

结论关系以每一个推理为基础，可用一个有限的推理规则系统来描述。

依照这个基本事实，下面指出一个推理规则系统，它尽可能适应自然的演绎过程。对于$\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$ 中的每一个函子，给出两个推理规则，一个规则引进它而一个规则免除它。由这些推理规则所定下的可导性关系用符号$\vdash$表示

一个推理规则系统的定义

(0a) $\dfrac{A\in S}{S\vdash A}$ (0b) $\dfrac{S\vdash A,\ S\subseteq S'}{S'\vdash A}$

(1a) $\dfrac{S,\ A\vdash B}{S\vdash A\rightarrow B}$ (1b) $\dfrac{S\vdash A,\ A\rightarrow B}{S\vdash B}$

规则(1a)相当于结论的演绎定理(见例 28)。

(2a) $\dfrac{S,\ A\vdash B,\ \sim B}{S\vdash \sim A}$ (2b) $\dfrac{S,\ \sim A\vdash B,\ \sim B}{S\vdash A}$

(3a) $\dfrac{S\vdash A,\ B}{S\vdash A\wedge B}$ (3b) $\dfrac{S\vdash A\wedge B}{S\vdash A,\ B}$

(4a) $\dfrac{S\vdash A}{S\vdash A\vee B,\ B\vee A}$ (4b) $\dfrac{S\vdash A\vee B, A\rightarrow C, B\rightarrow C}{S\vdash C}$

(5a) $\dfrac{S\vdash A\rightarrow B,\ B\rightarrow A}{S\vdash A\leftrightarrow B}$ (5b) $\dfrac{S\vdash A\leftrightarrow B}{S\vdash A\rightarrow B,\ B\rightarrow A}$

(6a) $\dfrac{S\vdash A(t)}{S\vdash \exists xA(x)}$ (6b) $\dfrac{S\vdash \exists xA(x),\ A(y)\rightarrow B}{S\vdash B}$

在(6a)中t是一个任意项，在(6b)中y既不在B中出现也不在S中出现。

(7a) $\dfrac{S\vdash A(y)}{S\vdash \forall xA(x)}$ (7b) $\dfrac{S\vdash \forall xA(x)}{S\vdash A(t)}$

在(7a)中y不在S中出现。

(8a) $S\vdash t=t'$ (8b) $\dfrac{S\vdash A(t),\ t=t'}{S\vdash A(t')}$

在(8a)中t和t'表示语言L_Σ的项。

所有这些规则是结论可传的，就是说“如果$S\vdash A$，那末$S\Vdash A$”成立。

除了这些规则以外，数学推理还利用从所给的规则可以导出的许多其他推理规则。例子如下：

(1c) $\dfrac{S\vdash A\rightarrow B}{S,\ A\vdash B}$ (2c) $\dfrac{S\vdash \sim\sim A}{S\vdash A}$ (4c) $\dfrac{S\vdash A\vee B}{S,\sim A\vdash B}$

(6c) $\dfrac{S,\ A(x)\vdash B}{S,\ \exists xA(x)\vdash B}$　(x 既不在 B 中也不在 S 中自由出现)

(8c) $\dfrac{S\vdash A(t),\ t=t'}{S\vdash A(t /\!/ t')}$

在(8c)中 $A(t /\!/ t')$ 意味着，不必在所有地方用项 t' 来取代 $A(t)$ 中出现的项 t。

对于可导性关系，成立下述重要定理。

可导性关系的完备性定理。对于 L_Σ 中的每一个公式集合 S 和每一个公式 $A\in L_\Sigma$ 来说，当且仅当 $S\vdash A$，$S\Vdash A$ 成立。特别是当且仅当 $\phi\vdash A$ 成立 $\phi\Vdash A$，即当且仅当 A 是不用公理可导，换言之，从空集可导时，A 是普遍有效的。

【例 30】 数论语句的严格形式推导。作为解释，在一行形式证明之后，将表达式的意义以及相应于形式推导的自然结论写在方括弧中。

$$\forall x\sim\exists yx=3\cdot y\rightarrow\exists zx^2-1=3\cdot z。$$

[对于所有整数 x，如果 x 不能被 3 整除，则 x^2-1 能被 3 整除]。

设 $B(x,\ z)$是 $x^2-1=3\cdot z$ 的缩写，依照规则(7a)，证明 $S\vdash\sim\exists ya=3\cdot y\rightarrow\exists zB(a,\ z)$就行了。

[对于任意一个固定的整数 a 证明结论成立就行了。]

根据(1a)只要证明

$$S,\ \sim\exists ya=3\cdot y\vdash\exists zB(a,\ z)。$$

[假定 a 不能被 3 整除，就得证明 a^2-1 能被 3 整除。]

将 $S\vdash\exists xa=3\cdot x\vee\exists xa+1=3\cdot x\vee\exists xa-1=3\cdot x$ 这个事实作为已知的。于是根据(4c)

$$S,\ \sim\exists xa=3\cdot x\vdash\exists xa+1=3\cdot x\vee\exists xa-1=3\cdot x。$$

[因为 a 不能被 3 整除，所以不是 $a+1$ 就是 $a-1$ 能被 3 整除。]

根据(4a)，现在只要证明

(i) $S,\ \exists xa+1=3\cdot x\vdash\exists zB(a,\ z)$ 并且 (ii) $S,\ \exists xa-1=3x\vdash\exists zB(a,\ z)$。

[考虑两种情况: (i)$a+1$ 能被 3 整除 (ii) $a-1$ 能被 3 整除。]

只要 (i) 被证明了，类似的论证对于 (ii) 也成立。

根据(6c)，仅需证明$S,\ a+1=3\cdot b\vdash\exists zB(a,\ z)$再根据(6a)，仅需证明对于某一项 t，$S,\ a+1=3\cdot b\vdash B(a,\ t)$就行了。[设 b 是使$a+1=3\cdot x$

【例33】 具有 $\Sigma=\{\cdot, 1\}$的群论描述为

$\forall x\forall y\forall z[(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)]$, $\forall x(x\cdot 1=x)$,

$\forall x\exists y(x\cdot y=1)$。

形式化理论中的可定义性 通常在一个数学理论 T 中,除了由符号特征 Σ 所给定的基本符号以外,还定义一些新的概念、谓词及运算。例如,在自然数算术中,整除性关系$x|y$"x 整除 y"可以定义如下: $x|y=_{\mathrm{def}}\exists z(y=x\cdot z)$,或者定义关系 $a<b$ 如下: $a<b=_{\mathrm{def}}\exists x(a+x=b)$。这种显式定义自身可以描述成特殊类型的形式命题。如果在这个例子中,通过添加二元谓词符号 | 来扩充初等算术的初始符号特征 $\Sigma=\{+, \cdot, 0, 1\}$,那末可将命题 $\forall x\forall y[x|y\leftrightarrow\exists z(y=x\cdot z)]$添加到算术公理中去,把它叫作谓词 $x|y$ 的定义。

函项符号及个体符号也可通过定义来引进。在理论 T 中 n 元函数 F 的显式定义具有如下形式:

$$\forall x_1\cdots\forall x_n\exists y[Fx_1\cdots x_n=y\leftrightarrow A(x_1, \cdots, x_n, y)],$$

这里假定在 T 中命题

$\forall x_1, \cdots\forall x_n\exists yA(x_1, \cdots, x_n, y)$和 $\forall x_1\cdots\forall x_n\forall y\forall z[A(x_1, \cdots, x_n, y)\wedge A(x_1, \cdots, x_n, z)\rightarrow y=z]$是可导的。

> **定义。**设在一个具有符号特征 Σ 的初等理论 T 中,关系 R 是 Σ 的一个元素并设 $\Sigma'\subseteq\Sigma\setminus\{R\}$ 是 Σ 的一个子集。如果在 T 中存在一个可导的 R 定义,而且定义表达式仅仅包含 Σ' 的符号,则称关系 R 为在 T 中显式可定义的。

如果在理论 T 中关系 R 借助于其余的关系是显式可定义的,那末每一个表达式都可以在 T 中等价地转换成一个不包含符号 R 的表达式。因而可定义的关系都是可免的。不过从方法论的观点来看,探索适当的定义同探索适当的证明一样地重要。

如果一个谓词 R 是在理论 T 内借助于谓词 $Q_1, \cdots, Q_n$ 可定义的,那么在 T 的每一个模型中,R 的解释是由 Q_i 的解释唯一地确定的。因此成立下述原理。

帕多阿(Padoa)原理。一个谓词 R 在理论 T 内不能借助于谓词 $Q_1, \cdots, Q_n$ 来定义这个事实,可以通过提出两个模型 M 和 M',而它们仅仅在 R 的含义上有所不同来确立。

公理化定义 出自不同的种类。它们目的在于用公理的方式来把握对象变域的某个概念或某一关系，也就是说用一个命题集合来描述它们。对于一个结构类 K，这意味着要对 K 的初等理论给出一个公理系统。

2.4 算法与递归函数

在数学与逻辑的框架内，算法是作为求解给定类所有问题的一般方法而出现的。它们的目的是以这样的方式描述过程，即那些过程以后可以由机器来模拟或控制。算法过程的例子有如逻辑推理以及数学中出现的某些计算过程，特别是各种类型方程的解法。

算法的特征是将已知量(输入数据)在**变换规则**系统的基础上变换成别的量(输出数据)。然而，只有满足某些附加条件，谈算法才有意义:

(i) 相互进行变换的**量系必须有效地给定**。

(ii) 算法必须可用**有限个规则**描述，因为没有机器能够存贮无限多个规则。

(iii) 量的变换，算法的工作在机器**工作单元**形式下进行，每个单元在于应用给定规则中的一条规则。

1931～1947 年间，在数理逻辑的框架内，发展了若干个关于"算法"的描述性概念，使直观的想法更加精确。最重要是**等式演算**[赫布兰(J. Herbrand)、哥德尔、克林(S. C. Kleene)，大约 1934～1936 年]，图林机[图林(A. M. Turing)，1936 年]，λ-演算[丘奇(A. Church)，1936 年]以及波斯特(E. L. Post，1936 年)和马尔科夫(A. A. Markov，1947 年)的算法概念。

具有重要意义的是这样一个事实，即所有这些想法在某种意义下是等价的，就是说同样的数论函数，所谓**递归函数**，可以用它们之中的每一种算法来演算。这里数论函数理解为定义在自然数变域内的函数。在这一等价性的基础上，可以将算法的直观概念在新获得的精确意义下来了解。这个观点是在 1936 年由丘奇加以系统阐明，在数学文献中称之为**丘奇假设**。

一个数论函数 f，如果存在一个算法，通过它对于变元的每一个值 n 可以找到值 $f(n)$，则称 f 为**可计算的**。

可计算函数举例。

【例 34】 设 $f(x)$是第 x 个**素数**。这里可以用厄拉多塞尼(Eratos-

thenes)筛法(见 I. 第1章)来计算这个函数。

【例 35】　设 $f(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公因子。这个函数可以用欧几里得算法(见 I. 第1章)来计算。

【例 36】　设 $f(x)$ 是在 $\pi=3.14159\cdots$ 十进制表示中的第 x 位数。这里表示 π 的一个收敛级数适合于这个函数的计算(见 II. 第8章)。

递归函数类是由于要使可计算函数的直观概念更加精确而产生的。某些**初始函数**能被当作直接可计算的，称它们为递归的，再规定某些规则，通过这些规则可以从已知的递归函数生成新的递归函数。这些规则使得对于每一个新的递归函数，立刻能指出一个算法来计算其函数值，只要这样的算法对于已知的递归函数是可用的。

A. 初始函数

(i) **恒等函数** $I_n^m(1\leqslant m\leqslant n)$ 定义为等式 $I_n^m(x_1, \cdots, x_n)=x_m$;

(ii) **常函数** F_c^n 定义为等式 $F_c^n(x_1, \cdots, x_n)=c$，其中 c 是一个固定的自然数;

(iii) **后继函数**定义为 $f(x)=x+1$。

B. 函数的生成规则

(i) **函数代入**。如果 f 是一个 k 元函数而 $g_1, \cdots, g_k$ 是 n 元函数，则关系 $g(x_1, \cdots, x_n)=f[g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_k(x_1, \cdots, x_n)]$ 确定一个 n 元函数。

(ii) **原始递归**。如果 h 是一个 $(k+1)$ 元函数而 g 是一个 $(k-1)$ 元函数，则下述方程组唯一确定一个 k 元函数:

$$f(x_1, \cdots, x_{k-1}, 0)=g(x_1, \cdots, x_{k-1}),$$

$$f(x_1, \cdots, x_{k-1}, y+1)$$
$$=h[x_1, \cdots, x_{k-1}, y, f(x_1, \cdots, x_{k-1}, y)]。$$

这个函数的存在性和唯一性是由戴德金的证明定理所保证的(见 I. 第3章)。

(iii) **极小值定则**。如果 f 是一个 $(k+1)$ 元函数，使对于每一个 k 元自然数组 $(x_1, \cdots, x_k)$，存在一个数 y，具有 $f(x_1, \cdots, x_k, y)=0$，则可确定一个新函数 g 如下：约定 $g(x_1, \cdots, x_k)$ 为满足 $f(x_1, \cdots, x_k, y)=0$ 最小的 y。

一个数论函数，如果它是一个初始函数或者如果它可以在有限步内应用上述规则从初始函数生成，则称它为递归的。如果只允许规则 B(i) 和 B(ii)，则所造成的函数类是由所谓*原始递归函数*组成。

原始递归函数举例。

【例 37】 斐波那契(Fibonacci)数列：

$$f(0)=1,\ f(1)=1,\ f(x+2)=f(x+1)+f(x)。$$

【例 38】 函数 $f(x, y)=x+y$ 是从原始递归函数 $h(x, y, z)=z+1$ 以及 $I_1^1(x)=x$ 通过原始递归而得到的：

$$x+0=I_1^1(x)=x,$$

$$x+(y+1)=h(x, y, x+y)。$$

【例 39】 函数 $g(x, y)=x\cdot y$ 是从原始递归函数 $h'(x, y, z)=x+z$ 以及 $C_0(x)=0$ 通过原始递归产生的：

$$g(x, 0)=x\cdot 0=C_0(x)=0,$$

$$g(x, y+1)=h'(x, y, x\cdot y)。$$

【例 40】 函数 $\mathrm{e}(x, y)=x^y$ 是由原始递归函数 $h''(x, y, z)=x\cdot z$, $C_1(x)=1$ 通过原始递归产生的：

$$\mathrm{e}(x, 0)=C_1(x)=1,$$

$$\mathrm{e}(x, y+1)=h''[x, y, \mathrm{e}(x, y)]。$$

由于种种算法概念具有前面提到的等价性，就将可计算函数类与递归函数类视为一致。

丘奇假设。 一个数论函数是递归的，当且仅当它是可计算的。

判定问题 精确的算法概念对于研究某类问题是否算法可解是必要的前提。这样的问题甚至在中世纪就早有讨论。例如，大约在 1300 年 R. 勒鲁斯(Raymundus Lullus)提出了求真术思想，所谓求真术他指的是求出所有可能真值的一个一般方法。当莱布尼茨认识到，严格地说求真术这个概念应包含两个概念，即*判定方法*的概念和*生成与公理化方法*概念的时候，这些思想达到第一个顶峰。莱布尼茨之后，这些思想并没有得到进一步发展。原因之一是那时还不存在数理逻辑的形式化及解释技巧，而这对于进一步的研究是必要的。

不过借助于递归函数，就可以提出判定以及生成方法的一个精确说法。这些概念首先是对于自然数集合定义的。

判定和生成方法定义

(i) 自然数的一个集合 S 是**递归可数的**，当且仅当存在一个递归函数 f，其值域与 S 相符合。这个函数 f 显然提供了集合 S 的一个**生成方法**。

(ii) 自然数的一个集合 S 是**可判定的**，当且仅当 S 的特征函数 f_s 是递归的；这里函数 f_s 定义如下：

$$f_s(n)=\begin{cases}1 & 若\ n\in S,\\ 0 & 若\ n\notin S。\end{cases}$$

如果 f_s 是递归的，则可判定一个给定的自然数 n 是不是 S 的一个元素。

所有偶数集合是可判定的。

所有斐波那契数集合是可判定的。

所有素数集合是可判定的。

原先不受限制的算法概念不仅涉及自然数，而且也涉及更一般的对象，例如多项式微分的算法。

非数值算法可以化成递归函数与自然数的递归集合。

设 $\boldsymbol{K}$ 是非数值的输入输出数据类；假定从这个类到自然数集合的一一映射固定不变。这个映射称作**编目**，假定它满足：

(i) 它自身是由一个算法给定的；

(ii) 存在一个算法，来判定一个数是不是 $\boldsymbol{K}$ 中某个非数值对象的象，若如此，就构造这个对象；

(iii) 这样的编目仅当存在一个算法能掌握非数值类 $\boldsymbol{K}$ 时才使用。

将非数值类的对象与它们的编码数等同起来，就能将 $\boldsymbol{K}$ 某些子类的判定问题化成自然数的某些集合的判定问题。

其中特别重要的是数学理论尤其是初等理论的判定和公理化问题。在研究这些问题的时候，从编目 Φ 出发，这个 Φ 对初等语言集合

$$A=\Sigma\cup\{\sim,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \exists,\ \forall,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\}$$

中取出的每一个符号序列指定一个自然数。这样的编目不难找到。

初等理论的可判定性和可公理化性定义。设 Φ 是从初等语言 L_Σ 中取出的符号序列的一个编目。一个初等理论 $T\subseteq L_\Sigma$ 是**可判定的**，当且仅当集合 $\Phi(T^\vdash)$ 是**递归的**。T 是**可公理化的**，当且仅当存在一个可判定集 $S\subseteq L_\Sigma$，使得 $S^\vdash=T^\vdash$。

借助于这些定义，中世纪创造求真术的企图获得了确切的含义。在这方面，第一个重要结果归于哥德尔。他在1930年证明了，初等语言普遍有效的表达式都是可公理化的，换言之，它们能在生成方法的意义下予以生成。后来哥德尔还获得一个更加重要的结果：他证明初等数论是不可公理化的，也就是说不存在算法能一个不漏地产生在自然数变域 $\mathbf{N}=\{\mathbf{N},+,\cdot,0,1\}$ 中有效的所有命题。当然，只有在有了算法概念的一般定义之后才能给出这样的证明。哥德尔把他的证明建立在递归函数的概念之上，同时还给出了一个算法不可解问题的例子。

从那时起其他一些初等理论被证明是不可判定的。

初等群论是不可判定的。

初等域论是不可判定的。

如果符号特征 Σ 包含一个 $n\geqslant 2$ 的 n 元关系符号，那末逻辑有效表达式集合 P_Σ 是不可判定的。

1970年，一个著名的问题有了否定的回答。这就是希尔伯特第十个问题。希尔伯特1900年在巴黎第一届国际数学家大会上提出这个问题：是否存在求解任意丢番都方程的普遍算法？

不过也有一些可判定的理论。

初等实数域理论是可判定的。

初等欧几里得几何理论是可判定的。

初等阿贝尔群论是可判定的。

这说明，每一个充分表现的理论为不可判定的。对于公理方法的局限性和范围的这一认识不能不认为是数学基础研究最重要的结果之一。

第3章 群与域

3.1 群与半群

群

在所有的数学分支中经常出现这样一些集合，它的任意两个元素或对象可以依照一个特定的规则，并以一个特殊的顺序相结合而得到属于该集合的第三个元素。

> 在集合 S 上的一个运算是将 S 的任何一个有序的元素对 (a, b) 与该集合的第三个元素联系起来的一个映射。运算通常写成乘法或加法。分别记为 $c=ab$ 或 $c=a+b$，分别称为 a 与 b 的积或和。

【例】 普通的加法和乘法是在整数、有理数、实数和复数集合上的运算。矩阵乘法是在所有 $(n\times n)$ 矩阵集合上，在具有非零行列式的 $(n\times n)$ 矩阵集合上，以及在行列式为 1 的 $(n\times n)$ 矩阵集合上的一个运算。

定义两个置换的乘积是一个跟着一个执行置换所得到的一个置换（这是映射复合的一个特殊情况），于是可以在固定个数对象的置换集合上定义一个运算。对于置换 $P_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$ 和 $P_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$，正如通过下列图解所看到的那样，乘积是 $P_1\cdot P_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$，图解中在对象上的作用很清楚。

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \boxed{2}&\boxed{3}&\boxed{1}&\boxed{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{1}&\boxed{2}&\boxed{3}&\boxed{4}\\ 4&1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 1&3&4&2\end{pmatrix}$$

固定个数对象的两个置换的乘积是这些对象的另外一个置换。

n 个对象的置换 $P=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&r&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_r&\cdots&i_n\end{pmatrix}$ 可以通过把每个元素在 P 下的象写在这元素之后而形成一个循环的乘积。跟着 r 的元素 i_r 本身必定出现在上面一行，因而后面由它的象 i'_r 跟着。下一步给出再一个元素 i''_r，等等。在有限步后当又一次达到 r 时，这个过程就中断。这个循环至多有 n 个元素。如果它还没有包含所有的元素，则开始一个新的循环；如果 $i_r=r$，则这个循环可以写作(r)，但通常从乘积中将它略去。

例如，置换 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\ 2&4&1&7&6&5&8\end{pmatrix}$和 $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\ 7&3&5&1&2&4&6\end{pmatrix}$可以写为 $A=(1\ 2\ 4\ 7\ 3)(5\ 6)$以及$B=(1\ 7\ 6\ 4)(2\ 3\ 5)$。它们的乘积是 $AB=C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\ 3&1&7&6&4&2&5\end{pmatrix}=(1\ 3\ 7\ 5\ 4\ 6\ 2)$ 以及 $BA=D=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\ 3&1&6&2&4&7&5\end{pmatrix}=(1\ 3\ 6\ 7\ 5\ 4\ 2)$。

前面的例子并不是同一类型的全部情况。有些集合是无限的，而有些则是有限的，更加周密地考察这些运算就揭示进一步的差别。如果对于 S 中的任意三个元素 a, b, c, 有$(ab)c=a(bc)$（如果运算写成乘法的话）以及 $(a+b)+c=a+(b+c)$（如果它写成加法的话），则在此集合上的这个运算称做**结合的**。如果对于任意两个元素，分别有 $ab=ba$ 或 $a+b=b+a$，则此运算就称做**交换的**。不难验证，矩阵的乘法与置换的乘法满足结合律。数的乘法与加法满足结合律与交换律。然而，矩阵的乘法与置换的乘法如同上面的例子所表明的那样 $AB\neq BA$，即不满足交换律。

如果集合 S 的一个元素 e 对于 S 的所有元素 a, e 和 a 按任一顺序的运算结果都得到 a，则称 e 为该运算的**中间元素**。如运算是乘法，e 就称做**幺元**而有 $ea=ae=a$。例如，置换 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 1&2&3&4\end{pmatrix}$是在四个对象的

而后者为**特殊线性群** SL(n)。

置换群 固定 n 个对象的置换在前面定义的乘法下构成一个有限群，即**对称群** S_n。它的阶是 $n!$。对于 $n\geqslant 3$，它是非阿贝尔群。

如果 $p=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$ 是一个置换，那末反演数是对于序列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中较大的数出现在较小的数之前多少次的计数。如果反演数是偶数，置换就称为偶置换，否则为奇置换。

【例 1】 置换 $p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$ 有 6 次反演：4 在 3，2 以及 1 之前出现，3 在 2 和 1 之前，还有 5 在 2 之前。

S_n 分裂为 $n!/2$ 偶置换和 $n!/2$ 奇置换。

两个偶置换的乘积是偶置换。两个奇置换的乘积也是偶置换。一个奇置换和一个偶置换的乘积是奇置换。

在这个事实的基础上，对于置换引进一个符号：如果 p 是偶置换，则 $\operatorname{sgn} p=+1$；如果 p 是奇置换，则 $\operatorname{sgn} p=-1$。由此可见，两个置换乘积的符号是它们符号的乘积。现在很容易看到，一个偶置换的逆是偶置换，因为恒等置换是偶置换。于是，偶置换构成一个 $n!/2$ 阶的群，称做**交代群** A_n。

子群 群 G 的一个子集 H，如果在与 G 上同样的运算下 H 构成一个群，就称做子群。根据这个定义，群自身以及只包含幺元的单位子群，是 G 的子群。所有只含一个元素的群称为**平凡群**。而所有不同于 G 自身的 G 的子群叫做**真子群**。

在引言中说到的有些群是其他群的子群。这样，整数加法群是有理数加法群的一个子群，而有理数加法群又是实数加法群的子群。非零有理数的乘法群是非零实数的乘法群的一个子群。交代群 A_n 是对称群 S_n 的一个子群。特殊线性群 SL(n) 是一般线性群 GL(n) 的一个子群。下述命题可直接从子群的定义得出：

一族子群的交仍是一个子群。

如果 a 是群 G 的一个元素，则有包含这个元素的子群，例如 G 自身。根据定义，所有包含 a 的子群的交，就是包含 a 的最小子群，它称做由 a 生成的循环子群并记作 $\langle a\rangle$。显然，$\langle a\rangle$ 由所有的幂 a^n 所组成，$n\gtreqless 0$（负幂是逆元的幂；幂照例是一个元素与其自身的乘积）。

如果所有的幂 a^n 互异，则 $\langle a\rangle$ 就称做*无限循环群*。否则存在最小的正整数 n，使得 $a^n=e$，从而 $\langle a\rangle$ 是一个 *n 阶循环群*：$\langle a\rangle$ 由元素 e, a, $\cdots$, $a^{n-1}=a^{-1}$ 组成；$a^{n+1}=a$ 等等。一个群要是与其一个循环子群相符合，就称这个群为*循环群*。

一般地说，一个群的*两个子群* U_1 与 U_2 按集合论的*并* $U_1\cup U_2$ 不再是一个子群，这由下面的例子说明。并只不过是 G 的一个子集，但是对于 G 的每一个子集 S，可以定义所有包含 S 的子群的*交*（这个交自身包含 S 并且是包含 S 的最小子群）为*由 S 生成的子群* $\langle S\rangle$。子群 $\langle U_1, U_2\rangle$ 则是包含 U_1 和 U_2 这二者的最小子群。如果对于 G 的一个子集 S，有 $\langle S\rangle=G$，就称 G *是由 S 生成的*。

【例 2】 S_3 的元素用循环记号就是 $p_1=(1)$, $p_2=(1\ 2\ 3)$, $p_3=(1\ 3\ 2)$, $p_4=(1\ 2)$, $p_5=(1\ 3)$，以及 $p_6=(2\ 3)$。群表如下：

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_3	p_1	p_6	p_4	p_5
p_3	p_3	p_1	p_2	p_5	p_6	p_4
p_4	p_4	p_5	p_6	p_1	p_2	p_3
p_5	p_5	p_6	p_4	p_3	p_1	p_2
p_6	p_6	p_4	p_5	p_2	p_3	p_1

利用这张群表，容易验证集合 $A=\{p_1, p_4\}$, $B=\{p_1, p_5\}$, $C=\{p_1, p_6\}$ 以及 $D=\{p_1, p_2, p_3\}$ 是 S_3 的子群。进一步地，$A=\langle p_4\rangle$, $B=\langle p_5\rangle$, $C=\langle p_6\rangle$ 是 2 阶循环子群，而 $D=\langle p_2\rangle=\langle p_3\rangle$ 是 3 阶循环子群。A 和 D 的并就不是一个子群，因为那要求乘积 $p_5=p_3p_4$ 位于 $\{p_1, p_4\}\cup\{p_1, p_2, p_3\}$ 之中，但情况显然不是这样。由并所生成的群是整个 S_3。

同态

同态　同态概念在整个群论中占有中心位置，它是通过两个语句加以描写的，一个是关于群的元素集合而另一个是关于群的运算。

> 群 G 到群 G' 中的映射 f，如果对于任意两个元素 a, $b\in G$，成立关系 (H)　$f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$，这映射 f 就称做同态。

这里左边的乘积在 G 中取而右边的则在 G' 中。在 f 下 G 的象总是

阵 $e'=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $a'=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,$b'=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$以及 $c'=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$组成的群。定义双射 f:

$$e—e'$$
$$a—a'$$
$$b—b'$$
$$c—c'$$

V_4	$e\ a\ b\ c$	G	$e'\ a'\ b'\ c'$
e	$e\ a\ b\ c$	e'	$e'\ a'\ b'\ c'$
a	$a\ e\ c\ b$	a'	$a'\ e'\ c'\ b'$
b	$b\ c\ e\ a$	b'	$b'\ c'\ e'\ a'$
c	$c\ b\ a\ e$	c'	$c'\ b'\ a'\ e'$

从群 V_4 和 G 的群表中可以看出,对于 V_4 的任意元素,关系 (H) 都是满足的。所以,V_4 同构于矩阵群 G。

如同从这个例子中可以看到的那样,同构群具有同一的结构,即使它们的元素也许属于完全不同的种类,在这里是置换和矩阵。同态与同构并不只限于有限群,同构群总是具有相同的基数。

【例 4】 设 $R^{\times}$ 是正实数的乘法群,而 R^{+} 是所有实数的加法群。将每一个正实数取其自然对数的映射 $f:a\to\ln a$ 是这两个群的一个同构; 众所周知, $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$, 换句话说, $f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$, 结果是 $R^{\times}\cong R^{+}$。

同构是在群之间的一个**等价关系**, 它使所有群的类划分成为一些同构类。应当指出,要是只对一个群的同构类而不是对它的具体表示感兴趣的话,那讨论的是**抽象群**。

同构群具有相同的结构,同构群内部的演算遵循相同的定律和规则,即使它们可能有不同种类的元素,并且运算也可能是以不同方式定义的。

正规子群　已提到过同态的核构成特殊类型的子群。G 的一个子群 N,如果它作为群 G 到某个别的群同态的核出现,则 N 称为**正规的**。于是,在(同态那一节)例 1 中的特殊线性群是一般线性群的一个正规子群。在例 2 中交代群是对称群的一个正规子群。一个群,如果它仅有的正规

子群是整个群以及平凡群(这些总是正规的)，则此群称做*单群*。从一个单群G到群H上的同态，或者是一个同构，或者H是平凡的。这里提及在置换群方面的下述结果，因为它在*伽罗华*(Galois)*理论*中有用。

当$n>4$时交代群A_n是S_n唯一的非平凡真子群。当$n>4$时，交代群A_n是单群。

所谓G的正规真子群M为*最大的*，是指对于G的任何一个正规子群N，如果有$M\subseteq N\subseteq G$，则不是$M=N$就是$N=G$成立。克莱因四元群V_4是A_4的最大正规子群。

商群 如果S是群G的一个子集并且a是G的一个元素，则集合aS定义为$\{as|s\in S\}$。对于右乘可作类似的定义。如果H是G的一个子群，则对于$a\in G$，称集合aH为G中H的*左傍系*。容易证明，它们构成G的一个划分。自然，对右傍系可以作同样的定义，从而它们也构成G的一个划分。然而，通常这两个划分并不是相同的。现在如果f是G的一个同态而它的核是N，那末N有一个值得注意的性质，即对于G中的任何一个a，傍系aN和Na是恒等的，因为两者恰恰都是由G的这样一些元素所组成的，这些元素通过同态f映成同一个元素a。这个性质很重要，所以此刻要给它一个特殊的称呼。

> G的一个子群$\overline{N}$，如对于G的任何一个元素a成立等式$a\overline{N}=\overline{N}a$，则称做不变子群。这个条件等价于对$G$中的任何一个$a$，$a\overline{N}a^{-1}=\overline{N}$。

因为不变子群的左傍系和右傍系是相等的，所以左右这两个字就可以省略。当它们构成一种划分时，两个傍系或者相等，或者它们没有公共元素。现在进一步推广乘积的记号，对于G的子集S和T定义乘积$ST=\{st|s\in S$并且$t\in T\}$，那末对于G的子群H，关系$HH=H$成立。对于不变子群$\overline{N}$还可深入一步。如果$a\overline{N}$和$b\overline{N}$是两个傍系，则$(a\overline{N})(b\overline{N})=(a\overline{N})(\overline{N}b)=a((\overline{N}\overline{N})b)=a(\overline{N}b)=a(b\overline{N})=(ab)\overline{N}$。于是，不变子群的两个傍系的乘积仍是一个傍系，它包含两个傍系元素的乘积。现在可以验证，不变子群$\overline{N}$的傍系实际上在这个乘法下构成一个群，它的幺元是$e\overline{N}=\overline{N}$，其中$a\overline{N}$的逆是$a^{-1}\overline{N}$。此外，从上述等式得出，将$G$的每一个元素取其傍系的映射$\pi: a\to a\overline{N}$是一个同态，它称做*典范同态*。按

此定义可见，π 的核是不变子群 N。正规子群和不变子群的概念是同一的。N 的傍系群称做 G 由 N 作成的商群，并记为 G/N。

【例5】 S_n 由 A_n 作成的商群由元素 A_n 和 p_0A_n 组成，其中 p_0 是一个奇置换。显而易见，映射 $\pi: p \to \begin{cases} pA_n = A_n & \text{如果 } p \text{ 是偶置换} \\ pA_n = p_0A_n & \text{如果 } p \text{ 是奇置换} \end{cases}$ 是从 S_n 到 S_n/A_n 的典范同态。

同态定理　如果 f 是一个从 G 到群 G' 上的同态（即 f 是满射的），则有一个从 N 的傍系到 G' 的自然映射，因为一个傍系的所有元素在 f 下有相同的象。将傍系 aN 取其元素的公共象 $f(a)$ 的映射 φ 是 G/N 与同态象 G' 的一个同构。这就是同态定理的内容(见图 3.1-1)。

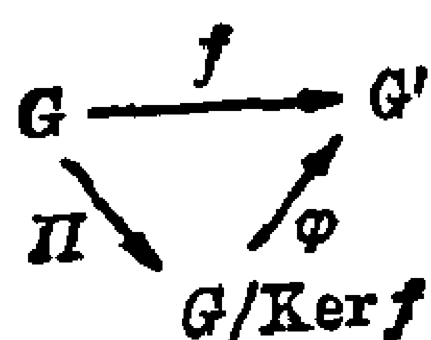


图 3.1-1　同态定理

同态定理。群 G 到群 G' 上的每一个满射同态可以分裂成为从 G 到 $G/\mathrm{Ker}\, f$ 上的典范同态 π 与 $G/\mathrm{Ker}\, f$ 到 G' 上的一个同构 φ 的乘积。

同态定理蕴涵着关于任意同态的研究可以归结为关于商群、同构以及子群的研究。

【例6】 已经证明，映射 $f: p \to \mathrm{sgn}\, p$ 是对称群 S_n 到实数子群 $\{+1, -1\}$ 上带有核 A_n 的一个同态。在例5中已经引进典范同态 $\pi: p \to \begin{cases} pA_n = A_n, & \text{如果 } p \text{ 是偶置换} \\ pA_n = p_0A_n, & \text{如果 } p \text{ 是奇置换} \end{cases}$。同态定理中所断定的分裂现在是 $f = \pi \cdot \varphi$，其中 φ 是映射 $\varphi: \begin{cases} A_n \to +1 \\ p_0A_n \to -1 \end{cases}$。显然，$\varphi$ 实际上是商群 S_n/A_n 到群 $\{+1, -1\}$ 上的一个同构。

下述定理给出最大正规子群与单群之间的关系。

群 G 的正规子群 N 是最大的，当且仅当商群 G/N 是单群。

自同构　自同构是群 G 到它自身上的一个同构。群 G 的两个自同构的乘积还是 G 的一个自同构。G 到它自身上的恒等映射，它使每一个元素固定不动，是一个自同构，并且如果 f 是 G 到它自身上的一个自同构，则逆映射 f^{-1} 也是 G 的一个自同构。G 的自同构在映射的乘积作为运算之下构成一个群。它称做 G 的**自同构群**。

有限群

有限群理论原先是作为处理代数方程求解问题的工具而发展起来的，并且最初仅涉及置换群，也就是只涉及对称群的子群。这些群的重要

性从下述两个定理就显而易见了。

凯莱(Cayley)定理。每一个n阶群是与对称群S_n的一个子群同构的。

拉格朗日(Lagrange)定理。对于有限群G的任何一个子群H,定义H在G中的指数$[G:H]$为G中H的左傍系的个数。如果E是单位子群,那末$[G:E]$是G的阶。现在,对于G的任何一个子群H,H的阶整除G的阶。更确切地说:

$$[G:E]=[G:H][H:E]。$$

群G的元素a的阶是由a生成的循环子群的阶。显然,如果G是有限的,每一个元素具有有限阶。事实上,根据拉格朗日定理,它的阶整除群的阶。然而,还有这样的无限群,它的元素全都有有限阶,例如,所有单位复根的乘法群,即方程$x^n-1=0$所有解的群,其中$n=1, 2\cdots$。伯恩赛德(W. Burnside)提出由有限多个元素生成的并且其中所有元素都有有限阶的群是否必定为有限群的问题。这个问题1967年才由诺维科夫(Novikov)和艾迪雅恩(Adyan)(以否定方式)解决。

在代数方程的求解理论中,一个群的合成列概念有很重要的作用。有限群G的合成列是一个子群序列$G=G_0\supset G_1\supset G_2\cdots\supset G_L=E$,每一个包含着下一个,使得每一个群是其前面一个群的最大正规子群。单群G_0/G_1, G_1/G_2, G_2/G_3, $\cdots$, G_{L-2}/G_{L-1}, $G_{L-1}/E=G_{L-1}$称做合成因子。具有素数阶合成因子的群称做可解群,因为它们与代数方程的可解性有关。有限群的合成因子就同构以及它们出现在该群中的阶来说是唯一确定的[约当-霍尔德(Jordan-Hölder)定理]。

应用 除了群论可应用于几何学以外,大致还可以说,只要出现映射、变换以及对称性(在这种或那种意义下),并且研究在映射、变换或对称下不变量概念的地方,群都发挥作用。尤其是有限群理论应用在代数方程的求解理论中(见伽罗华理论)。在物理学中群论对于相对论和量子力学都很重要,其中就利用了罗仑兹(Lorentz)变换群。物理学分成相对性和非相对性物理,就是按照群论的准则来划分的。在晶体学中群论能通过研究晶体结构的对称群来确定所有可能的晶体结构。或许还有兴趣对平面和立体的装饰用群论方法来分类。

拓扑群

在应用中,特别是在几何学和物理学的应用中,很重要的许多群是无限群,而且除了它们的代数结构以外,还有作为一个拓扑空间的结构。

*拓扑群*是这样一些元素的集合，一方面它是一个群，另一方面它是一个拓扑空间，并且这两个结构在*乘与逆为连续映射*的意义下是相容的。例如各种各样的矩阵群，几何学若干分支的变换群以及*罗仑兹群*。

譬如，两个具有实元素的(2×2)矩阵是否只有微小的区别，它们的元素是否相互密切这样的问题是有意义的。结果是从实线的拓扑导出(2×2)矩阵的拓扑。可以证明，在这个拓扑中矩阵乘法是连续的。于是，由具有非零行列式的(2×2)矩阵所形成的一般线性群$GL(2)$是一个拓扑群。虽然拓扑群总是无限群这个事实，使得对它们的分析比较困难，而它们的拓扑结构使得有可能采用一些新的、不一定是代数的方法，这些方法在阿贝尔拓扑群和紧拓扑群理论中已得出了一些卓越的成果。拓扑观念与代数观念之间的相互影响，给予群论的这个分支以独特的吸引力。

李群 平面绕固定点的旋转构成一个群。每个旋转由它的旋转角φ所确定，并且可以用下边形式的一个矩阵来描述：

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}。$$

可以证明，这些矩阵构成一个群。因为φ在0与2π之间连续变化，所以可在此群上定义一个拓扑。但是这个群不同于其他拓扑群，它的元素依赖于一个参数，而且这个依赖性是用可微函数来描述的。这就有可能在群上定义不仅连续，而且还是可微的函数，所谓一个函数可微是指它*作为实参数φ的函数为可微的*。一个拓扑空间，在它上面能定义可微函数者，称做*微分流形*。绕固定点旋转的群不只是一个拓扑空间，而且实际上是一个微分流形。按索富斯·李(Sophus Lie)的姓，这样的群称做*李群*；它们构成拓扑群类的一个特殊部分，并且在许多方面比任意拓扑群容易处理，因为在研究它们的时候可以利用分析的工具。

应用 李群及其表示（见II. 第20章）在特殊函数论中[*球面函数，贝塞耳(Bessel)函数*等等]以及在*殆周期函数论*中都是特别重要的。李曾经运用他的理论对微分方程进行分类与求解。在量子论中，球面旋转李群以及罗仑兹群(它也是一个李群)起着重要的作用。

半群

*半群*是带有一个*可结合运算*的非空集合。如果这个运算还是*可交换的*，则这个半群就称为*交换的*。如果H是一个乘法半群并且包含元素e使对H的所有元素a成立$ea=ae=a$，那末H就称为*具有幺元的半群*。

成为带有幺元的交换半群但不成为群的例子是在乘法下的整数全体和在加法下的非负整数全体(其中0是幺元)。自然,每一个群都是一个半群。对于所有半群为真的定理,对于所有群亦为真。模仿群的办法,可以区分**有限和无限半群**,并把半群的元素个数称做它的**阶**。如果对于半群 H 的任意一对元素 a 与 b, 方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 至多各有一个解, 那末 H 就称为**正规的**。非零整数在乘法下构成一个正则半群。对于有限半群下列定理成立:

一个有限阶的正则半群是一个群。

【例 7】 如果函数 $f(t)$ 描述一个时间依赖过程,而 $f(t+\alpha)$ 是由时间间隔 α 延迟的过程,则映射集合 $T_\alpha: f(t)\to f(t+\alpha)$ 构成一个半群。

【例 8】 任意集合 S 的幂集(即 S 的所有子集的集合)在交这个运算下构成一个带有幺元的交换半群。在并运算下亦然。对于交,整个集合 S 是幺元,而对于并则空集是幺元。

3.2 域与代数方程

直到十九世纪初,还可把代数说成是求解代数方程的理论。它的目的在于寻找尽可能一般的计算这种解的方法,对实际解的兴趣还不如求解所用的方法。与这些问题相关联,十九世纪的数学家们的观念导致定义出群与域,作为代数方程求解理论中必不可少的工具。后来这些概念获得了它们所固有的兴趣和重要性,主要因为在不同的领域中找到了应用。群论和域论现在已成为代数的一大分支。在数学的许多部分中还找到了具有类似结构的进一步对象,而这导致定义出诸如环、代数、格以及整环等代数结构(见 **II.** 第 20 章)。

域与整环

域 域是满足下列**域公理**的元素集合 K:

> **域公理。公理 1.** 在 K 上定义两个**运算**,称做加和乘。
>
> **公理 2.** 在加法下,K 的元素构成一个**阿贝尔群**,带有零元素 0。
>
> **公理 3.** 在乘法下,K 的非零元素构成一个**阿贝尔群**。
>
> **公理 4.** 加和乘由分配律连结起来,也就是说对于 K 的任意三个元素 a, b, c, 有 $a(b+c)=ab+ac$。

有理数、实数以及复数是域最重要的例子。可以直观地说，域是这样的元素集合，其中可以按通常的方式进行算术运算。正象群那样，可以区分为有限域与无限域。域 Ω 的一个子集 P 称做**子域**，如果它对于在 Ω 中定义的运算而言满足域公理，特别是 P 元素的和与积必须仍在 P 中，因而 P 元素的负与逆必须在 P 中。域 Ω 也就称做 P 的**扩张域**。如果 K 是 P 的一个扩张域并且也是 Ω 的一个子域，则 K 就称做 P 与 Ω 之间的**中间域**：$P\subseteq K\subseteq\Omega$。

每一个域都可以看作在任意子域 P（纯量集合）上的一个**向量空间**（见 II. 第 4 章），把域加法视为向量空间加法，而把与子域元素的域乘法视为由纯量的乘法。Ω 在 P 上作为一个向量空间的维数称做在 P 上扩张域 Ω 的**次数**。如果 Ω 是 P 上的一个有限维向量空间，则此扩张称做**有限的**。它的次数记为 $n=[\Omega:P]$。在这种情况下可以在 Ω 中找到元素 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$，使得每一个元素 $\beta\in\Omega$ 能唯一地写成形式 $\beta=c_1\beta_1+c_2\beta_2+\cdots+c_n\beta_n$，其中带有 P 的元素 $c_1, c_2, \cdots, c_n$。这样的元素 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 叫做在 P 上 Ω 的一组基。

如果 Ω 是 P 的一个扩张域并且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 Ω 的任意元素，则 $P(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 表示包含 P 和 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的 Ω 的最小子域。它由所有可用初等算术运算从 P 和 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 获得的 Ω 元素组成。这是说，域 $P(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 是从 P 再由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **加入** P 而得到的。首先将 α_1 加入 P 而获得域 $K_1=P(\alpha_1)$，然后将 α_2 加入 K_1 而获得 $K_2=K_1(\alpha_2)=P(\alpha_1, \alpha_2)$，等等。在 m 步之后则有 $K_m=K_{m-1}(\alpha_m)=P(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$。由单个元素的加入而得到的扩张域 $P(\alpha)$ 称做 P 的**单扩张**。

如果 K_1 和 K_2 是域，则从 K_1 到 K_2 上的双射 f，它对 K_1 的任意元素 a 和 b 有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 和 $f(ab)=f(a)f(b)$，叫做 K_1 到 K_2 上的一个**同构**；K_1 和 K_2 就称做**同构的**，写为 $K_1\cong K_2$。域 K 到它自身上的一个同构叫做 K 的自同构。如果 K_1 和 K_2 是域，并且如果 P 是 K^1 和 K_2 的一个子域，则一个使得 P 的每个元素固定不动的 K_1 到 K_2 上的同构就称做**相对同构**。当 $K_1=K_2$ 时则说是一个相对自同构。在下面的几节里可以找到这些概念的若干个例子。

整环 有理数域 $\mathbf{Q}$ 具有满足域公理 1, 2 和 4, 但不满足公理 3 的一个子集：整数全体。在整数集合中除法并不是普遍可行的，不过它们至少满足**弱消去律**：如果 $ab=ac$ 并且 $a\neq0$，则 $b=c$（见半群）。

整环是一个集合 I，其中域公理 1，2 及 4 满足，而公理 3 则代之以公理 $3'$：I 的非零元素在乘法下构成一个正则交换半群。

所有的域都是整环。整数全体是不成为域的整环的一个例子。整环的更重要的例子是系数在某个域中的多项式集合(见多项式)。如果集合 I 是有限的，则 I 就称做有限整环。由上面提到的有限正则半群的定理立即可得：

每一个有限整环是一个域。

如果有一个从 I_1 到 I_2 的双射 f，在域同构一样的意义下与运算相容，则称 I_1 和 I_2 两个整环为同构的 ($I_1 \cong I_2$)。这个映射就称做一个同构(见分式域)。

【例】 除了已经提到的域和整环以外，高斯数全体构成一个十分重要的例子。它们由所有形如 $a+bi$ 的复数组成，其中 a 和 b 是有理数，而 $i^2=-1$。当 a 和 b 为整数时的高斯数子集，称做高斯整数集，它是一个整环。高斯数是从有理数再加入 i 而得到的。

最小有限域由两个元素 0 和 e 组成，并有下边的加法表与乘法表。

$+$	0	e	$\cdot$	0	e
0	0	e	0	0	0
e	e	0	e	0	e

以素数为模的剩余域也是一个重要的例子(见 **II.** 第 18 章)。

多项式 具有形式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的表达式，其中 n 是自然数而 $a_0, \cdots, a_n$ 是属于域 K 的元素，称做在 K 上未定元 x 的多项式。量 $a_0, \cdots, a_n$ 称为它的系数。系数全为零的多项式叫做零多项式。如果系数 a_n 非零，则多项式的次数为 n。如果未定元 x 替代为一个域元素，就得到一个定义在 K 上其值在 K 中的函数。这种函数称做在域 K 上的多项式函数或整有理函数；相反地，如果域是无限的，则每个整有理函数确定唯一的多项式。在讨论多项式的时候，采用简化记法 $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ 常常是方便的，其中理解成仅仅有限个 a_i 不为零。于是可以把多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ 和 $g(x)=\sum_{j=0}^{\infty} b_jx^j$ 的和与积写成 $f(x)+$

$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 以及 $f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$，其中的系数 c_k 与 d_k 满足等式 $c_k=a_k+b_k$ 以及 $d_k=\sum_{i+j=k}^{\infty} a_i b_j$。系数在某个固定域 K 中的多项式全体构成一个整环，记为 $K[x]$。在这个整环 $K[x]$ 中，可以执行带余除法，正象对于整数那样。这意味着，如果 $f(x)$ 和 $g(x)$，而 $g(x)\neq 0$，是两个给定的多项式，则存在唯一的多项式 $h(x)$ 和 $r(x)$，使得 $f(x)=h(x)\cdot g(x)+r(x)$，而 $r(x)=0$ 或者 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数。模仿数论(见 I. 第 1 章)的办法，称两个多项式 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 按模 $g(x)$ 同余，写为 $f_1(x)\equiv f_2(x) \bmod g(x)$，如果它们除以 $g(x)$ 而留下相同余项 $r(x)$ 的话。按模 $g(x)$ 同余是一个等价关系并导致整环 $K[x]$ 划分成一些类。这些类如此相加和相乘：从每一类中选出一个多项式，进行多项式的加或乘，再将多项式的和或积的类定义为类的和或积。可以证明，即使从原来两类中选出的多项式变更了，总是得到相同的类。如果 $g(x)$ 是一个不可约多项式，则那些按模 $g(x)$ **剩余类**全体构成一个域，记为 $K[x]/(g(x))$，并称做 $K[x]$ 按模 $g(x)$ 的**剩余类域**。

一个不是常数的多项式称为**在 K 上不可约的**，如果它不可能写成在 K 上的两个次数较小的但次数为正的多项式的积。一个 n 次多项式，如果它的最高系数 a_n 是 1，则称它为**首一的**。下述定理对于在域 K 上的多项式成立：

在 K 上的每一个多项式 $f(x)$ 具有一种表示 $f(x)=Cp_1(x)\cdots p_s(x)$，作为一个域元素 C 与 $K(x)$ 中不可约的首一多项式 $p_1(x), \cdots, p_s(x)$ 的积。这种表示除了不可约多项式的次序外是唯一的。

分式域　分式域的概念起源于这样的问题："什么是包含一个给定整环的最小域?"。这个问题可以改说成："给定一个整环 I，是否存在一个包含 I 的域 K，它的元素全都可以写成 I 元素的分式？"为了获得这种域的概念，首先假定它存在并可以通常的方式对分式 a/b 进行运算。元素 a 和 $b\neq 0$ 在 I 中，从而(1) $a/b=a'/b'$，如果 $ab'=a'b$，(2) $a/b+c/d=(ad+bc)/bd$，(3) $(a/b)\cdot(c/d)=ac/bd$，当然，其中的所有分母必须不为零。如果此域存在，那末规则(1)，(2)和(3)必须成立。于是采用这些规则来构造一个域 K，首先将所要求的分式替代为 I 元素 a 和 $b\neq 0$ 的有序对 (a,b)。在这些对上定义一种等价关系：如果在 I 中 $ab'=a'b$，则 $(a, b)=(a',b')$。用方括号[ ]来表示这些类。用规则(2)和(3)来定义类的加法和乘法：由

(2)$[a, b]+[c, d]=[ad+bc, bd]$；而由(3)$[a, b]\cdot[c, d]=[ac, bd]$。可以验证，这些运算与类$[a, b]$等等中所选出的具体代表无关，并且类$K'$的集合在这种加法和乘法下构成一个域，其中每一个元素$[a, b]$可以表示为分式$[a, e]/[b, e]$，这里e是I的幺元。现在可以证明，K'的元素$[a, e]$构成一个整环I'，它通过映射$[a, e]\to a$而与I同构。这样，所要求类型的域已经构造成了；虽然它并不包含I本身，但包含一个与I同构的整环。现在如果I'的元素由它们在I中的同构象来代替，并且适当地重新规定初等运算，就得到一个包含I的域K，其中每一个元素可表示为I元素的分式a/b，这个域称做*整环I的分式域*。它是*包含I的最小域*。如果I是整数集合，那末这个过程与人们用来构造有理数的过程是一致的(见I.第3章)。

整数的分式域是有理数集合。

如果I是在域K上的多项式整环$K[x]$，则它的分式域就叫做在K上的有理函数域并记为$K(x)$。

代数方程与域扩张 所谓*n次代数方程*是一个方程$f(x)=0$，它的左边是一个n次多项式。特别地，如果多项式$f(x)$是在K上不可约的，则方程就叫做K上不可约的。方程$f(x)=0$的解称做*多项式$f(x)$的根*或方程$f(x)=0$的根。一般地说，代数方程只有在一个扩张域中才能解；例如，若要对每一个二次多项式确定一个根就会导致数系的一个相当大的扩展：复数。往往一个较小的扩张就足够了。例如，方程$x^2-2=0$和$x^2+4=0$的系数在有理数域中，而它们的解分别地在域$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$和高斯数域中。如果$f(x)=0$是次数大于1的在K上不可约的方程，则它在K中无解，从而扩张对于求解是必要的。

如果α是K上不可约方程$f(x)=0$的一个解，则α就叫做K上的*代数数*。如果Ω是K的一个扩张域，并且Ω的每一个元素是K上的代数数，则称Ω为K的一个*代数扩张*，而$\mathbf{Q}$的代数扩张叫做*数域*。不是代数的扩张则称为*超越的*。如果$f(x)=0$是系数在数域K中的不可约方程，则根据*代数基本定理*(见I.第4章)，它在复数域中有一个解α。由α加入K而得到的域$K(\alpha)$是包含K和方程根α的最小复数子域。对于一般的，其系数的代数含义为未知的n次方程，要构造一个这种类型的适当扩张是不可能的，因为不存在必定至少包含方程一个解的某个域可供利用。既然即使在一个特定方程的情况下代数基本定理也仅仅断言在复

数域中解的存在性而并没有给出构造解的方法，那末在一切情况下去试找构造出包含给定方程一个根的扩张域，即所谓**根域**的一般方法似乎不无道理。

根域的构造 设 $f(x)$ 是系数在域 K 中的 n 次不可约首一多项式。剩余类域 $K[x]/(f(x))$ 包含子域 $\bar{K}$，它是由 K 元素 a 的同余类 $\bar{a}$ 所组成的一个子域。a 的类 $\bar{a}$ 由所有那些除以 $f(x)$ 之后余为 a 的多项式组成。映射 $a\to\bar{a}$ 是 K 到 $\bar{K}$ 上的一个同构：$K\cong\bar{K}$。如果在 $K[x]/(f(x))$ 中 $\bar{K}$ 代之以 K 而保留**所有的运算并关系相同**，则得到一个包含 K 并且与 $K[x]/(f(x))$ 同构的域 K'。现在设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，并设 α 是所有那些除以 $f(x)$ 之后余为 x 的多项式的类。于是根据剩余类的加法和乘法规则，$\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0$ 是 $f(x)$ 的类，但这是所有那些除以 $f(x)$ 之后余为 0 的多项式的类，从而在 K' 中这已被 0 本身代替了。这样 $\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$，而 α 是方程 $f(x)=0$ 的一个解。域 K' 包含方程 $f(x)=0$ 的一个解，称做它的一个**根域**。

根域 $K'=K(\alpha)$ 是 K 的一个**单代数扩张**，K' 的每一个元素可以写成 $b_0+b_1\alpha+\cdots+b_{n-1}\alpha^{n-1}$ 的形式，其中 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ 是 K 的元素。在 K 上的扩张 $K(\alpha)$ 的次数等于不可约多项式 $f(x)$ 的次数：$[K(\alpha):K]=\text{degree}(f(x))=n$。

【例 1】 对于在有理数 $\mathbf{Q}$ 上的方程 $x^2+1=0$ 所得到的一个根域是单扩张 $\mathbf{Q}(i)$，其中每个元素都可以写成 $a+bi$，这里 a 和 b 是有理数而 $i^2+1=0$。这个域与高斯数域同构。

可分域 设 $f(x)$ 是一个系数在域 K 中的 n 次首一多项式。K 上 $f(x)$ 的**可分域**是 K 的**最小**扩张域 L，使在 L 上 $f(x)$ 分裂成线性因子：$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$，这里 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 L 中 $f(x)$ 的根。K 上多项式或代数方程的可分域是包含这个代数方程所有解的，K 的最小扩张。就同构的意义来说，它是唯一的。可以通过反复应用根域的构造办法来构造可分域。首先将 $f(x)$ 分解成 K 上的不可约多项式，如果所有的不可约因式次数为 1，则 K 本身就是可分域。否则对于其中一个次数 >1 的不可约因式构造一个根域 K'，再将 $f(x)$ 分解成 K' 上的不可约因式。如果现在所有的因式次数为 1，则 K' 就是所要求的可分域。要不然，选出一个次数 >1 的因式，并按同样的过程构造 K' 上的一个根域 K''。再将 $f(x)$ 分解成 K'' 上的不可约多项式，如此等等。由于每一步至

少有一个不可约因式的次数降低，所以这个过程必定以 $f(x)$ 的可分域为结局。

【例 2】 考虑 $\mathbf{Q}$ 上的多项式 $f(x)=x^3-2$。它的根是 $\alpha_1=\sqrt[3]{2}$，$\alpha_2=\omega\sqrt[3]{2}$，$\alpha_3=\bar{\omega}\sqrt[3]{2}$，其中 $\omega=1/2(-1+i\sqrt{3})$ 而 $\bar{\omega}=1/2(-1-i\sqrt{3})$。可分域为 $L=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\omega\sqrt[3]{2},\bar{\omega}\sqrt[3]{2})=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$，因为 $\bar{\omega}=-1-\omega$。

伽罗华理论

伽罗华群以及伽罗华理论的基本定理 由伽罗华所发现的代数方程解和群论之间的联系，导致了有限域扩张理论中特别美妙的结果。由于这个原因，讨论代数方程解的**域论中心部分**就称做**伽罗华理论**。如果 N 是一个在 P 上**无重根**多项式的可分域，则 N 有这样一个重要性质，即包含 N 的、P 的任何一个扩张 L_1 其每一个相对自同构将 N 映射到它自身上，也就是说导出 N 的一个自同构。具有这种性质的域扩张称为**正规的**。如果 K 是包含在 L_1 中的，P 的一个扩张，但不是在 P 上的一个正规扩张，则它通过 P 上 L_1 的相对自同构而映射到同构复本 K', K'', … 上，它们称做 L_1 中 K 的**共轭**。L_1 的相对自同构规定 P 上 K 的相对同构。正规域扩张 K 就是以 K **等于它的所有共轭**这样一个性质而著称的。

设 $f(x)$ 是域 P 上的 n 次不可约多项式。假定 P 的一个扩张 L 包含方程 $f(x)=0$ 的所有解 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，而且这些解全都相异。如果 α 是其中的一个解，则单扩张 $P(\alpha)$ 的共轭是 $P(\alpha_1), \cdots, P(\alpha_n)$，在这中间有一个与 $P(\alpha)$ 等同。$P(\alpha)$ 的 n 个相对同构将 α 映成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$。因为每一个相对同构必定把 $f(x)$ 的一个根映成 $f(x)$ 的另外一个根，所以不可能有更多的 $P(\alpha)$ 的相对同构。

P 的一个单扩张 $P(\alpha)$ 的相对同构个数等于次数 $[P(\alpha):P]$。

这个命题可以推广。一个有限扩张 $K=P(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 总是可以通过添加单个元素而获得：$K=P(\theta)$，只要以加入的 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 为根的那些不可约方程无重根。如果 $N=P(\theta)$ 是 P 的一个正规扩张，则 N 的相对同构个数等于扩张的次数 $[N:P]$。正规扩张 N 的相对自同构在映射乘法下构成一个 $[N:P]$ 阶群。这个群就称做 P 上正规扩张 N 的**伽罗华群** G：$[G:E]=[N:P]$。

如果 K 是 P 和 N 之间的一个中间域，则 N 也是在 K 上正规的，并且使 K 的所有元素固定不动的，P 上 N 的伽罗华群 G 的那些相对自同构，换句话说，K 上 N 的那些相对自同构，构成 K 上 N 的伽罗华群 G 的

一个子群 H。

伽罗华群 G 的子群 H 以上述方式与每一个中间域 K 相关联。这种对应可逆。如果 H 是 G 的一个子群，则通过 H 中所有相对自同构固定不动的那些 N 元素，构成一个中间域 K。于是，研究在 N 与 P 之间的中间域可以归结为研究伽罗华群的子群。群论的方法现在可以应用于域论。如果已知 P 上 N 的伽罗华群 G 的子群，则可全面地考察在 P 与 N 之间的所有扩张，中间域及它们的相互关系。如果 P 是包含有理数的一个域，则伽罗华理论的基本定理成立。

伽罗华理论的基本定理　设 N 是 P 的一个有限正规扩张，而 G 是它的伽罗华群。(I) 在 G 的子群 H 与扩张的中间域 K 之间存在一一对应。

(II) 如果 K 和 H 互相对应，则 H 是由使 K 元素固定不动的 N 的所有相对同构组成；而 K 是由在 H 中的相对自同构下固定不动的 N 元素组成。

(III) 如果相伴子群 H 是在 G 中正规的，则中间域 K 是 P 上正规的。在这种情况下，P 上 K 的伽罗华群同构于商群 G/H。

(IV) 下述关系成立：

$$[H:E]=[N:K]\qquad [N:K]\to\left|\begin{matrix} N\leftrightarrow E \\ \\ K\leftrightarrow H\end{matrix}\right|\to[H:E]$$

$$[G:H]=[K:P]\qquad [K:P]\to\left|\begin{matrix} K\leftrightarrow H \\ \\ P\leftrightarrow G\end{matrix}\right|\to[G:H]$$

【例 3】　考虑有限正规扩张 $L=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\ \omega\sqrt[3]{2},\ \bar{\omega}\sqrt[3]{2})=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\ \omega)$，即 $\mathbf{Q}$ 上多项式 x^3-2 的可分域。为了求得 $\mathbf{Q}$ 上 L 的伽罗华群，首先找出 L 中 $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ 的所有相对同构。这里 $\sqrt[3]{2}\to\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{2}\to\omega\sqrt[3]{2}$ 或 $\sqrt[3]{2}\to\bar{\omega}\sqrt[3]{2}$。因而 $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\ \omega)$ 的相对自同构以下列六种可能方式作用于 $\sqrt[3]{2}$ 和 ω：

$$\sqrt[3]{2}\to\sqrt[3]{2},\quad \omega\to\omega\sim E$$

$$\sqrt[3]{2}\to\omega\sqrt[3]{2},\ \omega\to\omega\sim A$$

$$\sqrt[3]{2}\to\bar{\omega}\sqrt[3]{2},\ \omega\to\omega\sim A^2$$

$$\sqrt[3]{2}\to\sqrt[3]{2},\quad \omega\to\bar{\omega}\sim B$$
$$\sqrt[3]{2}\to\omega\sqrt[3]{2},\quad \omega\sim\bar{\omega}\sim A^2B$$
$$\sqrt[3]{2}\to\bar{\omega}\sqrt[3]{2},\ \omega\to\bar{\omega}\sim AB。$$

这六个相对自同构构成 $\mathbf{Q}$ 上 L 的伽罗华群 G，其中的乘法定义为相继地执行两个映射。如果注意到 $\omega^2=\bar{\omega}$ 和 $\omega\bar{\omega}=1$，则容易验证上述关系。进一步有 $A^3=E$，$B^2=E$ 和 $BA=A^2B$。子群 $\{E, A, A^2\}$，$\{E, B\}$，$\{E, AB\}$ 以及 $\{E, A^2B\}$ 对应于中间域 $\mathbf{Q}(\omega)$，$\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$，$\mathbf{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$ 以及 $\mathbf{Q}(\bar{\omega}\sqrt[3]{2})$。

$$\begin{array}{cccccc}\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\omega) & \mathbf{Q}(\omega) & \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}), & \mathbf{Q}(\omega\sqrt[3]{2}), & \mathbf{Q}(\bar{\omega}\sqrt[3]{2}), & \mathbf{Q}\\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\ \langle E\rangle & \langle A\rangle & \langle B\rangle & \langle AB\rangle & \langle A^2B\rangle & G\end{array}$$

方程的伽罗华群 如果 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 是系数在 $\mathbf{Q}$ 中的一个方程，则在方程的解 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 之间存在某些有理关系 $H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=0$；例如，下边列出的一些方程(见 **I.** 第 4 章)。

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n&=-a_{n-1}\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n&=a_{n-2}\\ \vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\quad&\quad\vdots\\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n&=(-1)^na_0\end{aligned}$$

这些方程是与解的编号的次序无关。换言之，解之间的这些关系**在解的所有置换下保持不变**。可能还存在一些取决于所讨论的具体方程的进一步关系，而这些关系在某些置换下也许保持不变，也许不保持不变。如果考虑那些不破坏解之间的任何一个关系的置换集合，则成立下列结果：

那些使系数在 $\mathbf{Q}$ 中的所有关系 $H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=0$ 保持不变的置换集合是 S_n 的一个子群。它叫做此方程的伽罗华群。

【例 4】 找出方程 $f(x)=(x^2-2)(x^2-3)=0$ 的伽罗华群。这个方程的根是 $\alpha_1=\sqrt{2}$，$\alpha_2=-\sqrt{2}$，$\alpha_3=\sqrt{3}$，$\alpha_4=-\sqrt{3}$。这要求找出使这些根之间的一切关系保持不变的四个元素的所有置换。考虑关系 $H_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_4)=\alpha_1\alpha_2=2$ 和 $H_2(\alpha_1, \cdots, \alpha_4)=\alpha_3\alpha_4=3$ 就够了。由此易见置换

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$$

$$p_2' \sim \sqrt{2} \to \sqrt{2}, \quad \sqrt{3} \to -\sqrt{3} \qquad p_2 \to p_2'$$
$$p_3' \sim \sqrt{2} \to -\sqrt{2}, \quad \sqrt{3} \to -\sqrt{3} \qquad p_3 \to p_3'。$$

容易检验，这个映射是两个伽罗华群之间的一个同构。

用根式解方程 方程 $f(x)=0$ 解的*存在性*问题，已通过可分域的构造解决了，但还有*确定*它们的问题，也就是找一个给出它们的精确值的方法问题。对于二次方程很早就已经知道了公式。*卡尔达诺*(Cardano)*公式*可以用来解三次方程，而卡尔达诺的一个学生费拉利(Ferrari)可能对于四次方程给出了一个相应的公式。这些公式都只用四种基本算术运算和开方。在费拉利之后，所有想对*五次或五次以上*方程寻找一个仅仅使用这些运算的一般公式的尝试都没有成功。正如下面的论证所表明的那样，将"根式的能力"估计过高了。作为这些努力的一个正当理由，应该注意到对高于四次的一般方程寻找一个相应的求解公式的期望曾经为这样的事实所助长，即能够极其容易地找出一些特殊方程，它们的解可用根式来表达。这样的方程叫做可解的，或*用根式可解*的。根式是 n 次纯方程 $x^n-a=0$ 的一个解，记为 $\sqrt[n]{a}$。

域 P 上的*根号表达式*是以如下方式定义的：存在一个元素 $g_1 \in P$ 和有限个多项式 $g_2(x)$, $g_3(x_1, x_2)$, $\cdots$, $g_m(x_1, \cdots, x_{m-1})$ 及 $g(x_1, \cdots, x_m)$ 与正整数 $n_1, \cdots, n_m$ 使 $\beta=g(\beta_1, \cdots, \beta_m)$，其中 $\beta_1=\sqrt[n_1]{g_1}$, $\beta_2=\sqrt[n_2]{g_2(\beta_1)}$, $\beta_3=\sqrt[n_3]{g_3(\beta_1, \beta_2)}$, $\cdots$, $\beta_m=\sqrt[n_m]{g_m(\beta_1, \cdots, \beta_{m-1})}$。

【例 6】 由 $g_1=2$, $g_2=6x_1^3+5x_1+3$ 及 $g(x_1, x_2)=(1+3x_1)x_2+7x_1+2$ 与 $n_1=2$ 及 $n_2=4$，得到在有理数域上的有理表达式 β：

$$\beta=g(\beta_1, \beta_2)=(1+3\sqrt{2})^3\sqrt[4]{6(\sqrt{2})^3+5\sqrt{2}+3}+7\sqrt{2}+2,$$

这里 $\beta_1=\sqrt{2}$ 以及 $\beta_2=\sqrt[4]{3+5\sqrt{2}+6(\sqrt{2})^3}$。

如果方程 $f(x)=0$ 的解是 P 上的*根号表达式*，则方程 $f(x)=0$ 称为在 P 上*用根式可解的*。用域论的语言来说，根号表达式相当于一个*域塔*：

$P=K_0 \subseteq K_0(\beta_1)=K_1 \subseteq K_1(\beta_2)=K_2 \subseteq K_2(\beta_3)=K_3 \cdots \subseteq K_{m-1}(\beta_m)=K_m=K$，其中 β 是 K 的一个元素而每一个 K_i 上的扩张 K_{i+1} 是通过解纯方程 $x^{n_i}-g_i(\beta_1, \cdots, \beta_{i-1})=0$ 而获得的。在这种情况下，域 K 称为可解的。于是，用域论的语言，方程的可解性能按如下方式表达：

当且仅当存在一个包含多项式 $f(x)$ 的可分域 L 的可解域 K 时，方程 $f(x)=0$ 是用根式可解的。

可以证明，在这些情况下 $f(x)$的可分域 L 必定其本身是可解的。

当且仅当多项式 $f(x)$ 的可分域 L 能通过域塔 $P=K_0\subseteq K_0(\beta_1)=K_1\cdots\subseteq K_{m-1}(\beta_n)=K_m=L$而达到，其中每一个域 $K_{i+1}=K_i(\beta_{i+1})$ 是由 K_i 通过添加纯方程 $x^{n_i}-b_i=0$ 的解而获得的时候，方程 $f(x)=0$ 是用根式可解的。

可以证明，上述域塔的存在性蕴涵着存在这样一个域塔，在其中每个域是在它前面那个域上的一个纯方程的可分域。根据伽罗华理论的基本定理，这蕴涵着伽罗华群 G 中存在子群列：

$$G=H_m\supseteq H_{m-1}\supseteq\cdots\supseteq H_1\supseteq H_0=E,$$

其中每个子群是在其前一个中正规的，商群同构于域塔中扩张的伽罗华群。如果基域包含所有的 n 次单位根，则它们总是纯方程的阿贝尔群。由此可以证明，伽罗华群有一个带有素数阶因式的合成列。反之亦然。从而得到限定准则：

当且仅当方程$f(x)=0$的伽罗华群是可解的时候，方程$f(x)=0$是用根式可解的。

因为 2, 3, 4 次的对称群是可解的，这蕴涵着 2, 3, 4 次的一般方程用根式的可解性。另一方面，5 次及 5 次以上的对称群是不可解的，因此对于 5 次及 5 次以上的一般方程不可能存在求解公式。这个结果是由伽罗华和阿贝尔各自独立地发现的；不过后者没有完成对特殊方程用根式的可解性给出伽罗华的一般准则。

三次方程 三次方程的简化形式(见 I.第 4 章)是：$x^3+px+q=0$，其中 p 和 q 是域 P 的元素。此方程的伽罗华群是 S_3。伽罗华群的合成列 $S_3\supseteq A_3\supseteq E$ 对应于域塔 $P\subseteq K\subseteq N$。再者有关系$[S_3:A_3]=[K:P]=2$和$[A_3:E]=[N:K]=3$。为使事情简单一些，假定 P 已经包含单位立方根。为了从 P 得到 K，只需将一个平方根$\sqrt{D}$加入 P，这里 $\sqrt{D}$ 必须在 A_3 的所有置换下固定不变。由这个条件得到$\sqrt{D}=\sqrt{-4p^3-27q^2}$。如果用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示原方程的解，再构成拉格朗日预解式 $r=\alpha_1+\omega\alpha_2+\bar{\omega}\alpha_3$，这里 $\omega, \bar{\omega}$ 是单位立方根，则可以证明，$r^3=27q/2+(3/2)\sqrt{-3D}=s$ 位于域 $K=P(\sqrt{D})$中。现在通过对 K 加入 $r=\sqrt[3]{S}$ 而得到扩张 N。根 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由方程 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$, $\alpha_1+\omega\alpha_2+\bar{\omega}\alpha_3=r$ 和 $\alpha_1+\bar{\omega}\alpha_2+\omega\alpha_3=-3p/r$ 计算出来。

用尺规作图 只用直尺和圆规来作图的问题可按以下方式阐述：从

平面上有限个给定点，在*有限步*内作出所要求的一个点，其中每一步必为下列类型之一：

(1) 直尺只可用来画连接两个给定的或前面已作出的点的直线。

(2) 圆规只可用来画这样的圆，其圆心是一个给定的或前面已作出的点，而其半径是两个给定的或前面已作的点之间的距离。

(3) 新的点可以由按规则(1)与(2)作出的两条直线、一条直线与一个圆或两个圆相交而作出。

为了考察所能作出的点，将几何问题翻译成代数语言。引进一个直角笛卡尔坐标系来描述点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，这里譬如说 P_1 是原点，P_2 是点(0, 1)。如果 K 是包含所有给定点坐标的最小域，则借助于解析几何可以证明，由类型(1)，(2)或(3)的单独一步可以作出的所有点，一定具有在 K 中或在由 K 加入平方根而得的一个域中的坐标。另一方面，还可以证明，所有有理运算以及开平方根都可以通过类型(1)，(2)和(3)的一系列步骤来执行。一般地说来，可有下列重要准则：

当且仅当一个点的坐标位于 K 的一个有限正规扩张域中且它在 K 上的次数是 2 的方幂时，这个点可只用尺规作出。

因为在许多情况下，问题是要构造一个由方程 $f(x)=0$ 给定的量 x，所以这个准则可改述为：量 x 可以只用尺规作出，当且仅当方程 $f(x)=0$ 能在 K 上由二次根式解出。

著名的古希腊数学问题：只用尺规作一个面积等于给定圆面积的正方形(*方圆问题*)，将一个角分成三个相等部分(*三等分角问题*)，以及求一个立方体，其体积为给定立方体体积的二倍(*倍积问题*)，业已证明全是不可解的。立方体倍积的代数形式是 $x^3-2=0$，这里 x 是所要求的立方体的边长。这个方程在有理数域上不可约，它的每一个根都生成一个 3 次的域扩张。这样的域永远也不可能包含在一个次数是 2 的方幂的域扩张中。

角 α 的三等分，等价于作一个长度为 $\cos(\alpha/3)$ 的线段，这里 $\cos\alpha$ 是给定的。所得出的方程是 $4[\cos(\alpha/3)]^3-3\cos(\alpha/3)-\cos\alpha=0$。问题在于方程 $4x^3-3x-\cos\alpha=0$ 的根是否位于 $Q(\cos\alpha)$ 的一个 2^m 次的扩张域中 (m 是自然数)，这里 Q 是有理数域。可以证明，此方程一般地说是不可约的，于是如同倍积问题一样，每一个根都生成一个 3 次的域扩张，从而对于一个角的三等分不可能有一个一般的尺规作图方法。

第4章 线性代数

4.1 线性方程组

在 **I.** 第 4 章中，考察了在什么条件下，以及用怎样的方法，当 a, b, c 是有理数、实数或复数时，形如 $ax=b$ 或 $ax+by=c$ 的方程是可解的。第一个方程含有变元 x，而第二个方程含有两个变元 x 和 y。在这两种情况下，变元都只以一次幂出现；这样的方程就分别称做一元或二元线性方程。一般地，一个 n 元(或未知量)x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的线性方程是形如 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的方程。

数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 称做*系数*而 b 称做方程的*常数项*或*绝对项*。当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，就得到上面所提到的情况。

在数学中许多问题并不归结为单个线性方程，而是这样一些方程的整个系统。

线性方程组 由下边两个方程给出一个联立线性方程组(或集合)的简单例子。

$$a_1x+b_1y=c_1,$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

在这里 a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 和 c_2 是给定的数。这样一个方程组的解是一个数对$(\bar{x}, \bar{y})$，使得当 x 用 $\bar{x}$ 代换而 y 用 $\bar{y}$ 代换时，两个方程同时被满足，即两者变成为相等的真命题。将这种情况加以推广，把下边形式的一个方程组理解为一个 n 元(未知量)x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的 m 个线性方程的系统。

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m。$$

在这个方程组中，a_{ij} 和 b_i，$i=1, \cdots, m$ 以及 $j=1, \cdots, n$ 是给定的数。指标 i 指出这个数出现在系统的哪一个方程中，而系数 a_{ij} 的指标 j 指出与它关联的是哪一个未知量；例如，a_{23}（读作"a 二三"或"a 的下标二三"，而不是"a 二十三"）是在第二个方程中未知量 x_3 的系数。用 $m=1$ 来描述由单个线性方程形成的特殊方程组。

一个线性方程组，如果常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零，就称做*齐次的*；否则，只要有一个 b_i 不为零，这方程组就叫做*非齐次的*。如果在一个非齐次方程组中所有的常数项都用零代换，则所得的方程组就称做*相伴的齐次方程组*。

n 个未知量的 m 个线性方程组的解是一列数 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$，使得当所有的未知量用相应的数代换时，所有的方程同时被满足。一列数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 叫做 *n 元组*，并记作 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$。两个 n 元组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 和 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 相等，当且仅当 $c_1=d_1, c_2=d_2, \cdots$，和 $c_n=d_n$。n 元组 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ 要成为给定的线性方程组的一个解，也许必须验证，值 $\bar{x}_i$ 是否处在所允许的基本变域之中。为了简单起见，要是方程组的系数和常数是实数（或者复数）的话，就相应地假定这个变域是实数（复数）集合。

研究线性方程组的解，导致三个问题，每个问题都要以其特有的方式处理。首先是解的*存在*问题。这是问在怎样的条件下方程组有解；因为即使是单个方程 $0\cdot x=1$ 也会没有解。第二个问题是要找一个求出给定线性方程组的解的*方法*。最后，第三个问题是要描述给定方程组的*所有解总体*。

解的存在性 一个线性方程组的下述处理，既不改变可解性或者不可解性，也不改变方程组的解：

1．方程组的某个方程加到其他方程上去。

2．方程组的方程乘以非零因子。

3　变更方程的次序。

【例 1】

$$\begin{array}{r|c|l} 2x_1+x_2=1 & +1 & \longrightarrow \quad 2x_1+\ x_2=1 \\ x_1+3x_2=4 & -2 & -2x_1+6x_2=-8 \end{array} \quad \boxed{+} \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 2x_1+x_2=1 \\ 7x_2=-7 \end{array}$$

整个方程组有唯一解 $\bar{x}_1=1, \bar{x}_2=-1$。

下面的一个准则对方程组的可解性问题做出了理论上的回答。它也可实际用于证明一个给定的方程组没有解。

线性方程组有解，当且仅当下述条件成立：反复应用运算1.和2.，导致一个方程，其中所有的系数都为零，那时该方程的常数项也为零。

【例2】 下边的方程组无解。如方框里的数字所描述的，这些方程分别乘以-1, 1, -1，然后相加；得到的方程是

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=1.$$

$$\begin{array}{|rcl|}\hline 2x_1+x_2+x_3 &=& 1\\ x_1+2x_2+x_3 &=& 1\\ -x_1+x_2 &=& -1\\ \hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|}\hline -1\\ +1\\ -1\\ \hline\end{array}$$

齐次方程和解的完全集合 求一个给定的非齐次方程组的所有解的问题可以部分地化成较简单的找相伴齐次方程组的所有解的问题。这是下述很容易证实的齐次方程组解的性质的一个推论(注意与运算1.和2.的相似之处)。

1. 如果$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$和$(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)$是齐次线性方程组的两个解，则它们的和$(\bar{x}_1+\bar{y}_1, \bar{x}_2+\bar{y}_2, \cdots, \bar{x}_n+\bar{y}_n)$也是方程组的解，这个和是以分量方式定义的。

2. 如果$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$是一个解，则它乘以一个因子$c$ $(c\bar{x}_1, c\bar{x}_2, \cdots, c\bar{x}_n)$也是一个解。

3. n元组$(0, 0, \cdots, 0)$总是任何齐次方程组的一个解，并且叫做*平凡解*。

从性质1和2可见，如果$(\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)}, \cdots, \bar{x}_n^{(1)})$, $(\bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_2^{(2)}, \cdots, \bar{x}_n^{(2)})$, $\cdots$, $(\bar{x}_1^{(m)}, \bar{x}_2^{(m)}, \cdots, \bar{x}_n^{(m)})$是齐次线性方程组的$m$个解，则对于任意的实数$\lambda_i (i=1, 2, \cdots, m)$,

$$\lambda_1(\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)}, \cdots, \bar{x}_n^{(1)})+\lambda_2(\bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_2^{(2)}, \cdots, \bar{x}_n^{(2)})+\cdots+\lambda_m(\bar{x}_1^{(m)}, \bar{x}_2^{(m)}, \cdots, \bar{x}_n^{(m)})=(\lambda_1\bar{x}^{(1)}+\lambda_2\bar{x}_1^{(2)}+\cdots\lambda_m\bar{x}_1^{(m)}, \cdots\lambda_1\bar{x}_n^{(1)}+\lambda_2\bar{x}_n^{(2)}+\cdots+\lambda_m\bar{x}_n^{(m)})$$

也是方程组的解。这样一个数乘之和就叫做*线性组合*。于是，将1.和2.并起来说，即齐次线性方程组解的任何一个线性组合仍是它的一个解。

这些性质对于非齐次方程组并不成立。然而，下述定理表明非齐次方程组的解与相伴齐次方程组的解之间的联系。

如果相伴齐次方程组的一个解加上非齐次方程组的任意一个解，则

结果仍是非齐次方程组的一个解。如果已知非齐次方程组的任意选定的一个解，则非齐次方程组的每一个解都能通过齐次方程组的解加上所选定的解而得到。

消元法求解及高斯算法 对于一个给定的线性方程组，这个方法可用来求得恰好一个解，或者解的整个流形。

此算法特别适用在计算机上，正由于这个原因近年来它获得重视。此方法的基本思想如下：利用1.至3.的运算，将给定的一组n个未知量的m个方程转换成为新的一组n个未知量的m个方程，其中某个未知量，譬如说x_1，仅仅出现在一个方程中，就是说x_1已从另外的$m-1$个方程中消去了。用相同的方法变换这$m-1$个方程，使得另外一个未知量，譬如说x_2，仅仅出现在它们中间的一个方程中。重复这样的过程，最终得到一个方程组，其中x_1只出现在第一个方程中，x_2只出现在第二个方程中，等等。这种方程组是容易解的。

下面一个很简单的例子阐明高斯算法的作用。

【例3】

$$\begin{array}{r|l} 3x_1-3x_2+x_3=0 & (1) \\ 4x_2-x_3=5 & (2) \\ 2x_1-2x_2+x_3=1 & (3) \\ \hline 3x_1-3x_2+x_3=0 & (1') \\ 4x_2-x_3=5 & (2') \\ 1/3x_3=1 & (3') \\ \hline \end{array}$$

方程(2)不包含x_1；x_1只出现在方程(1)和(3)之中。(1)式乘以$-2/3$，然后加到(3)式上产生一组新的方程(1′)，(2′)与(3′)。

因为x_2已不在(3′)式中，就不必消去它了。从(3′)式可见，$\bar{x}_3=3$，然后通过在(2′)式中代入这个值，就可得到值$\bar{x}_2=2$，现在(1′)式就导致$\bar{x}_1=1$。

较难的例子是带有一般系数的4个未知量3个方程的情形。如有必要，通过应用运算3.，可以假定在下边的方程组S中a_{11}不为零。

$$\begin{array}{r|l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 & (1)\ \boxed{S} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 & (2) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3 & (3) \end{array}$$

$$\boxed{S_1}\quad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4&=b_1 &(1')\\ a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+a'_{24}x_4&=b'_2 &(2')\\ a'_{32}x_2+a'_{33}x_3+a'_{34}x_4&=b'_3 &(3')\end{aligned}$$

然后，可以从 S 通过方程(2)和(3)各自减去方程(1)的 a_{21}/a_{11} 以及 a_{31}/a_{11} 倍而得方程组 S_1。这里 $a'_{ij}=a_{ij}-a_{i1}a_{1j}/a_{11}$，而 $b'_i=b_i-a_{i1}b_1/a_{11}$ $(i=2,\ 3;\ j=2,\ 3,\ 4)$。如果(2′)和(3′)的所有系数都为零，而 b'_2 或 b'_3 不是零，则根据前一段的准则，这方程组无解。另一方面，如果 $b'_2=b'_3=0$，则 x_2，x_3 和 x_4 可以任意地选定而 x_1 由方程(1)确定。如果这些情形都不出现，则必要时通过交换(2′)和(3′)，并交换和重新命名未知量，可以整理使得 a'_{22} 不为零。为了避免记号过于复杂，不妨假定方程组 S_1 已是这种情形(读者可参阅后面的例子)。

$$\boxed{S_2}\quad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4&=b_1 &(1'')\\ a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+a'_{24}x_4&=b'_2 &(2'')\\ a''_{33}+a''_{44}x_4&=b''_3 &(3'')\end{aligned}$$

从 S_1 通过由方程(3′)减去方程(2′)的 a'_{33}/a'_{22} 倍而得方程组 S_2。这里，$a''_{3j}=a'_{3j}-a'_{32}a'_{2j}/a'_{22}$，而 $b''_3=b'_3-a'_{32}b'_2/a'_{22}(j=3,\ 4)$。如同前一步那样，如果 $a''_{33}=a''_{44}=0$，有两种情形要区别对待。如果 $b''_3=0$，则 x_3 和 x_4 可以任意地选定而 x_1 和 x_2 由(1″)和(2″)确定。

现在设 $a''_{33}\neq 0$。如果把 x_4 取作任意一个数 d，则 x_3 是由(3″)所确定的，x_2 由(2″)而最终 x_1 由(1″)所确定。对于每一个 d 有一个解，并且所有的解都可以按此方式求得。如果 $a''_{33}=0$ 但 $a''_{34}\neq 0$，则通过交换 x_3 和 x_4 以相同方式得到解。

【例4】 从给定的方程组 S_1，通过前两行交换得到新的方程组 S_2。现在 S_2 中由(2)减去方程(1)的 $0/1=0$ 倍而由(3)减去(1)的 $3/1=3$ 倍。这就产生方程组 S_3。从 S_3 通过交换 x_2 和 x_4 并分别重新命名为 x'_4 和 x'_2 而得 S_4。现在 S_4 中由(3′)减去(2′)的 $-4/4$ 倍，即这两个方程相加，产生 S_5。如果在 S_5 中使 $\bar{x}'_4=\bar{x}_2=d$，则 $\bar{x}_3=2$，$\bar{x}'_2=\bar{x}_4=1$，而 $\bar{x}_1=-7+2d$。于是，S_1 的解集是 $\mathbf{S}=\{(-7+2d,\ d,\ 2,\ 1);\ d\ \text{实数}\}$。

$$\boxed{S_1}\quad \begin{aligned} -x_3+4x_4&=2\\ x_1-2x_2+4x_3+3x_4&=4\\ 3x_1-6x_2+8x_3+5x_4&=0\end{aligned}$$

$$S_2\quad \begin{array}{rl} x_1-2x_2+4x_3+3x_4=4 & (1)\\ -x_3+4x_4=2 & (2)\\ 3x_1-6x_2+8x_3+5x_4=0 & (3)\end{array}$$

$$S_3\quad \begin{array}{r} x_1-2x_2+4x_3+3x_4=4\\ -x_3+4x_4=2\\ -4x_3-4x_4=-12\end{array}$$

$$S_4\quad \begin{array}{rl} x_1+3x_2'+4x_3-2x_4'=4 & (1')\\ 4x_2'-x_3=2 & (2')\\ -4x_2'-4x_3=-12 & (3')\end{array}$$

$$S_5\quad \begin{array}{r} x_1+3x_2'+4x_3-2x_4'=4\\ 4x_2'-x_3=2\\ -5x_3=-10\end{array}$$

【例 5】

$$\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=6\\ 2x_1+x_2-x_3=1\\ 4x_1-x_2+2x_3=8\\ -x_1+x_2+2x_3=7\end{array}\downarrow \qquad\qquad \begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=6\\ 2x_1+x_2-x_3=0\\ 4x_1-x_2+2x_3=8\\ -x_1+x_2+2x_3=7\end{array}\downarrow$$

$$\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=6\\ -x_2-3x_3=-11\\ 13x_3=39\\ 0=0\end{array}\downarrow \qquad\qquad \begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=6\\ -x_2-3x_3=-12\\ 13x_3=39\\ 0=-11/13\end{array}\downarrow$$

两个系数相同但常数项不同的三元四个方程的系统。

应用算法导致下面的两个方程组:

左边方程组有唯一的解 $\bar{x}_3=3$, $\bar{x}_2=2$, 及 $\bar{x}_1=1$, 而右边的方程组却根本无解, 这是由于最后一个方程矛盾。

几何解释 根据解析几何大家知道，2个未知量的线性方程在平面定义一条直线。因为如果把每个解$(\bar{x}, \bar{y})$与坐标为$(\bar{x}, \bar{y})$的点联系起来，则解集的象是一条直线。因此2个未知量的两个方程确定平面上的一对直线，而方程组的解，如果存在的话，则必定是这两条直线的交点。可能出现下列情形(见 I. 图 4.2-2, I. 图 4.2-3)：

(i) 有无限个解从而这两条直线有无限个交点。在这种情况下两条直线重合；其中的一个未知量可以给定任意一个值，另一个则相应地被确定。

(ii) 方程组有唯一解。在这种情况下，两条直线相交于一点。

(iii) 方程组无解。两条直线不相同且平行。

三个未知量x, y, z的方程情形类似。每一个方程定义三维空间中的一张平面。方程组的解还是包含在所有这几张平面中的点。

4.2 行列式

就n个未知量n个方程系统的解法来说，除了高斯算法以外，一定的系数函数，即行列式，起着决定性的作用。这些函数在其他一些数学分支中，例如在多元微积分中同样是很重要的。

*行列式*是一个n^2元函数，通常写成下边这样的正方格式。数a_{ij}就叫做行列式的*元素*。行列式的*第i行*是其第一个下标为i的元素的n元组$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$。*第$j$列*是其第二个下标为$j$的元素的$n$元组$(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})$。行列式的*值*是$\sum(-1)^k a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}$，这里指标$s_1, \cdots, s_n$构成数$1, \cdots, n$的一个置换因而它们互不相同。在$1, \cdots, n$的所有可能的置换上取和，即被加数包含每一行每一列正好有一个元素参加的所有可能的积。因为有$n!$个置换，所以和式有$n!$项。符号$(-1)^k$由置换中的反演数k确定；例如，在积$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$中，置换$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$有$k=3$次反演(即3在1之前，3在2之前，以及4在2之前)，使得符号为-1。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【例1】 计算2×2行列式。置换$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$各自有0和1次反演。

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

【例2】 计算3×3行列式。3个元素的π置换包含k次反演。

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

π	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
k	0	1	1	2	2	3

$D=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$。

2×2和3×3行列式的演算规则，按如下方式容易记住。写出行列式再增补3×3行列式的前两列(见图4.2)。

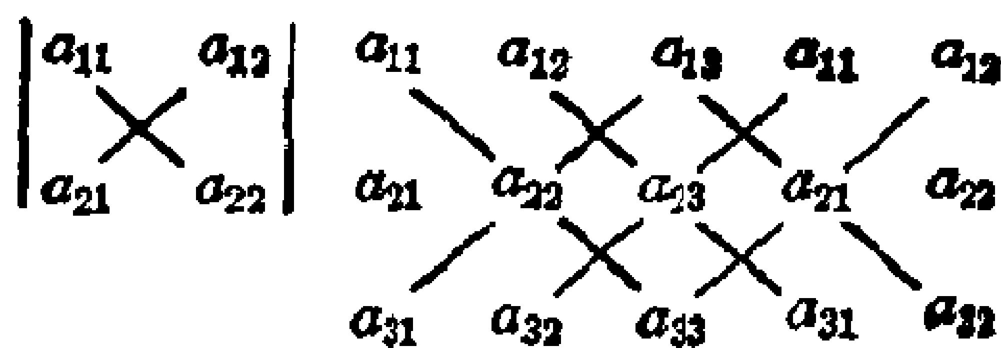


图 4.2

由粗线连接的数相乘再把这些积相加；减去由细线连接的那些数的乘积之和。结果就是行列式的值。对于3×3行列式，这叫做萨拉斯(Sarrus)法则。

行列式的性质 下列命题可由行列式的定义导出：

1. 行列式是各行元素的线性函数。
2. 如果两行交换，则行列式改变符号。
3. 如果行列式中的一行是其他行的线性组合，尤其是，如果一行的元素全为零或两行相同，则这行列式的值为零。
4. 如果对一给定的行加上其他行的线性组合，则行列式的值不变。
5. 如果行转成列，则行列式的值不变。反之亦然。

第一个命题意味着：(i) 同一行所有元素的公因子可取在整个行列式

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

如果只删去第 i 行和第 j 列，则得到一个 $(n-1)\times(n-1)$ 子式。如果这个行列式乘以符号 $(-1)^{i+j}$，则它的值就称做元素 a_{ij} 的**余因式**或**代数余子式**，记作 A_{ij}。

行列式计算　下面的定理表明，余因式在行列式计算中起着重要作用。

定理(行列式按行展开)：每一个行列式 D 可以由任一固定行的元素及其余因式来计算：$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$。

根据命题5.，类似的对于列的命题同样为真。

【例5】　按第二行展开。

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -189$$

于是，展开定理将 $n\times n$ 行列式的演算化成 $(n-1)\times(n-1)$ 行列式的演算。而2行或3行的行列式可以用这个方法直接计算。

这个例子表明，按一个有许多零的行来展开是有利的。常常可利用命题1.与5.获得这样的行。

线性方程组用行列式求解　设 n 个未知量 n 个线性方程的系统，其系数 a_{ij}（按它们在方程组中出现的次序）写为行列式 D 的元素，然后将 D 删去第 j 列而用方程组右边的常数列代入得到的行列式定义为 D_j。只要 D 的值不为零，就可以用行列式 D 和 D_j 来解方程。

克拉默(Cramer)法则　如果 n 个未知量 n 个线性方程系统的系数行列式 D 不为零，则 $x_j = D_j/D$ ($j=1, 2, \cdots, n$) 是这方程组的唯一解。

【例 6】(用消元法求解例 3)：

$$\begin{vmatrix} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12; \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= D_1/D = 1, \\ \bar{x}_2 &= D_2/D = 2, \\ \bar{x}_3 &= D_3/D = 3. \end{aligned}$$

就齐次方程组来说所有的行列式 D_j 必定全为零。因此仅当 D 是 0 时，这样的方程组才有非平凡解。逆命题同样为真。

n 个未知量的 n 个方程的齐次线性方程组当且仅当它的系数行列式为零时，有非平凡解。

4.3 向量空间

引言　“齐次方程”一节表明，一个齐次方程组的解形成这样一些对象的集合，这些对象可以相加或数乘而仍在这个集合内。这些性质的一般化和抽象定义导致向量空间的概念，它是整个线性代数的中心概念。

> **向量空间是这样一些对象或元素的集合，它们可以按通常计算规则成立的那种方式相加或数乘(结果仍是这集合的一个元素)。**

线性代数可以看作向量空间的理论。向量空间的元素称做向量，进行数乘的那些数称做**纯量**。纯量集合可以是有理数、实数或复数，也可以采用其他更一般的结构(域；见 II. 第 3 章)。下面提到的纯量集合总是取为实数。向量空间 V 中的特征规则(x, y, z 是向量空间 V 的元素，即向量，a 和 b 是纯量)叙述如下：

1. **加法结合律**：$(x+y)+z=x+(y+z)$。
2. **加法交换律**：$x+y=y+x$。

3. 零的存在性：V 中存在一个元素 o，使得对于 V 中的所有 x，有 $x+o=x$。

4. 逆的存在性：对于 V 中的每一个 x，V 中存在一个元素 $-x$，使得 $x+(-x)=o$。

5. 乘法结合律：$a(bx)=(ab)x$。

6. 单位律：$1x=x$。

7. 第一分配律：$a(x+y)=ax+ay$。

8. 第二分配律：$(a+b)x=ax+bx$。

每一个这样的集合是一个向量空间，其中定义了元素的加法以及由纯量的乘法，使得结果总是在这集合之内，并且定律1. 至8. 成立。

向量空间的例子 1.所有的多项式函数(有理整函数)的集合构成一个向量空间。如果 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 及 $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ 是多项式函数并且 $n\geqslant m$，则它们的和是 $f(x)+g(x)=a_nx^n+\cdots+a_{m+1}x^{m+1}+(a_m+b_m)x^m+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$。一个实数和一个多项式函数的乘积 $a\cdot f(x)$ 为 $a\cdot f(x)=(aa_n)x^n+\cdots+(aa_1)x+(aa_0)$。现在容易逐一验证定律1. 至8.。零元素 o 为多项式函数 $f(x)=0$。

2. 所有可微函数的集合和所有可积函数的集合也构成向量空间。零元素还是函数 $f(x)=0$。函数相加是它们的值相加，而数乘则是由那一个数乘其值。

3. 实数和复数集合按通常的乘法与加法构成向量空间。

4. 对于每一个自然数 n，实数 a_i 的 n 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的集合构成一个向量空间 R^n。当 $n=2$ 时，它们也称做有序对，当 $n=3$ 时为三元组，而当 $n=4$ 时是四元组。加法定义为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)+(b_1, b_2, \cdots, b_n)=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$，数乘为 $a(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(aa_1, aa_2, \cdots, aa_n)$。

向量代数

向量空间 V_3。 这一段研究一个特别重要的向量空间的性质。它在物理学和工程技术中起重要作用；它阐明了向量空间及线性代数在实际应用中的重要性。向量这个名字首先正是对于这个特定空间的元素而使用的，后来才推广成现在的术语。

从定义了长、宽、高的三维空间出发、先从几何上来描述向量。空间的一个移位就在于每一个点 P 与这样的点 Q 相关联，使得连接点 P 与其

象 Q 的(有向)线段全都平行并且长度相同。这样的一个移位称做*平移*或*向量*。

向量是三维空间的一个移位。

由定义可见，如果已知在某个点 P 上向量的作用，即如果已知与 P 相关联是点 Q，则这个向量就完全确定。因此可以画一条线 $\overrightarrow{PQ}$ 并在 Q 上标一个箭头表示由 P 到 Q，来刻划向量。这样一个有向线段称做向量的一个*表示*。这里 P 称做*起点*或此向量的*实施点*，Q 称做它的*终点*(见图 4.3-1)。

对于每一个点 P 都存在一个以 P 为起点的任何给定向量的表示，而每一个点 Q 也都以一个适当的表示的终点出现。同一向量的不同表示彼此平行，且长度相同。这里将向量 $\boldsymbol{a}$ 的*长度*、*模*或*范数*定义为 $\boldsymbol{a}$ 的任何一个表示的点 P 与 Q 之间的距离。$\boldsymbol{a}$ 的长度记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{PQ}|$。它总是非负的。长度为 1 的向量就称做*单位向量*。

下面提到的向量代数的其他一些概念，大多将通过表示来引进。不过将一个向量等同于单个表示是不妥当的。在这样做的时候，通常就得避免由"向量可按任意方向移动"这类语句所造成的困难。不过，这句话的真正含义是，通过一个向量的一个表示的平行移动得到同一个向量的另一个表示。这就导致如下的命题。

两个向量相等，当且仅当它们的任意两个表示的长度相等，并且方向相同。具有相等长度和相同方向的所有平行线段都是同一个向量的表示(见图 4.3-2)。

为了得到一个向量空间，还必须定义向量的加法与数乘。

向量加法 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和是通过相继执行 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的移位而得的移位 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。和可以按下述方法利用表示来定义：如果 $\overrightarrow{PQ}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在 P

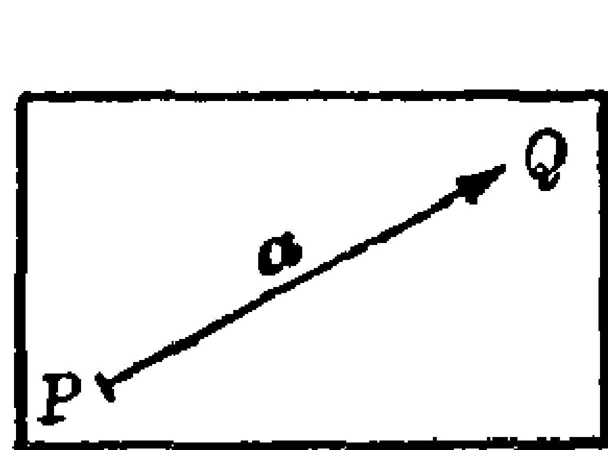


图 4.3-1 向量的表示

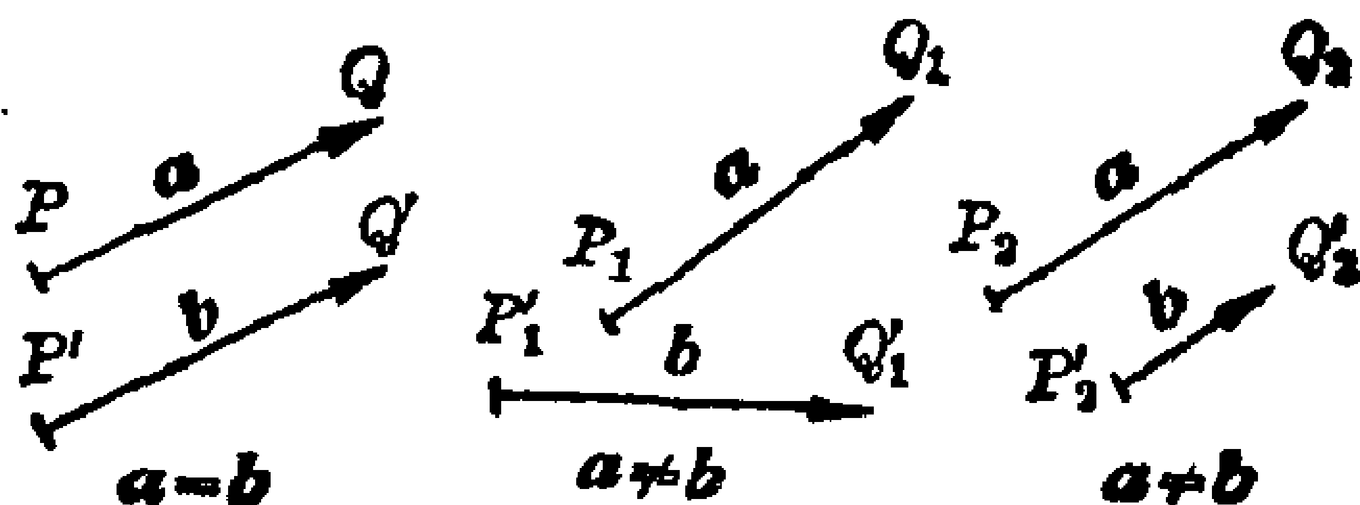


图 4.3-2 向量相等

的表示，而$\overrightarrow{QR}$是$\boldsymbol{b}$在Q的表示，则$\overrightarrow{PR}$是$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的一个表示（见图4.3-3）。显然可见，这定义并不依赖于表示的选择。

如果考虑$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$在P，$\boldsymbol{a}$在Q'和$\boldsymbol{b}$在Q的表示$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PQ'}$，$\overrightarrow{Q'R}$及$\overrightarrow{QR}$，则得到一个平行四边形，它的对角线$\overrightarrow{PR}$既表示$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$又表示$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（见图4.3-4）。所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，从而**加法交换律**成立。同样容易验证**加法结合律**$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（见图4.3-5）。

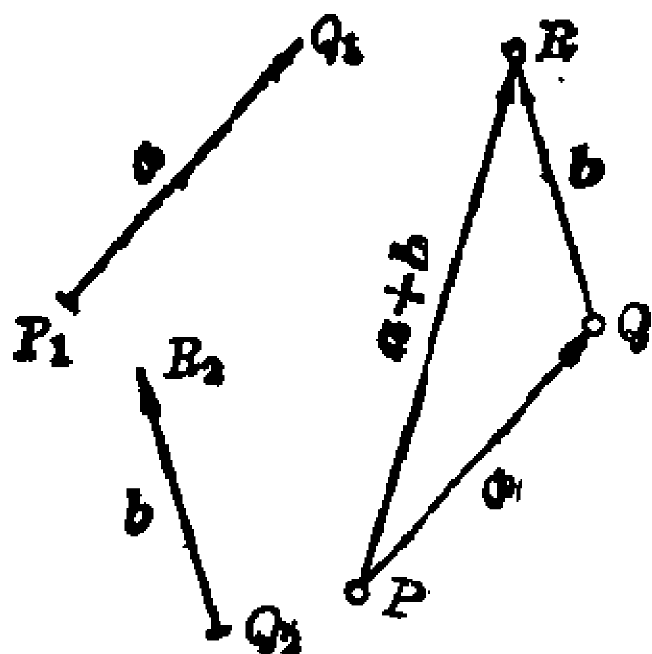


图4.3-3　向量的加法

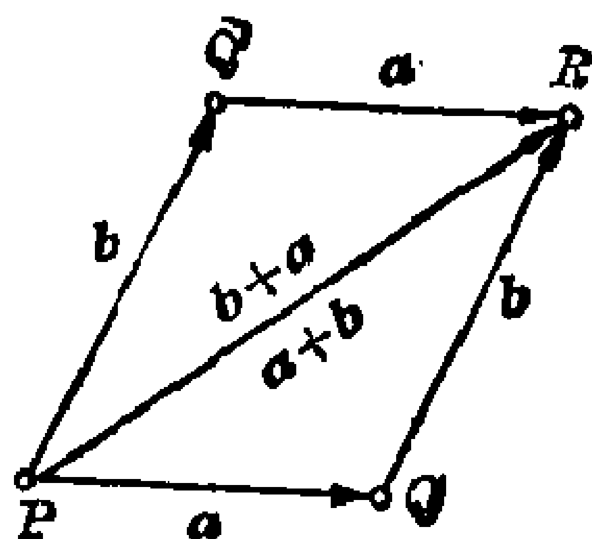


图4.3-4　向量加法的交换律

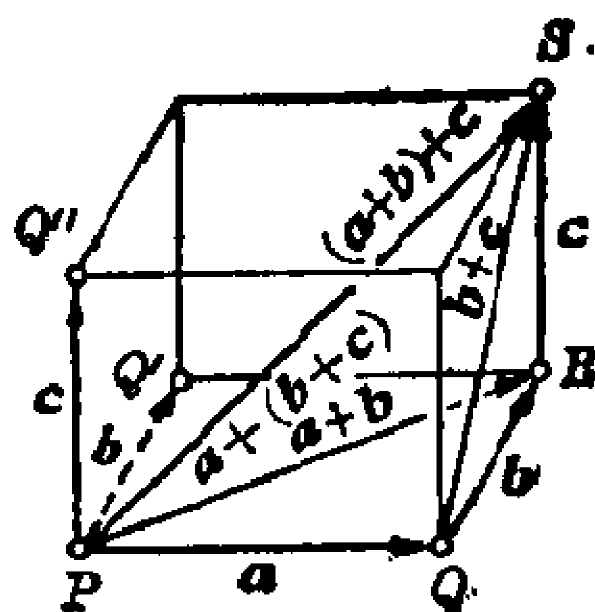


图4.3-5　向量加法的结合律 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

这些定律的有效性还蕴涵着多于两个向量的下列相加规则：

若干个向量可以通过选择一系列表示来相加，选择每一个向量的表示使其终点是下一个向量的表示的起点。和或结果是由第一个表示的起点到最后一个表示的终点这线段所表示的向量。

零向量　点P移位到P自身，即空间的所有点固定不动的这种平移是**零向量**，记作$\boldsymbol{o}$。不可能给它一个特定的方向，因其长度为0。它对于所有向量$\boldsymbol{a}$具有$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$的特殊性质。

减法　利用每一个向量存在唯一的逆这样一个事实，来定义向量的减法。如果$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$，则$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，因此$\boldsymbol{b}$的表示是由$\boldsymbol{a}$的表示的起点与终点交换而得(见图4.3-6)。于是，$-\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$长度相同，但方向相反。特别地，$\boldsymbol{o}=-\boldsymbol{o}$。

现在就将两个向量的差$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$理解为$\boldsymbol{a}$与$-\boldsymbol{b}$的和，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$。

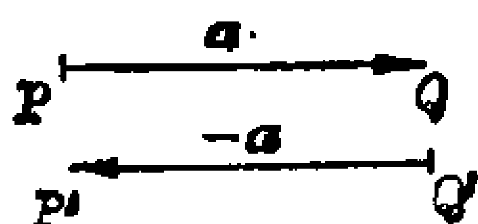


图4.3-6　反向量的表示

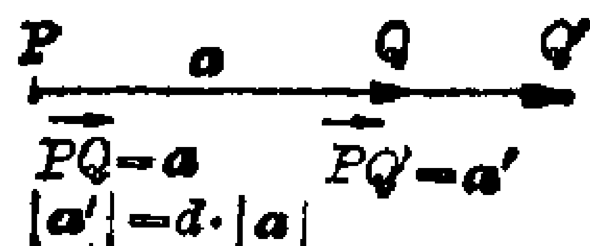


图4.3-7　向量的数乘

向量的数乘 如果点 P,Q 与 $Q'(P\neq Q,P\neq Q')$ 在一条直线上，则 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{PQ'}$ 沿同向或反向是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}'$ 的表示。通常，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}'$ 的长度不同，但有实数 $d>0$，使得 $|\boldsymbol{a}'|=d\cdot|\boldsymbol{a}|$，即 $d=|\boldsymbol{a}'|/|\boldsymbol{a}|$（见图 4.3-7）。

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}'$ 同向，则定义 $\boldsymbol{a}'=d\boldsymbol{a}$，其中 $d=|\boldsymbol{a}'|/|\boldsymbol{a}|$；如果它们反向，则定义 $\boldsymbol{a}'=-d\boldsymbol{a}$。这就导致下述定义，它同样适用于 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ 或 $d=0$ 的情况。向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以实数 d 的积 $d\cdot\boldsymbol{a}$ 是长度为 $d\cdot|\boldsymbol{a}|$ 的向量，如果 $d>0$，则它与 $\boldsymbol{a}$ 同向；如果 $d<0$，则反向。当 $d=0$ 时，定义 $0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$。

特别地，由此可得 $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，对于一切 d 有 $d\cdot\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$，对于自然数 n 有 $n\cdot\boldsymbol{a}=\underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}}_{n\text{ 项}}$。如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$，则向量 $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ 长度为 1，因此是一个单位向量，后面将它记为 $\boldsymbol{a}^0$。于是，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^0$。乘法结合律与两个分配律容易验证。用这个方式，构造了一个由三维空间的平移所组成的向量空间。它记为 V_3。

V_3 中的分量与坐标 为了让几何适应计算方法，引进坐标系，例如有 x 轴、y 轴和 z 轴的正交（笛卡尔）系。向量 $\boldsymbol{a}$ 的表示 $\overrightarrow{PQ}$ 在坐标轴上的垂直投影又是一定的向量的表示。这些向量与表示的选择无关，称做 $\boldsymbol{a}$ 关于给定坐标系的分量 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$，并且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$（见图 4.3-8）。

如果 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 是坐标系的基向量，即它们分别是在 x 轴、y 轴、z 轴正向上的单位向量，则 $\boldsymbol{a}_x=a_x\cdot\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{a}_y=a_y\cdot\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a}_z=a_z\cdot\boldsymbol{k}$。实数 a_x，a_y，a_z 称做 $\boldsymbol{a}$ 关于给定坐标系的坐标。

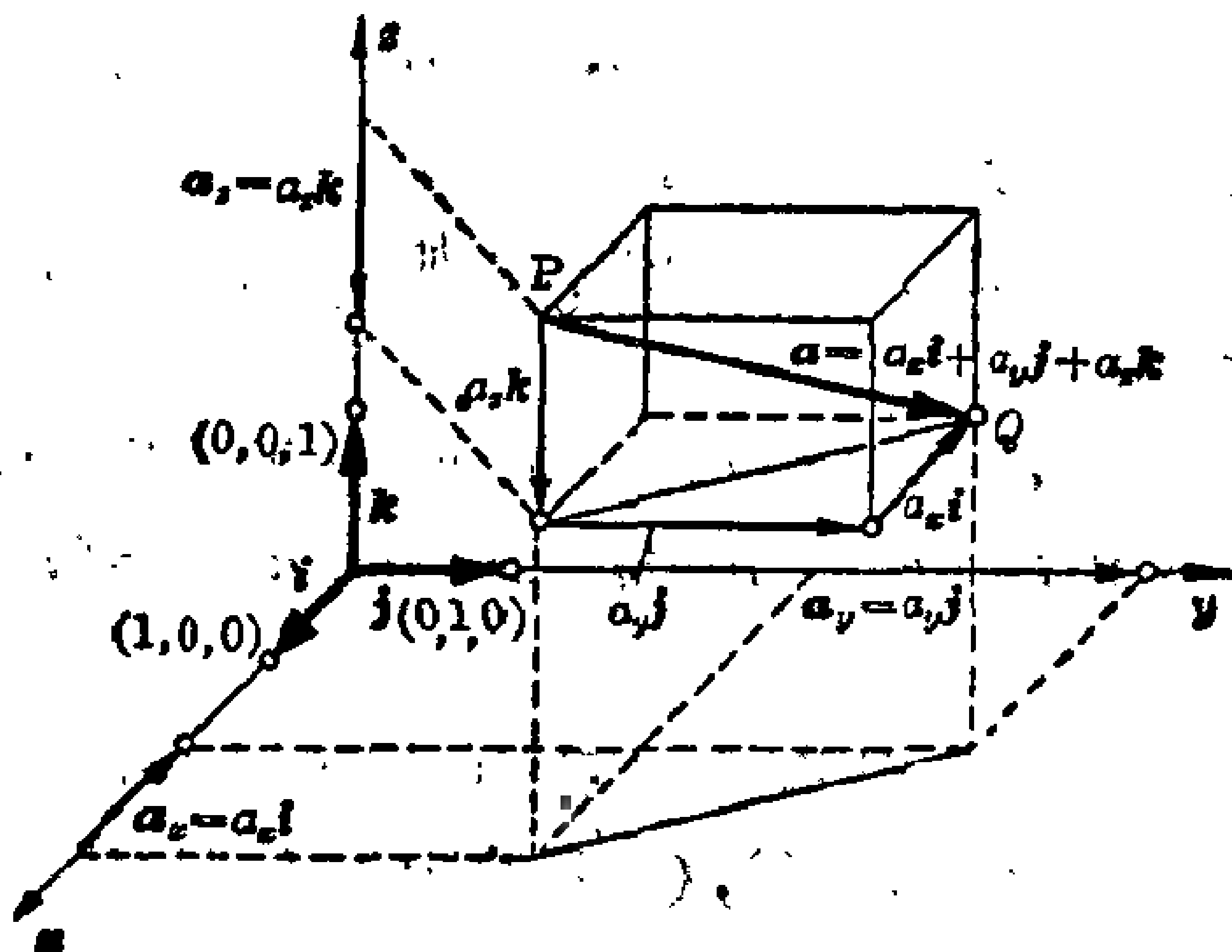


图 4.3-8 向量的分量

$\boldsymbol{a}$ 的分量：$\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}_z$（向量）	$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$
$\boldsymbol{a}$ 的坐标：a_x, a_y, a_z（数）	$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$
坐标为 a_x, a_y, a_z 的 $\boldsymbol{a}$ 的模	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$
用 $\overrightarrow{PQ}$ 表示的向量 $\boldsymbol{a}$ 的分量与模 $P=(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$	$\boldsymbol{a}=(x_1-x_0)\boldsymbol{i}+(y_1-y_0)\boldsymbol{j}+(z_1-z_0)\boldsymbol{k}$ $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$

如果 $\overrightarrow{PQ}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，而 P 与 Q 分别有坐标 (x_0, y_0, z_0) 和 (x_1, y_1, z_1)，则 $\boldsymbol{a}$ 的分量分别是 $(x_1-x_0)\boldsymbol{i}$, $(y_1-y_0)\boldsymbol{j}$ 和 $(z_1-z_0)\boldsymbol{k}$。于是，$\boldsymbol{a}$ 的坐标是 $\boldsymbol{a}$ 的任意一个表示的终点与起点坐标之间的差。

因为每一个向量确定坐标的三元组，另一方面，每一个三元组 (a_1, a_2, a_3) 确定唯一的向量 $\boldsymbol{a}$，其 $a_x=a_1$, $a_y=a_2$ 和 $a_z=a_3$，所以向量空间 V_3 可以等同于实数的三元组的向量空间 $\mathbf{R}^3$。不过为此必须说明，在 V_3 中的加法和数乘相当于 $\mathbf{R}^3$ 中的加法与数乘，换句话说，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $d\cdot\boldsymbol{a}$ 的坐标分别是 $(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$ 与 (da_x, da_y, da_z)。确实，由 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ 可推得，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$ 和 $d\cdot\boldsymbol{a}=(d\cdot a_x)\boldsymbol{i}+(d\cdot a_y)\boldsymbol{j}+(d\cdot a_z)\boldsymbol{k}$。

在第一种情形下需要加法交换律、加法结合律和第二分配律；在第二种情形下需要第一分配律与乘法结合律。所以说，加法与乘法是以分量方式或坐标方式进行的。因为 $-\boldsymbol{a}=-1\boldsymbol{a}$，从而有坐标 $-a_x$, $-a_y$ 和 $-a_z$，所以减法也以分量方式进行。

向量相加（或相减）为它们的坐标相加（或相减）；向量数乘为它的坐标乘以这个纯量。

【例1】 对于 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+(1/2)\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 和 $d=2$，得到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+(5/2)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$; $-\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}-(3/2)\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$；而 $d\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$。

于是，有一个从 V_3 到 $\mathbf{R}^3$ 上的双射（一一到上），它保持加法和数乘。向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 取为三元组 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$，任意向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 成为 (a_x, a_y, a_z)。虽然空间 V_3 定义较为直观，但计算在 $\mathbf{R}^3$ 较为方便，因为它给出了 V_3 中运算一种清晰得多的景象。V_3 和 $\mathbf{R}^3$ 作为向量

空间具有相同的结构，但不同的对象集合。以后并不把它们看作同一个空间(见线性映射)。

V_3中的内积与向量积　在V_3中有两个更自然的运算。其中一个将一对向量与一个纯量联系起来，叫做*内积*或*点积*，因为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的积写成$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。另一个运算产生一个向量，称做*向量积*或*叉积*，因为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的这种积写成$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。内积可以推广到其他向量空间，但向量积不能直接推广。

两种积都有物理上的应用。例如，沿着直线路径$\boldsymbol{s}$移动由力$\boldsymbol{F}$所作的功就是用点积$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$来计算的，而个绕轴旋转体上点$P$的速度$\boldsymbol{v}$就是作为该轴到$P$的半径与角速度的向量积来计算的。

内积　两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$在同一起点P的表示夹成一个角α在$0°$与$180°$之间，而夹成另一个角β在$180°$与$360°$之间，并使$\alpha+\beta=360°$。向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的角$\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$规定为较小的角$\alpha$。

两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的内积或点积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$(读作"$\boldsymbol{a}$点$\boldsymbol{b}$")定义为实数$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$。

交换律$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$成立；说内积是*对称的*。通常，对于三个向量的积，结合律不成立，因为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$是$\boldsymbol{c}$的倍数，而$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$却是$\boldsymbol{a}$的倍数。另一方面，数乘与点积有一个*复合律*。再利用交换律就得到如下的等式：

$$(a\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=a(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=a(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})=(a\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot a\boldsymbol{c})。$$

向量的一种运算，满足这个定律和分配律的，就称做*双线性的*。*分配律*总是成立的：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，如果$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，就叫做*正交的*。如果$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$两者非零，这就意味着$\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$或$\alpha=90°$，换言之，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的表示互相垂直。

点积不可逆转，因为不可能用一种有意义的方式定义唯一的向量$\boldsymbol{a}$，使得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=c$(或使得"$\boldsymbol{a}$是实数$c$与向量$\boldsymbol{b}$的商")。对于给定的$\boldsymbol{b}$和$c$，总是有无限多个向量$\boldsymbol{a}$满足方程$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=c$；例如，若$c=0$，则正交于$\boldsymbol{b}$的向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$的任何倍数都满足上述方程。*不允许向量相除*。

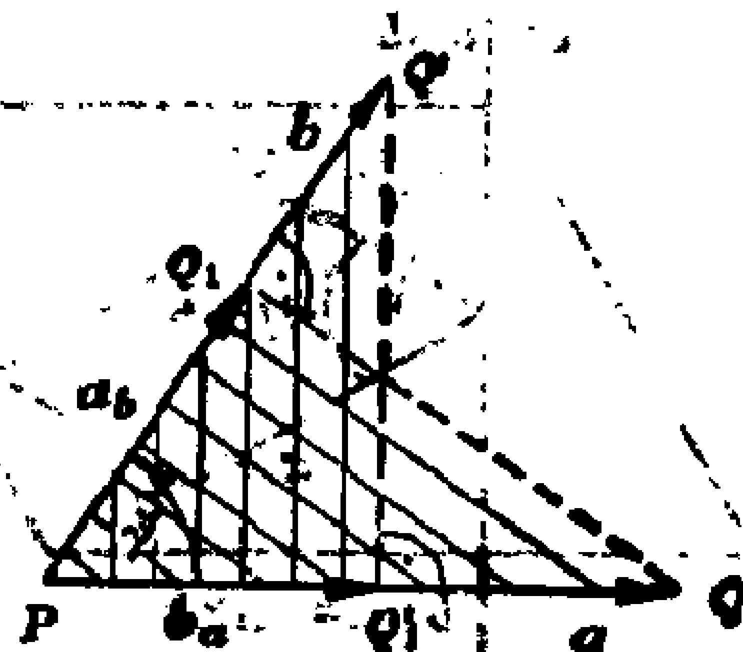


图4.3-9　向量在另一向量上的投影

在点积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$中，向量$\boldsymbol{a}$可用长度为$|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，其方向按$\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$小于或大于$90°$而取与$\boldsymbol{b}$同向或反向的向量$\boldsymbol{a}_b$来代替。通过将$\boldsymbol{a}$的表示垂直投影到有相同起点的$\boldsymbol{b}$的表示所

在直线上可得 $\boldsymbol{a}_b$ 的表示(见图4.3-9)，对于 $\boldsymbol{b}$ 可作同样的代替。于是，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_b\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_a\cdot\boldsymbol{a}$。积 $\boldsymbol{a}_b\cdot\boldsymbol{b}$ 具有所希望的性质，即 $\boldsymbol{a}_b\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}_b|\cdot|\boldsymbol{b}|$，而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\measuredangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$。

依坐标求点积　为了用坐标计算点积，就需要点积 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}$, $\cdots$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$ 的值(以及分配律与结合律)。由定义显而易见，如果两个因子相同，则为1，否则为0。于是可在不知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的情况下用它们的坐标来计算 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的点积，实际上倒是由它们的点积来求得夹角的。

基向量的内积	$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$	$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$
依坐标的内积	$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 角，如果 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|\neq0$	$\cos\measuredangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)}}$	

【例2】由 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，得到 $\cos\measuredangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-1/3$，因此 $\measuredangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\approx109°28'$。

向量积　两个非零向量的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$(读作"$\boldsymbol{a}$ 叉 $\boldsymbol{b}$")定义为向量 $\boldsymbol{c}$，它具有下列性质 1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，即 $\boldsymbol{c}$ 正交于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$。2. $|\boldsymbol{c}|=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\sin\measuredangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 和 3. 由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的坐标构成的行列式 $\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$ 非负。如果 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 是零向量，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 也是零向量。

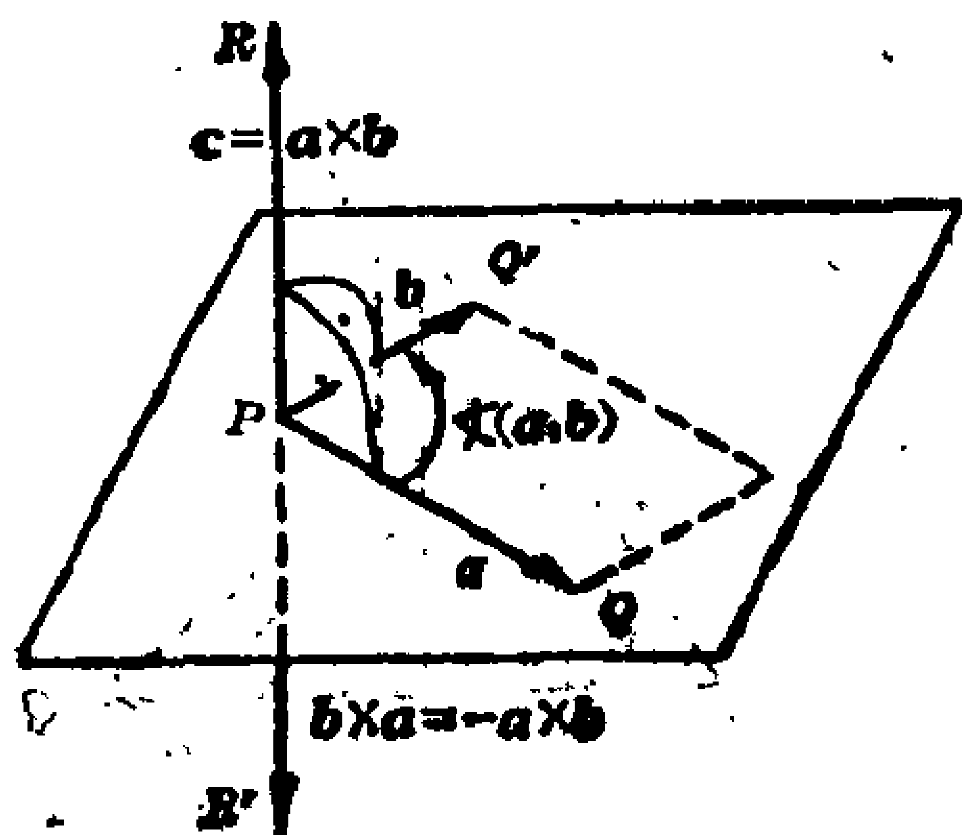


图　4.3-10　向量积

为了对于两个互相不成倍数的非零向量找到向量积的几何解释，考虑由它们各自的表示 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{PQ'}$ 所张成的平面(见图4.3-10)。于是对 $\boldsymbol{c}$ 的表示 $\overrightarrow{PR}$ 上述性质具有如下含意：

1. $\overrightarrow{PR}$ 垂直于由 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{PQ'}$ 所张成的平面。

2. $\overrightarrow{PR}$ 的长度为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\measuredangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，它是以 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{PQ'}$ 为边的平行四边形面积。

3. $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{PR}$ 构成一个右手系。这意味着：从 R 来看，$\overrightarrow{PQ}$ 到 $\overrightarrow{PQ'}$

的那个行程较短的旋转是逆时针的(如果右手的拇指指着 $\overrightarrow{PQ}$ 的方向，食指指着 $\overrightarrow{PQ'}$ 的方向，则掌心朝着 $\overrightarrow{PR}$ 的方向)。

如果 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PR'}$ 分别是向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的表示，则 $\overrightarrow{PR}$ 与 $\overrightarrow{PR'}$ 都垂直于由 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{PQ'}$ 所张成的平面，且有相同的长度。但因为 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{PR}$ 和 $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR'}$ 按给定的次序都构成右手系，所以 $\overrightarrow{PR}$ 与 $\overrightarrow{PR'}$ 必然方向相反。于是，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$。这称为**反交换律**。向量积不成立交换律和结合律，但它是**双线性**的，即如果 a 是一个纯量而 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 是向量，则 $a(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\times a\boldsymbol{y}$ 以及 $\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{z})$ 和 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})$。

依坐标求向量积 定义直接给出基向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 向量积的值。积的双线性使有可能计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标。它们是行列式

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \text{以及} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}。$$

利用下述记忆办法，容易记住。写下 3×3 行列式，其中第一行是 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$，第二和第三行是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的坐标。如果算出行列式的值并将包含 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的项分开，则它们就是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的分量。

基向量的向量积	$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的分量	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-b_ya_z)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$ $=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

【例3】 $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的向量积是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}-11\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}。$$

基与维数 在讨论 V_3 时出现的有些概念，也可用于分析其他的向量空间。例如引进坐标以及用坐标表示运算。然而，某些观念譬如向量积就不能推广。

线性相关与线性无关向量 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是向量空间 V 的一些向量，x 是 V 中的一个向量，如果存在数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$，则称 x 线性相关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，也称 x 依赖于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，或者说 x 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合。例如，V_3 的每一个向量 a 依赖于 $x_1=i, x_2=j, x_3=k$ 这个向量组：$a=a_xi+a_yj+a_zk$。

显然，零向量 o 依赖于任何向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。这只需选择 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$。

如果 x 线性相关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则有数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $a=-1$，使得 $o=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+ax$。另一方面，这个等式并没有说出 x 依赖于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。它的意思是指，如果系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 或 a 中至少有一个不为 0，则相应的向量依赖于其余的向量。这就导致如下的定义。

> 向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，如果有不全为零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $o=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$，则这个向量组就叫做线性相关的。
>
> 如果这个等式仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时才能满足，则该向量组就称做线性无关的。

线性无关的概念特别重要，因为它是方程

$$x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

对于所有依赖于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 x，解为唯一的充分必要条件。换句话说：$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关，当且仅当每一个向量 x 能按一种并且只能按一种方式写成 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合，或者根本不能如此表示。

【例 4】 V_3 的向量 i, j 构成一个线性无关组。因为如果 $o=a_1i+a_2j$，则 $0=o\cdot i=(a_1i+a_2j)\cdot i=a_1$ 并且类似地 $0=a_2$。

用同样的方式可以证明，三个向量 i, j, k 也是线性无关的。还有进一步的性质，即每一个向量依赖于它们：$a=a_xi+a_yj+a_zk$。这就导致下面的定义。

> 向量空间 V 的基是 V 的向量组 B，使得 V 中的每一个向量可用唯一的方式表示成 B 的向量的线性组合。

由此可见，这等价于下述定义：

> 向量空间 V 的基是 V 的一个线性无关向量组 $\boldsymbol{B}$，使得 V 中的每一个向量线性相关于 $\boldsymbol{B}$。

这样，向量组 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 构成 V_3 的一个基。

如果在向量空间 V 中有一个有限基，V 就称做**有限维向量空间**，否则就是**无限维向量空间**。对于有限维向量空间成立下述定理：

如果 V 是有限维向量空间，则任意两个基有相同的元素个数。这元素个数就称做 V 的维数。

V_3 的维数是 3，因为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是一个基。于是，V_3 的每一个基严格包含 3 个元素。

子空间 向量空间 V 的一个非空子集 S，如果同样的加法和数乘满足向量空间公理，则称 S 为 V 的**子空间**。特别地，这意味着 S 的两个元素之和在 S 中，S 的一个元素的任何倍数也在 S 之中。事实上，只需验证这两个性质，其余的性质也就自动成立。

V 的至少包含一个元素的子集 V' 是一个子空间，当且仅当 V' 的任意两个元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 在 V' 之中，V' 的元素 $\boldsymbol{x}$ 的倍数 $a\boldsymbol{x}$ 也全在 V' 之中。

【例 5】 仅仅由 $\boldsymbol{o}$ 组成的集合是每一个向量空间的子空间。每一个向量空间是它自身的子空间。这些都是**平凡子空间**。前一个子空间维数为 0。

【例 6】 如果 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ 是 V 的一个向量，则 $\boldsymbol{x}$ 的所有倍数的集合 V' 是 V 的一个子空间，由 $\boldsymbol{x}$ **张成（或生成）**的子空间。它以 $\boldsymbol{x}$ 为基，维数是 1。

坐标 如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 V 的一个基，则根据定义，每一个向量 $\boldsymbol{x}$ 可用唯一的方式写成 $\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n$。实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 就称做 $\boldsymbol{x}$ 关于给定基的**坐标**。如果基变更，$\boldsymbol{x}$ 的坐标也随着变更，但坐标的个数总是等于 V 的维数。

如果两个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 由关于相同基的坐标给定，则从向量空间公理得出，它们可**按坐标相加**。类似地 $\boldsymbol{x}$ 能**按坐标乘以纯量** c。

$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n$	$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(a_1+b_1)\boldsymbol{x}_1+(a_2+b_2)\boldsymbol{x}_2+\cdots+(a_n+b_n)\boldsymbol{x}_n$
$\boldsymbol{y}=b_1\boldsymbol{x}_1+b_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{x}_n$	$c\boldsymbol{x}=(ca_1)\boldsymbol{x}_1+(ca_2)\boldsymbol{x}_2+\cdots+(ca_n)\boldsymbol{x}_n$

于是，若在n维向量空间V中给定一个基，就可将每一个向量$\boldsymbol{x}$与$\mathbf{R}^n$中的一个n元组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$唯一地联系起来，反之亦然；而且这种联系保持加法与数乘。这样的映射（联系）是V到$\mathbf{R}^n$上的一个**同构**（见线性映射）。不过，在研究任意的向量空间时不宜利用与$\mathbf{R}^n$的这种同构，因为它依赖于V中基的选择；这就引进一个任意性要素，而如果所选的基不适当，许多研究就会相当复杂。

$\mathbf{R}^n$有一个**标准基**，即$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, \cdots, 0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0, \cdots, 0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n=(0, 0, \cdots, 0, 1)$。后面的讨论总是选用它。按照这个基，向量$\boldsymbol{x}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$具有表示$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$。

内积　将V_3的内积加以推广，定义在$\mathbf{R}^n$中的内积或点积为

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \cdots, b_n)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n。$$

为了方便起见，$\boldsymbol{x}$与它自身的点积写作$\boldsymbol{x}^2$。如同在V_3中那样，点积是**对称的**和**双线性的**。

向量$\boldsymbol{x}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的**长度**、**范数**或**模**$|\boldsymbol{x}|$同样由$V_3$的推广来定义：$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\boldsymbol{x}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$。

在V_3中，如果$\overrightarrow{PQ}$表示$\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{QR}$表示$\boldsymbol{b}$，则三角形PQR的第三边$\overrightarrow{PR}$表示$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。这是一个公理，三角形中没有一条边大于其他两边之和，即

$$|\overrightarrow{PR}|\leqslant|\overrightarrow{PQ}|+|\overrightarrow{QR}| \text{或} |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|。$$

因此这就称做**三角形不等式**；可以证明（用归纳法）这对于$\mathbf{R}^n$也成立。还可拓广（用十分容易的归纳法）成这样的形式

$$|\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_m|\leqslant|\boldsymbol{x}_1|+|\boldsymbol{x}_2|+\cdots+|\boldsymbol{x}_m|。$$

三角形不等式同样蕴涵着$||\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}||\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，并且对于点积有$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$。如果用坐标写出，它就成为**柯西-许瓦茨**(Cauchy-Schwarz)**不等式**，有时也称做**布尼雅科夫斯基**(Bunyakovskii)不等式。

在柯西-许瓦茨不等式的证明中，利用点积的双线性与对称性证明$(\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2\pm2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^2$。类似地，可以证明$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2$。

角　在V_3的一节中，对于两个向量之间夹角的余弦用它们的内积找到了一个公式。在$\mathbf{R}^n$中，可用这同一个公式给出角的一个解析定义。两个非零向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$之间的夹角$\measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是0与$\pi$之间这样的一个角，它的余弦满足下边的公式：

$$\cos \measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}。$$

这个条件唯一地确定 $\measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$。如果 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$，按角的这个定义也能称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交。

在 $\mathbf{R}^n$ 的基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中，所有这些向量长度都为 1，任何两个不同的向量正交。这是该基的基本性质。

内积 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 规则	$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}$ $d(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=(d\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot(d\boldsymbol{y})$
$\boldsymbol{x}$ 的范数	$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$
广义三角形不等式	$\|\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_m\|\leqslant\|\boldsymbol{x}_1\|+\cdots+\|\boldsymbol{x}_m\|$
柯西-许瓦茨不等式	$\|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\to(\sum_{i=1}^n a_ib_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2$
$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间夹角	$\cos\measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$, $0\leqslant\measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\leqslant\pi$

欧几里得向量空间 引进内积就给 $\mathbf{R}^n$ 除了通常的向量空间外又加上了一种结构。内积将每对向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 与一个实数 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 联系起来，因此内积可作为满足某些性质的变元 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的一个函数。

在 $\mathbf{R}^n$ 中内积的定义使用了坐标。然而内积概念还可推广到任意的向量空间：

设 V 是一个向量空间，q 是一个函数，它将 V 中的每一对向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 与一个实数关联起来。若下述规则成立，则称 q 是 V 上的内积：

1. $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,
2. $q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})=q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+q(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$,
3. $q(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=aq(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,
4. $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\geqslant 0$，而 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=0$。

装备上这样一个内积的向量空间，叫做欧几里得向量空间。如果不会混淆，函数 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 就记作 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$。

$\mathbf{R}^n$ 上的内积具有这些性质，因此 $\mathbf{R}^n$ 是一个欧几里得向量空间。函数如满足 1. 就称做**对称的**；如满足 2. 和 3. 以及关于第二项 $\boldsymbol{y}$ 的相应定律(对于对称函数这自动成立)，就称做**双线性的**。最后一个性质 4. 称做**非奇异性**；它指出 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 是正定的，即对于所有的 $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$ 只有当 $\boldsymbol{x}=0$ 时才可能。这等价于下面的命题：由 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$ 构成的矩阵非零，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 形成任意一个基。

如果 V 是一个具有给定内积 q 的欧几里得向量空间，则可推广 $\mathbf{R}^n$ 中的定义而定义长度与角。向量 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**、**范数**或**模**为 $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$。$q$ 的性质 4. 表明，任一非零向量长度为正。如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是非零向量，则角 φ 在 0 与 π 之间，满足 $\cos\varphi=\dfrac{q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}$，称做 $\boldsymbol{x}$ **与** $\boldsymbol{y}$ **之间的夹角**。长度为 1 的向量称做**单位向量**。如果 $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为**正交的**(关于 q)。

由基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的性质就联想到如下定义：

欧几里得向量空间的一个基，如果每一个都是单位向量，并且基的任意两个不同的向量正交，则这个基叫做**标准正交基**。

在研究欧几里得向量空间时，通常试图找到一个标准正交基，因为它的性质能简化许多计算(尤其是，内积可以用关于标准正交基的坐标的普通点积公式来计算)。

4.4 线性映射

线性映射的性质 从向量空间 V 到向量空间 V' 的映射 A，如果对

于 V 的任意向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 以及任何一个实数 a，等式 $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A(\boldsymbol{x})+A(\boldsymbol{y})$ 与 $A(a\boldsymbol{x})=aA(\boldsymbol{x})$ 成立，则称 A 为线性映射。这意味着，不论先在 V 的向量上执行演算，然后再将映射作用于演算所得的结果，还是先将映射作用于向量，然后再以其在 V' 中的象执行相应的演算，都不要紧。在两种情形下，最终结果将是相同的向量。换句话说，这些等式表达了映射与 V 和 V' 中基本的向量空间运算的协调性。映射 A 有时用箭头表达为 $A:V\to V'$ 或者 $\boldsymbol{x}\mapsto A(\boldsymbol{x})$。这里，唯一确定的向量 $A(\boldsymbol{x})$ 称做 $\boldsymbol{x}$ 的象，而 $\boldsymbol{x}$ 是 $A(\boldsymbol{x})$ 的原象或逆象。V' 中的一个向量可以没有原象、有一个原象或多于一个原象(见 I. 第 5 章)。

【例 1】 如果平面绕点 o 转过角 φ(见图 4.4-1)，则每一类长度相同的平行有向线段成为另一这样的类。旋转诱导出向量的一个映射 A，将 $\boldsymbol{x}$ 的象定义为 $\boldsymbol{x}$ 的表示所成的类旋转之后得出的类相关联的那个向量。图 4.4-2 对于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 以及 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 的旋转表明 A 是线性的，因为由 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 给出的平行四边形是作为一个整体旋转的。等式 $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A(\boldsymbol{x})+A(\boldsymbol{y})$ 成立。由旋转保持长度不变这个事实，立即得出关系 $A(a\boldsymbol{x})=aA(\boldsymbol{x})$。

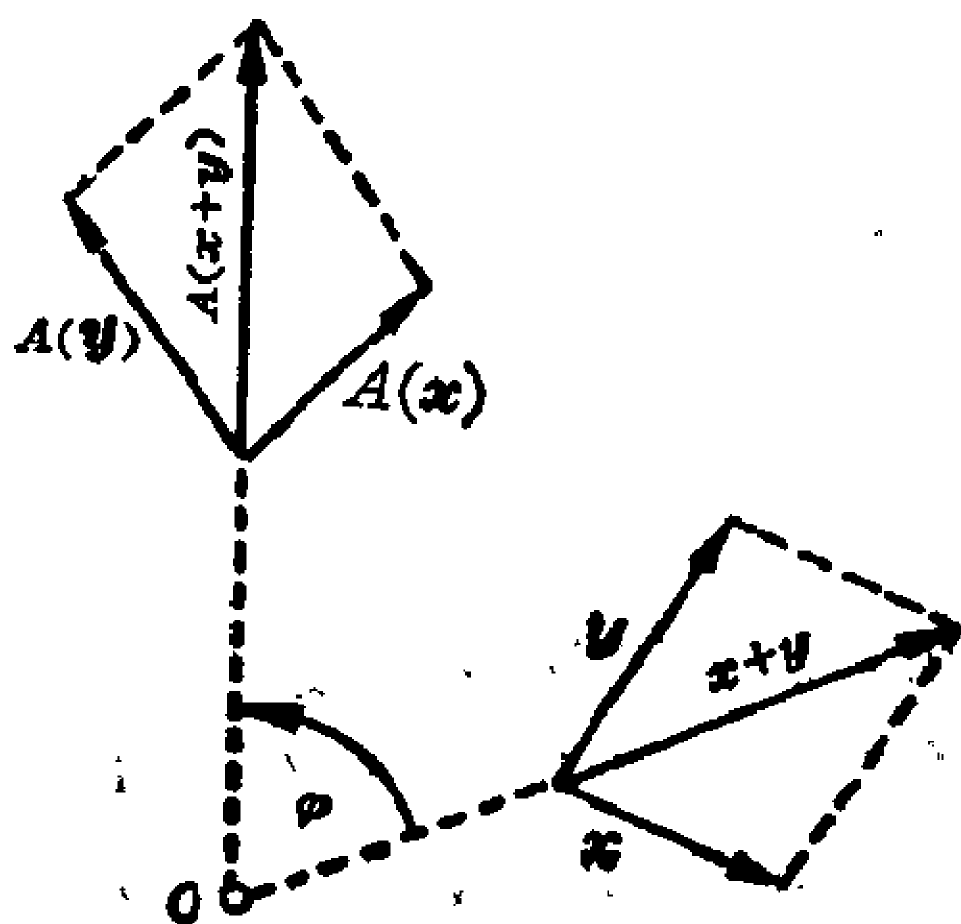


图 4.4-1 平面绕固定点 o 转过角 φ 的旋转

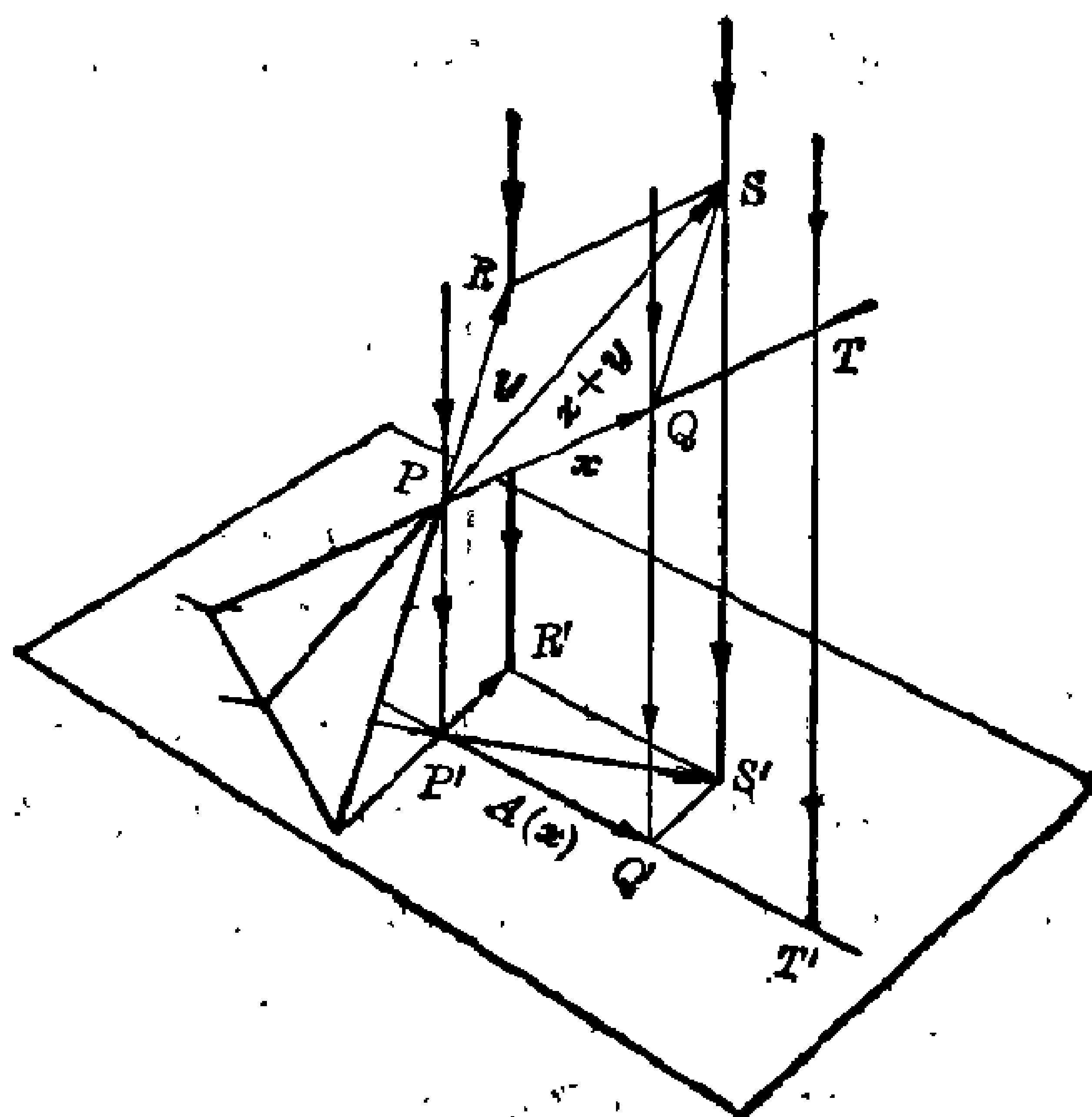


图 4.4-2 三维空间到平面上的平行投影，以及平行投影的线性性质 $\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{PR}=\boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{PS}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{PT}=a\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{P'Q'}=A(\boldsymbol{x})$, $\overrightarrow{P'R'}=A(\boldsymbol{y})$, $\overrightarrow{P'S'}=A(\boldsymbol{x})+A(\boldsymbol{y})$; $\overrightarrow{P'T'}=aA(\boldsymbol{x})$

【例 2】 同样，三维空间到平面上的任何一个平行投影，也给出相应的向量空间的一个线性映射(图 4.4-2)。 等式 $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A(\boldsymbol{x})+A(\boldsymbol{y})$ 成立，因为定义和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 的平行四边形映成定义 $A(\boldsymbol{x})+A(\boldsymbol{y})$ 的平行四边形。由比例 $|PQ|:|PT|=|P'Q'|:|P'T'|$ 得出等式 $A(a\boldsymbol{x})=aA(\boldsymbol{x})$。

线性映射的核与象　就 V 到 V' 的每个映射 A，分别有 V 和 V' 的两个特别的子空间，称为它的核与它的象。A 的核是由被 A 映成 V' 的零向量的所有那些向量组成的 V 的子空间。A 的象是由 V' 的作为 V 中向量的象的所有那些向量组成的 V' 的子空间。在例 2 中，A 的象是空间投影其上的那张平面，而核是三维空间中平行于投影方向的那些向量(当然其投影是零向量)的集合。 如果 V 是有限维的，而 A 是从 V 到 V' 的线性映射，则 A 的核与象两者也是有限维的。 核的维数称做 A 的*零度*，象的维数称做 A 的*秩*。线性映射的一个重要定理指出：

A 的零度 $+A$ 的秩 $=V$ 的维数。

由这个定理可见，A 的象的维数至多等于 V 的维数。零度衡量 A 与一一映射差异的程度。如果零度是 0，则 A 就是一一映射。

【例 3】 线性方程组的下边定义一个从向量空间 $\mathbf{R}^n$ 到向量空间 $\mathbf{R}^m$ 的线性映射 A，对每一个 n 元组 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，作为它的象是如下的 m 元组：

$$\begin{array}{|l|}\hline a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ \hline\end{array}$$

$A(x)=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n)$。容易验证，这个映射确实是线性的。现在可以用下述方式来解释方程组的求解问题：给定 $\mathbf{R}^m$ 的一个向量(或 m 元组) $(b_1, \cdots, b_m)$，要找 $\mathbf{R}^n$ 中被 A 映成 $(b_1, \cdots, b_m)$ 的所有向量(n 元组)。相伴齐次方程组是求被 A 映成 $(0, \cdots, 0)$ 的那些向量。*齐次方程组解的向量空间是 A 的核*。如果 A 的零度是 0，那末齐次方程组只有平凡解，从而非齐次方程组至多有一个解，因为 A 是一一映射的。A 的象是那些使方程组有解的向量 $(b_1, \cdots, b_m)$ 的集合。 A 的秩可以根据方程的系数来计算(见矩阵的秩)。

从向量空间 V 到向量空间 V' 上的一一线性映射在线性代数中起着

重要作用。这样的映射叫做**同构**。如果 A 是从 V 到 V' 的一个同构，那末逆映射是从 V' 到 V 的一个同构。空间 V 与 V' 称为同构的，用符号记成 $V\cong V'$。同构的向量空间具有相同的代数性质。同构是向量空间上的一个等价关系，即它是自反的、对称的和传递的。

线性映射的例子：【例 4】 在任何一个向量空间上，取每一个向量为其自身的恒等映射 I，是线性的且确是一个同构。

$I(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=I(\boldsymbol{x})+I(\boldsymbol{y})$ 以及 $I(a\boldsymbol{x})=a\cdot\boldsymbol{x}=a\cdot I(\boldsymbol{x})$。

【例 5】 如果 V 是具有基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的 n 维空间，那末从 V 到 $\mathbf{R}^n$ 的坐标映射 Φ，将向量 $\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$ 取其关于给定基的坐标 n 元组 $(a_1, \cdots, a_n)$。映射 Φ 是线性的、一对一的，并且每个实数 n 元组是 V 中向量的象。所以 Φ 是一个同构，因此：**每一个 n 维向量空间是与 $\mathbf{R}^n$ 同构的**。

线性映射的意义 因为线性映射是与向量空间中的运算相协调的，所以能将一个代数局势或代数问题从一个空间转移到另一个空间。其中特别重要是同构，因为向量空间的子集的代数性质，诸如线性相关与线性无关或维数，这些都是不变的。任何一个只包含这些概念的定理，一旦对于 V 证明成立，则在这些映射下，对于所有与 V 同构的空间都为真。特别可利用 n 维空间与 $\mathbf{R}^n$ 的同构。

坐标映射将向量之间的关系转换成含有实数即这些向量的系数的方程。然而，坐标映射本质上依赖于基的选择，因此不同方程组可能反映同一组关系。从这个观点来看，线性映射是很重要的，因为它们描述一组坐标与另一组坐标之间的关系。

线性映射的运算 值得注意的是，从向量空间 V 到另一个 V' 的线性映射的集合自身可以按自然的途径作成一个向量空间。如果 A 与 B 是从 V 到 V' 的线性映射，它们的和 $A+B$ 定义为对于 V 的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $(A+B)(\boldsymbol{x})=A(\boldsymbol{x})+B(\boldsymbol{x})$。类似地，数乘 $a\cdot A$ 定义为 $(a\cdot A)(\boldsymbol{x})=a\cdot A(\boldsymbol{x})$。容易验证，$A+B$ 与 $a\cdot A$ 又是线性的，从而向量空间的特征性质成立。如果 V 与 V' 的维数分别是 m 与 n，那末从 V 到 V' 的线性映射的向量空间其维数是 $m\cdot n$。

两个映射的积定义为相继进行映射的结果。为使其有意义，第一个映射必须在第二个映射的象上有定义；换句话说，如果 B 是从 V 到 V' 的一个线性映射，而 A 是从 V' 到向量空间 V'' 的一个线性映射，那末通过

将 B 作用于 V 的向量，然后 A 作用于此结果，得到映射 $A\cdot B$。于是，$A\cdot B$ 是从 V 到 V'' 的一个线性映射(见图4.4-3)。

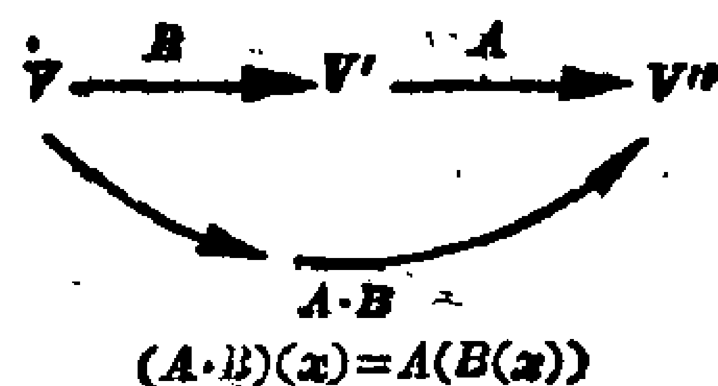


图4.4-3 两个线性映射的乘积 $A\cdot B$

一般来说，定义了 $A\cdot B$ 这个事实并不意味着 $B\cdot A$ 也被定义了。即使两者都定义，它们也不一定相等(见图4.4-4)。因此，**映射的乘法是不可交换的。然而乘法是可结合的，并且分配律也成立：**

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \text{ 以及 } (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C。$$

特殊的线性映射　在研究向量空间 V 的结构时，特别感兴趣的是 V 到它自身上的线性映射。这些映射称做 V 上的*线性算子*或*线性变换*。n 维向量空间 V 的线性变换构成一个 n^2 维的向量空间。而且，对于同一空间 V 的两个线性变换 A 与 B，积 $A\cdot B$ 与 $B\cdot A$ 存在的条件总满足。因此在 V 的线性变换集合上还定义了一个（非交换）乘法。变换的一个例子是空间 V 上的恒等映射 I，它叫做*恒等变换*。这个变换是 V 到它自身上的一个同构。V 到它自身上同构的线性变换称做*正则的*(或*非奇异的*)；如果一个线性变换不是一个同构，它就称做*奇异的*。正则变换具有这样的性质，一个基的象又是一个基。它们也可以用下述方式来刻划：*线性变换 A 是正则的，当且仅当存在线性变换 B，使得 $A\cdot B=B\cdot A=I$*。在

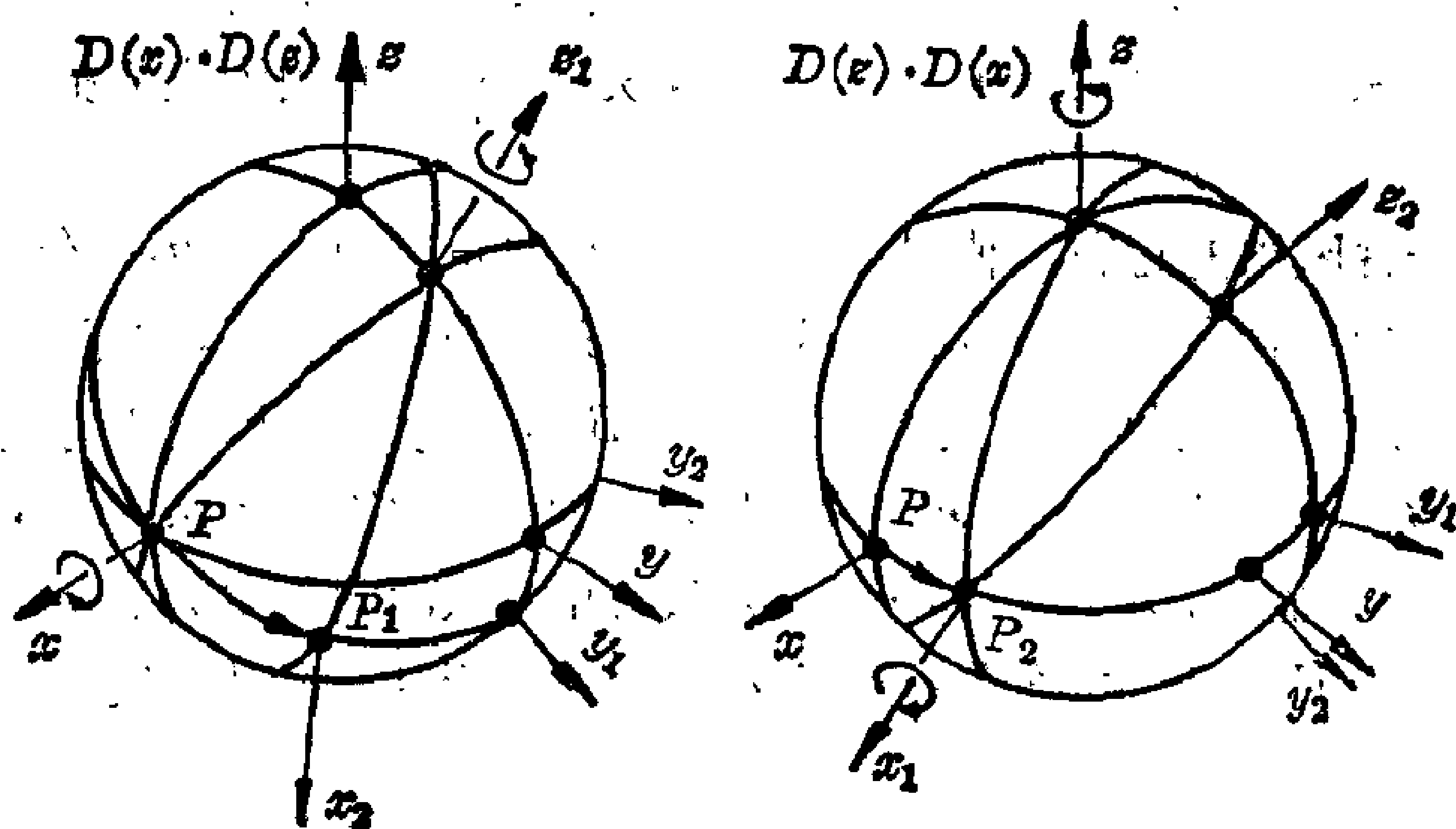


图4.4-4 球绕 x 轴旋转($D(x)$)和绕 z 轴旋转 ($D(z)$)；$D(x)\cdot D(z)$ 将 P 点转到点 P_1；另一方面，$D(z)\cdot D(x)$ 将点 P 转到点 P_2，它不同于 P_1

这种情形下 B 是唯一确定的；它称做 A 的*逆变换*，记为 A^{-1}。于是，A^{-1} 是与 A 的作用相反的变换。例如，$I^{-1}=I$。正则变换的例子是平面绕原点的旋转。那末逆变换是在相反方向转相同角度的旋转。同样地，绕通过原点的一个轴的旋转是三维空间 V_3 的正则线性变换。

一般说来，即使 A 与 B 是正则的，变换 $A+B$ 也不一定是正则的。另一方面，两个正则变换的积 $A\cdot B$ 或 $B\cdot A$ 总是正则的。$A\cdot B$ 的逆变换是 $B^{-1}\cdot A^{-1}$。因此正则变换集合在乘法下具有类似于非零实数集的那些性质（除了交换律 $A\cdot B=B\cdot A$ 不满足以外）。恒等变换起着数 1 同样的作用，因为对于任何一个变换 A 有 $A\cdot I=I\cdot A=A$。在抽象代数中，具有这些性质的集合叫做群（见 II. 第 3 章）。正则变换集合称做 V 上的*一般线性群*，记为 $GL(V)$。

如果向量空间是欧几里得空间，可将每一个线性变换 A 关联到第二个变换 A^*，它由这样的条件唯一确定，即对于 V 中的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$，成立 $A(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot A^*(\boldsymbol{y})$。这个 A^* 就称做 A 的*伴随变换*。对于伴随变换，下列规则成立：

$$(A+B)^*=A^*+B^*,\ (A\cdot B)^*=B^*\cdot A^*,\ (a\cdot A)^*=a\cdot A^*,\ (A^*)^*=A。$$

其中特别重要的是*自伴变换*或*对称变换*。它们的特征是具有性质 $A^*=A$。这些变换经常出现在物理问题中，并在某些方面具有非常简单的结构。对于无限维复向量空间，类似的变换，即所谓的*埃尔米特*（Hermite）*变换*，在量子力学中起着重要作用。对称变换的平凡例子是恒等变换的倍数 $a\cdot I$。

在欧几里得向量空间 V 中，内积可以用来定义向量的长度以及它们之间的夹角。于是，在研究这样的空间时，与 V 的这些附加性质相协调的线性变换就格外有用。这样的变换称做*正交变换*。V 上的一个线性变换 A，如果它使内积保持不变，即若对于 V 的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$，有 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=A(\boldsymbol{x})\cdot A(\boldsymbol{y})$，那末变换 A 是正交的。正交变换保持向量的长度以及它们之间的夹角不变。平面以及三维空间的旋转又是正交变换的例子；它们显然保持长度与夹角不变。正交变换可用下述方式来刻划：*一个线性变换是正交的，当且仅当一个标准正交基的象又是一个标准正交基*。下面的描述较为简短并且代数上更明了：一个线性变换是正交的，当且仅当 $A^*=A^{-1}$。因为依照这个定义，每一个正交变换有逆，所以正交变换是正则的。正交变换的逆是正交的，两个正交变换的积也是正交的；正交变换

集合构成一个群。这称做 V 上的**正交群**。V_3 的所有正交变换可作为旋转或者旋转与平面反射的乘积而得到。一个旋转由垂直于该轴的平面内诱导出的旋转所完全确定。这个事实可以用来找出表示 V_3 上正交变换的特定矩阵。

4.5 矩阵

线性方程组解集的性质，实质上依赖于方程组的系数 a_{ij}。这些系数按其 m 行与 n 列的长方形阵列叫做 $m\times n$ **矩阵** $\boldsymbol{A}$（读作"m 乘 n 矩阵"）。在这样一个阵列中的数称做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**。带有相同的第一个下标 i 的元素的 n 元组称做**第 i 行**，而带有相同的第二个下标 j 的元素的 m 元组称做矩阵的**第 j 列**。

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m\times n$ 矩阵有 m 行和 n 列。如果 $m=n$，这阵就称做**方阵**。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的记号常常缩写为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，有时写为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m,n}$，用以指出行与列的数目。

矩阵运算　同型的矩阵（即相同行数与列数）可以相加。两个矩阵的和定义为一个矩阵，它的元素就是原来矩阵相应元素之和。矩阵乘以一个实数，就是用那个实数乘上每一个元素。

同型矩阵的加法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵乘以实数

$$c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

【例 1】

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}-4 & -2 & 4\\ -6 & 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -4 & 4\\ -7 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

对于 $m\times n$ 矩阵的加法以及数乘，通常的规则都成立。

$m\times n$ 矩阵的集合构成一个 mn 维的向量空间。

这个空间的零向量是零矩阵，它的元素全为零。

矩阵并不是总能相乘的。$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘 $r\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的积 $\boldsymbol{AB}$，只有当 $n=r$ 时才有定义。在这种情况下，乘积是一个 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中的元素以下述方式定义：

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}。$$

元素 c_{ij} 可解释为 A 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的内积。

【例 2】

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+(-1)\cdot2 & 1\cdot1+(-1)\cdot0 & 1\cdot0+(-1)\cdot(-1)\\ 2\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

一般地说，乘积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 的存在并不蕴涵着 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ 也有定义，而且即使两者都有定义，正如下面的演算所表明，它们也不一定相等：

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}，但\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}。$$

跟线性映射的乘法一样，矩阵的乘法不能交换。除了这一点以外，通常的规则（诸如结合律与分配律）对于矩阵的乘法都成立。

矩阵乘法	可行性条件: $n=r$	规则
$A=(a_{ij})_{m,n}$ $B=(b_{ij})_{r,s}$	$(a_{ij})_{m,n}\cdot(b_{ij})_{r,s}=(c_{ij})_{m,s}$,其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$	$(AB)C=A(BC)$ $A(B+C)=AB+AC$ $(A+B)C=AC+BC$

相同大小的方阵总是可以相乘的。有一个特殊的 $n\times n$ 阵,即**单位阵**或**恒等阵** $\boldsymbol{I}$,它在左乘或右乘法下,保持任何一个 $n\times n$ 阵不变: $I\cdot A=A\cdot I=A$。

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}。$$

于是 $n\times n$ 阵的集合具有类似于向量空间的变换集合的那些性质。类似于正则变换的定义,方阵 A,如果存在(必定是方阵)阵 B,使得 $AB=BA=I$,则称它为**正则的**(或**非奇异的**);否则,A 是**奇异的**。阵 B 是唯一确定的,称为 A 的**逆阵**,记成 A^{-1}。演算逆阵的规则放在下面讨论。

【例 3】

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\text{的逆阵是 }A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/3\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix},\text{因为}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/3 & -1/3\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}。$$

同线性变换一样,正则阵的逆与乘积是正则的,且成立等式 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 和 $(A^{-1})^{-1}=A$。

所有 $n\times n$ 正则阵的集在矩阵乘法下为一个群。它称做 n 次一般线性群,记为 $\mathrm{GL}(n)$。它也同构于,但概念上却不同于群 $\mathrm{GL}(V)$。

对每一个 $m\times n$ 矩阵,都可关联一个 $n\times m$ 矩阵 A^T,即 A 的**转置阵**。它由 A 交换行与列而得。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\to A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{m1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

对于方阵,这个过程容易具体化为按主对角线(即从左上方到右下方的对角线)的反射。

【例4】

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&-1\\2&1&2\end{pmatrix};\quad A_1^T=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

【例5】

$$A_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&2\end{pmatrix};\quad A_2^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

矩阵转置的规则,类似于线性变换相伴的那些规则。$(A+B)^T=A^T+B^T$; $(aA)^T=a\cdot A^T$; $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$; $(A^T)^T=A$。

如果 A 是一个正则阵,那末 A^T 亦然,而且 A^T 的逆是 A^{-1} 的转置:$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$。阵 $(A^T)^{-1}$ 称做 A 的逆步阵。

矩阵的行列式,逆阵计算　每一个方阵 A,关联着一个实数,即 A 的行列式(见行列式)。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad \det A=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

矩阵乘法与行列式之间有一种值得注意的联系,即乘积定理。

乘积定理	$\det(A\cdot B)=(\det A)\cdot(\det B)$

当 I 是单位阵时,由行列式的计算规则立刻给出 $\det I=1$。由此可见,如果 A 是正则的,那末 $(\det A)(\det A^{-1})=1$。因此正则阵的行列式非零。逆命题亦真。如果矩阵的行列式非零,那末 A 是正则的。这由 A^{-1} 的演算公式显然得出。

阵 A 的逆 A^{-1}	$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix};A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{n1}\\\vdots&&\vdots\\A_{1n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$ A_{ij} 是 A 中 a_{ij} 的余因子

【例6】

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&1\\-2&0&1\end{pmatrix};A^{-1}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}-1&0&2\\-4&5&3\\-2&0&1\end{pmatrix};$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\-2&1\end{vmatrix}=-4$$

在右边的矩阵中，譬如说数 $-4=A_{12}$ 是 A 中 $a_{12}=0$ 的余因子。

【例 7】 2×2 正则阵的逆阵计算

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix};A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}。$$

除了用余因子找逆阵的这个方法以外，还可通过解适当的方程组来找逆阵。将 A^{-1}的元素看作矩阵方程（$AA^{-1}=I$）中的未知量而得出方程：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1n}\\\vdots&&\vdots\\x_{n1}&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&1\end{pmatrix}。$$

左边的两阵相乘之后，得到 n^2 个线性方程，以此来确定 n^2 个未知量 x_{ij}。根据克拉默法则，这些方程的解给出上述对于 A^{-1} 的余因子公式。

还可由考虑 $2n$ 个变元 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ 的 n 个方程系统来计算逆阵 A^{-1}：

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n&=y_1 & x_1&=b_{11}y_1+\cdots+b_{1n}y_n\\&\vdots&&\vdots\\a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n&=y_n & x_n&=b_{n1}y_1+\cdots+b_{nn}y_n。\end{aligned}$$

这个方程组可以用克拉默法则或用高斯算法来解：

右边的系数阵 $B=(b_{ij})$则是 A 的逆阵。这个方法要求较少的方程。

用矩阵表示线性映射

矩阵的运算显示出与线性映射的运算有值得注意的相似之处。不仅比较简单的加法与数乘确实相似，而且线性映射和矩阵它们自身的乘法，尤其是积、逆等等的存在条件也都确实相似。这些相似之处，早已为相似的术语所强调了，这也决非偶然。实际上，矩阵的重要性很大程度上就在于这样一个事实，即它们可被用来在数值上描述线性映射。这一方面包括用矩阵描述线性方程组。从 n 维向量空间 V 到 m 维向量空间 V' 的线性映射 A，可以用 $m\times n$ 矩阵表示如下：如果 $x_1, \cdots, x_n$ 与 $y_1, \cdots, y_m$ 分

别是 V 和 V' 的基，那末 $x_1, \cdots, x_n$ 的象可由基 $y_1, \cdots, y_m$ 来表达：

$$\begin{matrix} A(x_1)=a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A(x_n)=a_{1n}y+\cdots+a_{mn}y_m \end{matrix} \quad \text{或} \quad A(x_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i,\ j=1, \cdots, n。$$

现在，线性映射 A 由基向量 $x_1, \cdots, x_n$ 的象 $A(x_j)$ 完全确定；对于 V 的任意一个向量 $x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ 则有象 $A(x)=A(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)=a_1A(x_1)+\cdots+a_nA(x_n)$。于是，线性映射由 $m\cdot n$ 个数 a_{ij} 完全表征。

作为表示 A 的矩阵，用上述系数矩阵的转置更加方便。

$$A \to \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}。$$

$\boldsymbol{A}$ 的第 j 列就是 $A(x_j)$ 关于基 $y_1, \cdots, y_m$ 的一组坐标。要记住，表示 A 的矩阵的选择依赖于 V 与 V' 中基的选择。

如果 V 与 V' 的基固定，那末线性映射与矩阵之间的对应具有下边的性质：

如果 $A \to \boldsymbol{A}$ 并且 $B \to \boldsymbol{B}$，那末 $A+B \to \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $a\cdot A \to a\cdot \boldsymbol{A}$。

在相同的条件下，每一个线性映射有唯一的 $m\times n$ 矩阵与它相关联，反之亦然。这些命题概括成下面的定理：

V 到 V' 线性映射的向量空间与 $m\times n$ 矩阵的向量空间同构。

对于乘法出现类似的事实。如果 A 是从 V' 到 V'' 的线性映射，B 是从 V 到 V' 的线性映射，那末选定 V 和 V'' V' 的基后，就有矩阵与 A 和 B 相关联，可以证明：

如果 $A \to \boldsymbol{A}$ 并且 $B \to \boldsymbol{B}$，那末 $A\cdot B \to \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$。

用矩阵表示线性映射完全类似于用关于基的 n 元组表示向量。线性映射的坐标只是以特殊的方式排列成一个矩阵。运算方面的相似之处现在作为下面这个事实的推论出现，即矩阵运算是相应于它们所表示的线性映射的运算而定义的。

如果从 V 到 V' 的线性映射用关于 V 和 V' 的固定基的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 来表示，那末向量方程 $A(x)=x_0$ 可以解出。这里是要找到 V 中由 A 映成 V' 中给定向量 x_0 的所有向量 x。

如果 $b_1, \cdots, b_n$ 是 V' 中 x_0 的系数，那末找向量 x 的坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 的问题就是解方程组的问题。

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}。$$

这表明由线性映射所给出的方程与线性方程组之间的联系。如果方程组写成矩阵形式，就变得很明了，即它只不过是按坐标表示的向量方程 $A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}_0$。

这里，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}_0$ 的坐标写成列矩阵形式。

线性变换的表示　为了将一个矩阵与 n 维向量空间的一个线性变换关联起来，这只要选定一个基 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 就行了。由等式

$$\begin{matrix} A(\boldsymbol{x}_1)=a_{11}\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots \\ A(\boldsymbol{x}_n)=a_{1n}\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{x}_n \end{matrix} \quad 或\ A(\boldsymbol{x}_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_i,\ i=1, \cdots, n$$

得到表示变换的矩阵

$$A \to \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}。$$

线性变换总是用方阵来表示的。

如果一个线性变换是正则的，那末表示它的矩阵也是正则的，反之亦然。逆变换由逆阵表示。

如果 $A \to \boldsymbol{A}$，那末 $A^{-1} \to \boldsymbol{A}^{-1}$。

如果 $A \to \boldsymbol{A}$ 以及 $B \to \boldsymbol{B}$，那末 $A+B \to \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；$a \cdot A \to a \cdot \boldsymbol{A}$，以及 $A \cdot B \to \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$。

【例 8】　如果 A 是前面讲过的由平面绕原点 O 旋转角 φ 而得的变换，又如果 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 是两个长度为 1 的正交向量基，那末它们在点 O 上的表示被映成它们的象 $A(\boldsymbol{x})$ 与 $A(\boldsymbol{x}_2)$（见图 4.5-1）。显然，对于 $A(\boldsymbol{x}_1)$ 与 $A(\boldsymbol{x}_2)$，下边的等式成立。于是，算子 A 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示。算子 A^{-1} 不过是以相反方向转过角 φ，即转过角 $-\varphi$ 的旋转。

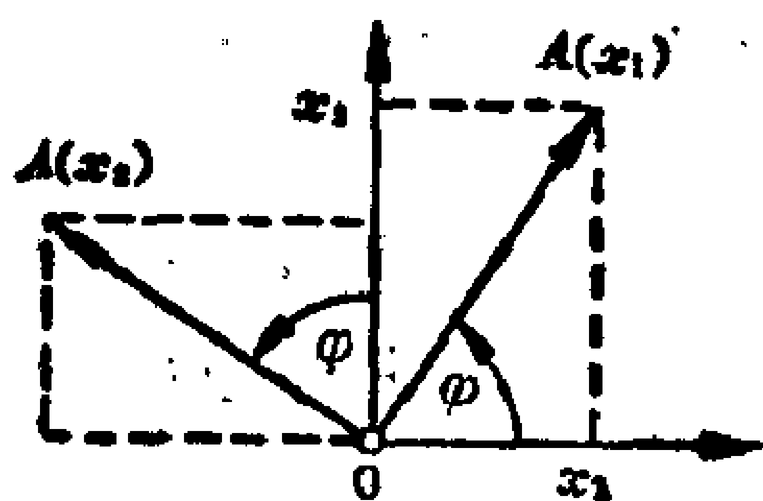


图 4.5-1　平面绕固定点 O 转过角 φ 的旋转

$$\boxed{\begin{aligned}&A(x_1)=\cos\varphi\, x_1+\sin\varphi\, x_2\\&A(x_2)=-\sin\varphi\, x_1+\cos\varphi\, x_2\\&A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

$$A^{-1}\to A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi)\\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}。$$

【例 9】 如果I是V上的恒等变换，而$x_1, \cdots, x_n$是V的任意一个基，那末

$$\begin{aligned}I(x_1)&=x_1=1\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n\\I(x_2)&=x_2=0\cdot x_1+1\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n\\&\vdots\\I(x_n)&=x_n=0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+1\cdot x_n\end{aligned}\qquad I\to I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

对于任何一个基，恒等变换由单位阵表示。

一般说来，表示一个线性变换A的矩阵$\boldsymbol{A}$依赖于基的选择。如果$x_1, \cdots, x_n$与$x_1', \cdots, x_n'$是V的两个基，那末

关于基$x_1, \cdots, x_n$，$A\to \boldsymbol{A}$，而

关于基$x_1', \cdots, x_n'$，$A\to \boldsymbol{A}'$。

现在可以由两个基来定义一个新的线性变换C：$C(x_1)=x_1', \cdots, C(x_n)=x_n'$，即$C$是将一个基变成另一个基的变换。如果变换$C$用关于基$x_1, \cdots, x_n$的矩阵$\boldsymbol{C}$来表示，那末关系$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$成立。这就是关于不同的基表示同一个算子的矩阵间的变换规则。成立上述关系的两个矩阵称做相似的。这里自然会提出这样一个基的存在问题，这个基能使表示给定变换的矩阵尽可能地简单。这就是找出变换的标准形问题，这个问题与本征值理论密切相关(见本征值一节中向主轴的变换)。

坐标变换 如果在向量空间V中给定两个基$x_1, \cdots, x_n$和$y_1, \cdots, y_n$，那末向量x关于每一个基有坐标：

$$x=x_1x_1+\cdots+x_nx_n=y_1y_1+\cdots+y_ny_n$$

从一个坐标系到另一个坐标系的变换由下面的等式描述：

$$\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+\cdots+a_{n1}x_n\\&\vdots\\y_n&=a_{1n}x_1+\cdots+a_{nn}x_n\end{aligned}\qquad 或\ y_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i,\ j=1, \cdots, n。$$

现在，坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 满足关系

$$x_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_i,\ j=1, \cdots, n。$$

由阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 到它的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=(a'_{ij})$，就得出逆变换公式。

从基 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 变换到基 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$			
基向量的变换		坐标变换	
$\boldsymbol{y}_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_i$	$(a_{ij})=\boldsymbol{A}$	$y_j=\sum_{i=1}^{n} a'_{ji}x_i$	$(a'_{ji})=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$
$\boldsymbol{x}_j=\sum_{i=1}^{n} a'_{ij}\boldsymbol{y}_i$	$(a'_{ij})=\boldsymbol{A}^{-1}$	$x_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_i$	$(a_{ji})=\boldsymbol{A}^T$

其中的差异可表达为：坐标变换是基变换的*逆步变换*。如果基 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 关于基 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 用阵 $\boldsymbol{A}$ 来表示，那末上面的等式表明，向量 $\boldsymbol{x}$ 关于基 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 的坐标用逆步阵 $(\boldsymbol{A}^{-1})^T$ 由向量 $\boldsymbol{x}$ 关于基 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 的坐标得出。

对于欧几里得向量空间中的标准正交基，变换阵是正交的，因此等于它的逆步阵。在这种特殊情况下，坐标变换与基变换的形式相同。

矩阵的秩　对于任何一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，可把行与列分别看作 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 的元素进而确定线性无关列或线性无关行的最大数目。这两个数字总是相等的，称为*矩阵的秩*。如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示线性映射 A，那末 $\boldsymbol{A}$ 的秩和映射 A 的秩相同。计算秩可以利用下述事实：

如果 1.一行（列）的倍数加到另外一行（列）上，或 2.二行（或二列）互相交换，则矩阵的秩保持不变。

运用这些规则，可使矩阵变为这样的形式，其中只有那些行列下标相同的元素才不为零。$\boldsymbol{A}$ 的秩就是这样一些非零元素的数目。这个方法非常类似于解线性方程组的高斯算法。对于方阵，这只要变成*三角形式*就行了，其中主对角线以下（或以上）的所有元素为零。只要可能有那么多的对角线元素非零，那末这样的元素数目就是秩。

【例 10】　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列与第三列上使之变成 $\boldsymbol{A}_2$。从 $\boldsymbol{A}_2$ 的第二列减去第一列，第三列减去第一列的三倍而得 $\boldsymbol{A}_3$。第一、第二列互换给出 $\boldsymbol{A}_4$。由此得出，$\boldsymbol{A}$ 的秩是 2。

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\to A_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&3\end{pmatrix}\to A_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to A_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}。$$

【例 11】 在原始阵 A 中，三倍第一行加到第二行上，二倍第一行加到第三行上。变换后的阵交换第二与第三列。得 A 的秩为 3。

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-3&-3&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}。$$

矩阵的特殊类型　相应于线性变换的特殊类型，有矩阵的特殊类型。如果 V 是一个欧几里得向量空间，变换 A 由关于一个标准正交基的矩阵 A 表示，那末伴随变换 A^* 由转置阵 A^T 来表示。因此对称变换 $A=A^*$ 由**对称阵** $A=A^T$ 来表示。

其中特别重要的是**正交阵**，因为它们将标准正交基彼此作变换。用坐标表达的话，这就是说：**借助于正交阵将一个直角坐标系的坐标变换成为另一个直角坐标系的坐标**。如果 $A^T=A^{-1}$，那末这阵是**正交的**。这个等式也可以写成 $A\cdot A^T=I$ 的形式，并解释为：**在正交阵中，不同行的内积为零，一行自身的内积为 1**。对于 A 的列，同样的命题也为真，而且这两组命题之中的任何一组都可作为正交阵的一个充分条件。例如，每一个 2×2 正交阵都可写成这样的形式：

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\text{ 或 }\begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\\sin\varphi&-\cos\varphi\end{pmatrix}。$$

在第一种情形下，矩阵表示平面转过角 φ 的一个旋转，在第二种情形下，还附加一个直线的反射。第二类阵与第一类阵的区别在于其行列式为 -1，而一个旋转的行列式总是 $+1$。一般说来，正交阵的行列式总是 $+1$ 或 -1。如果正交阵具有行列式 $+1$，那末有时也称它为**正常的**，一般地它们相当于欧几里得向量空间的保持定向的正交变换。下列各阵属这种类型：

$$A_{12}(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A_{13}(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi&0&-\sin\psi\\0&1&0\\\sin\psi&0&\cos\psi\end{pmatrix},$$

$$A_{23}(\vartheta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}。$$

其中 φ、ψ、ϑ 是任意角。如果选定基向量 e_1, e_2, e_3 的一种固定次序，那末 $A_{12}(\varphi)$ 表示空间绕 e_3 轴的一个旋转。在 e_3 保留不变的情况下，e_1、e_3 平面转过角 φ。这一事实引出了矩阵的特定形式。适当地选择 φ, ψ, ϑ，可将每一个 3×3 正常正交阵写成乘积 $A=A_{23}(\vartheta)\cdot A_{13}(\psi)\cdot A_{12}(\varphi)$。

如同正交变换那样，$n\times n$ 正交阵的集合构成一个群。正常正交阵构成这个群的一个子群。

4.6 本征值

本征值与本征向量　数 λ 叫做线性变换 A 的**本征值(或特征值)**，如果存在向量 $x\neq o$，使得 $A(x)=\lambda\cdot x$，这个向量 x 就叫做变换 A 属于 λ 的**本征向量**。属于 λ 的所有本征向量以及零向量一起构成一个子空间，叫做 A 的**本征空间**。

如果方程 $A(x)=\lambda\cdot x$ 写成 $(A-\lambda I)x=o$ 的形式，那末可以说：

数 λ 是算子 A 的一个本征值，当且仅当算子 $A-\lambda I$ 奇异。

用这种形式，就有可能利用表示变换 A 的阵 $\boldsymbol{A}$ 来定义本征值：数 λ 是阵 $\boldsymbol{A}$ 的本征值，如果 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 是奇异阵。

【例 1】　设 A 是一个奇异变换；于是存在一个非零向量 x，使得 $A(x)=o=0\cdot x$。因此 $\lambda=0$ 是 A 的一个本征值，而且核中的非零向量都是属于 0 的本征向量。

【例 2】　假设关于基 $x_1, \cdots, x_n$ 表示算子 A 的阵 $\boldsymbol{A}$ 是对角阵：

$$\begin{matrix}A(x_1)=\lambda_1 x_1\\ \vdots\\ A(x_n)=\lambda_n x_n\end{matrix}\qquad A\to\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是，基向量全是 A 的本征向量。这样的变换特别容易描述，因为它们改变基向量只是乘上一个倍数。它们称做**对角(或可对角化)变换**。n 维空间每一个具有 n 个相异本征值的变换都是可对角化的。

本征值在物理中的意义　本征值问题在许多物理分支中是重要的。

它们使得有可能找到这样一个坐标系，在这个坐标系中所讨论的变换取最简单的形式。例如在力学中，刚体的主矩就是借助于表示其惯性张量的对称阵本征值求得的。在连续介质力学中情况也类似，物体在主方向上的旋转与变形是借助于对称阵的本征值求得的。本征值在量子力学中更为重要，其中物理上“可观察”的测量值就是作为某个算子的本征值出现的。在纯数学(几何)中流行“变换”这个词，而在应用(物理，工程技术)中则习惯于“算子”这个词。

本征值与本征向量的计算 如果选定了向量空间 V 一个基，那末方程 $(A-\lambda I)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}$ 可用 $\boldsymbol{x}$ 的坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 的方程组来表示：

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}\quad & x_2+\cdots+a_{1n}\quad x_n=0\\ a_{21}\quad x_1+(a_{22}-\lambda)\quad & x_2+\cdots+a_{2n}\quad x_n=0\\ \vdots\qquad\qquad \vdots\qquad & \qquad\qquad \vdots\\ a_{n1}\quad x_1+a_{n2}\quad & x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0。\end{aligned}$$

系数阵是表示变换 $A-\lambda I$ 的阵 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$。因为只有非零向量才能是本征向量，所以问题是要找这个齐次方程组的非零解。解存在的充分必要条件是系数阵的行列式为零：$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$。当且仅当 $A-\lambda I$ 奇异，即 λ 是 A 的本征值时，这个行列式为零。行列式可以看成 λ 的 n 次多项式：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n。$$

这叫做阵 $\boldsymbol{A}$ 的*特征多项式*。如果 $\boldsymbol{A}'$ 是表示 A 的另一个阵，那末就有某个阵 C 使 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，因而其关联的多项式相同：

$$\det(\boldsymbol{A}'-\lambda\boldsymbol{I})=\det(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{I})=\det(\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{C})=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})。$$

因此为了找出本征向量 $\boldsymbol{x}$，必须首先求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根。然后，作为上面给定的齐次方程组的非平凡解，找到 $\boldsymbol{x}$ 的坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。

【例 3】 对于 $n=2$ 以及 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$，本征值是方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0$$

的根。于是，它们是 $+1$ 与 -1。属于本征值 $+1$ 的本征向量其坐标 x_1, x_2 是如下方程组的解：

$$\left.\begin{matrix}1x_1+3x_2=0\\-1x_1-3x_2=0\end{matrix}\right\rangle\!\!-(x_1,\ x_2)=\tau\cdot(-3,\ 1),$$

这里 τ 是一个任意的非零数。一般说来本征向量只是确定到相差一个倍数的程度.

向主轴的变换

对于对称变换，理论导致特别简单的结果。对称变换的所有本征值都是实数，而且存在本征向量组成的标准正交基。如果 A 用阵 $\boldsymbol{A}$ 来表示，这就意味着存在一个正交阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是对角阵，在主对角线上为本征值。$\boldsymbol{A}'$ 称做 $\boldsymbol{A}$ 的**标准形**，而由 $\boldsymbol{C}$ 表示的基变换就叫做**向主轴的变换**。阵 $\boldsymbol{C}$ 是本征向量组成的标准正交基关于 A 用阵 $\boldsymbol{A}$ 表示的那个基的坐标阵。

【例 4】　对于 $A\to\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$，本征值是 $+2$ 和 $+4$。属于 $+2$ 的本征向量是 $(x_1,\ x_2)=\tau_1\cdot(1,\ 1)$，属于 $+4$ 的本征向量是 $(x_1,\ x_2)=\tau_2\cdot(-1,\ 1)$。可以选取数 τ_1 与 τ_2 使向量的长度为 1。本征向量 $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ 与 $(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ 构成一个标准正交基，而 $\boldsymbol{C}$ 是阵。

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix};\ \boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^{T}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}。$$

借助于向主轴的变换，可将有心二次曲线或二次曲面的方程大大简化。这就是将笛卡尔坐标系变成由曲线或曲面的对称轴组成的坐标系。这些对称轴便是图形的主轴，它也说明了向主轴变换的这个名称。

【例 5】　设 $ax^2+2bxy+cy^2=d$ 是一个圆锥曲线方程，等号左边的坐标排列成对称阵 $\boldsymbol{A}$。在得出新的直角坐标 $(x',\ y')$ 的坐标变换下，就由一个正交阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，使阵 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$。于是，由选择适当的阵 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{A}'$ 可为对角阵。

$$\boxed{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}}$$

$$\begin{matrix}x'=c_{11}x+c_{21}y\\y'=c_{12}x+c_{22}y\end{matrix};\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix};\ \boldsymbol{A}'=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}。$$

这意味着，在新坐标系中该曲线由方程 $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=d$ 来描述。

例如，设 $3x^2-2xy+3y^2=2$ 是一个曲线方程。相应的对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的变换阵 $\boldsymbol{C}$ 已在例 4 中得到：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned}x'&=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\\ y'&=\frac{-1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\end{aligned}\;\right|\;\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\\ y&=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\end{aligned}\right|。$$

后面两个方程的系数是 $\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^T$ 的元素，如果用方程来代替 x 和 y 的表达式，那末在新的坐标系中结果生成的曲线方程是 $2x'^2+4y'^2=2$。

阵 $\boldsymbol{C}$ 描述平面绕原点转过角 $\frac{\pi}{4}$ 的旋转，它使老的坐标轴变成一个新的坐标轴（见图 4.6-1）。

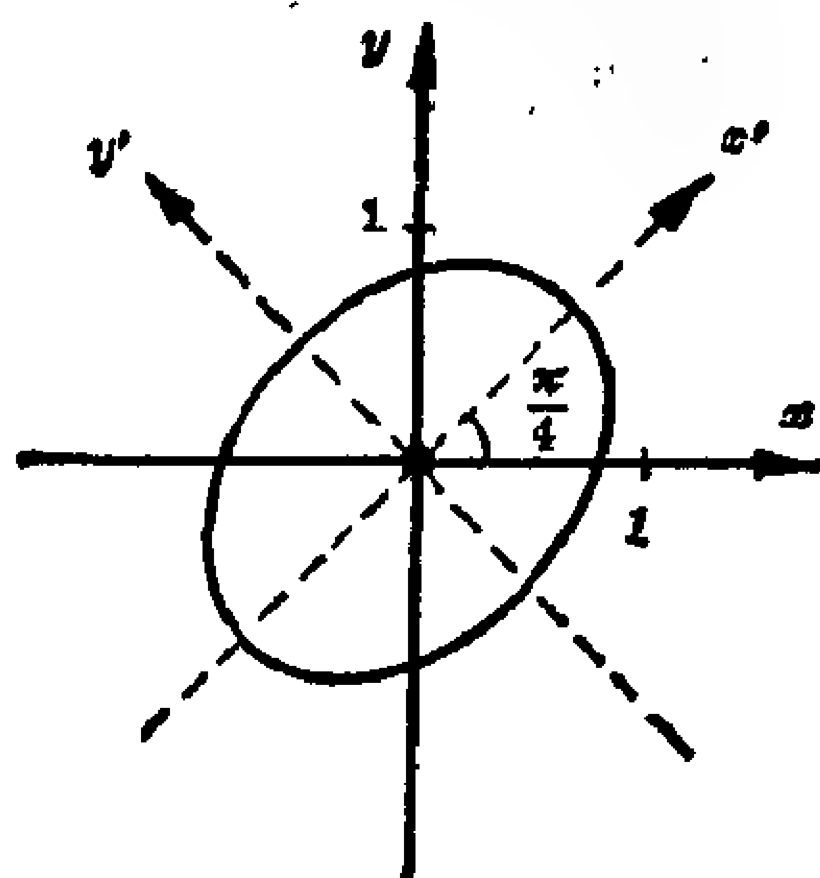


图 4.6-1 $3x^2-2xy+3y^2=2x'^2+4y'^2=2$ 向主轴的变换

4.7 多重线性代数

多重线性代数的主要对象是**多重线性形式**的研究，它是线性形式的一般化。向量空间 V 上的一个多重线性形式是一个函数，它将任何 r 个向量与一个数关联起来，而它关于每一个变元是线性的。这意味着，如果固定任意 $r-1$ 个向量，那末对剩下的那个向量定义的映射是线性的。

双线性形式 如果 $r=2$，形式就叫做**双线性的**。向量内积就是双线性形式的一个例子。如果选定了空间 V 的一个基，那末可以用坐标来表示双线性形式；例如在 2 维空间的情形下，双线性形式的一般表达式是

$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2$。

如果置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，就得到一个**二次型** $a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2$。在二次型理论中最重要的问题是用尽可能简单的方式表示所给定的形式，例如表示成没有混合项的形式。利用向主轴变换总可以做到这一点。

张量 双线性形式的系数在双线性形式变换下，呈现一种正则的性态，它是张量坐标的特征。推广线性代数中向量空间的概念，定义**张量空**

间，它的元素就称做*张量*。

应用　*张量代数*，研究张量空间，在微分几何中有重要应用。曲面的或空间的曲率是用张量，即所谓*曲率张量*来描述的。在相对论中，粒子的能量与冲量不可分离性就是用存在一个张量来讨论的，这个张量的分量是能量与冲量的分量，它就是所谓*能量——冲量张量*。张量在物理的其他领域例如在晶体光学和弹性理论中也同样有用。这样，弹性媒介的形变或应力就用*形变张量*或*应力张量*来描述。

双线性形式与二次型理论用在解析几何中，就产生了二次曲线与二次曲面的标准分类。它也用在物理中，特别是用来描述在微小振动条件下的物理系统。

第5章 序列，级数，极限

5.1 序列

从每一个非空的实数集 S 可以选出种种序列，为此相继从 S 中选择第一个数 a_1，第二个数 a_2，第三个数 a_3 等等，进而将 a_1 看作所选序列的第一项，a_2 为第二项，a_3 为第三项等等。例如，若从正整数集依照它们的自然顺序挑选那些能被 2 整除的数，则得到偶数序列，它的前五项是 2, 4, 6, 8, 10。就如数 2 在序列 2, 4, 2, 6, 2, 8, 2, 10 中那样，在序列形成过程中，S 的一个元素可能不止一次被选取。如果总是选取同一个数 a，则得到一个*常数序列* $a, a, \cdots, a, \cdots$。

一个*有限序列*由有限多譬如说 N 项所组成的；a_N 则是它的尾项。上面所定义的序列 2, 4, 2, 6, 2, 8, 2, 10 是一个具有八项的有限序列；$a_8=10$ 是它的尾项。另一方面，偶数序列没有尾项，因为每一项继之有另外一项。这样的序列就称做*无限的*。

当对于每一个自然数 $n\geqslant 1$，严格地对应着一个实数 a_n 时，这就给定了一个无限序列；a_n 称为该序列的第 n 项。如果这个对应仅对于 1 与 N 之间的各个自然数 $(1\leqslant n\leqslant N)$ 存在，那末就得到一个有限序列。

列表表示这个对应，例如

项数 n	↓1	↓2	↓3	↓4	↓5	…
序列的项 a_n	2	4	6	8	10	…

偶数序列的例子表明，可把每一个序列看作有序数对 (n, a_n) 的集合，它的第一分量 n 是自然数，它的第二分量，即项 a_n 是一个实数。因为对应是单值的，所以也可把序列定义为函数。

序列是一个函数，它的定义域是自然数集，它的值域由实数组成。

当然，序列的图解表示，例如在笛卡尔坐标系中用坐标为(n, a_n)的序列离散点来表示，或者列表来表示，象列举序列的开始几项那样，对于完全描述一个无限序列是不适宜的。例如，项$a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=5$可以用许多种甚至用无限多种方式续成一个序列。这种延续的例子如素数序列，作为210的所有因子的有限序列，或者序列2, 3, 5, 8, 13, 21, … 当$k>2$时其第k项是前两项的和。

为了完全描述一个无限序列，就试着用一个*定义规律*来表示项数n与序列的对应项a_n之间的唯一对应。在大多数情况下有可能用一个*解析式*$a_n=f(n)$, $n=1, 2, 3, \cdots$来陈述定义规律。可以把序列a_1, a_2, a_3, …记成$\{a_n\}=\{f(n)\}$。

可以用解析式作为定义规律的序列例子。

1. 偶数序列2, 4, 6, …；定义规律为$a_n=2n$。

2. 完全平方序列1, 4, 9, …；$\{a_n\}=\{n^2\}$。

3. 序列$\{a_n\}=\{n/(n+1)\}$的第七项是在解析式中代入$n=7$得出$a_7=7/(7+1)=7/8$。

4. 序列$\{a_n\}=\{2^n\}$, $1\leqslant n\leqslant 10$，是一个有限序列；它的尾项是$a_{10}=2^{10}=1024$。

5. 定义规律$a_n=(-1)^{n+1}n$导致序列1, −2, 3, −4, 5, −6, …，这个序列是*交错的*，即邻接的两项反号。这个例子同样表明，一个无限序列不一定有最大或最小项。

有时序列的定义规律可以用*递归关系*给出。按此关系，一个项a_n仅当前面那些$i<n$的项a_i已知时才能算出。例如，*斐波那契数列*0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …是由$a_1=0$, $a_2=1$，以及当$n\geqslant 3$时由递归关系$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$所定义的。

然而有这样一些序列，对于它们既不能给出一个解析式又不能给出一个递归规律。例如素数序列或序列3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, …，它的第n项是π十进展开的第n位数字。从一个序列的项可以得到另外的序列，例如根据1, 1/2, 1/3, …, 1/n, …，得出序列$S_1=1$, $S_2=1+1/2$, $S_3=1+1/2+1/3$, …, $S_n=1+1/2+1/3+\cdots+1/n$, …，它的第n项是给定序列前n项的和。在这种情况下，序列S_1, S_2, …, S_n, …是由一个间接法则给定的。

重点在于无限序列。其中特别重要的是由相邻两项之间的关系得出

的一些性质。

单调序列　它们是这样的一些序列，随着项数增加，其项不断地增大（或者不断地减小）（见Ⅰ.第5章）。

如果一个序列 $\{a_n\}$ 中的每一项都大于它的前者，即对于所有 n，$a_{n+1}>a_n$，则称它为单调增加的。如果对于所有 n，$a_{n+1}<a_n$，则称它为单调减少的。

有时在这个定义中也允许出现等号，并且如果 $a_{n+1}\geqslant a_n$ 就称这个序列为单调增加的，而如果 $a_{n+1}\leqslant a_n$ 则称为单调减少的。为了区分，将具有 $a_{n+1}>a_n(a_{n+1}<a_n)$ 性质的序列，称做*严格单调增加的*（*严格单调减少的*）。

例如分数序列 1, 1/2, 1/3, …, 1/n, … 是（严格）单调减少的，而序列 −12, −9, −6, −3, 0, …, $[-12+3(n-1)]$, … 是（严格）单调增加的。大多数序列既不单调增加又不单调减少，例如序列 1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4, …

有界序列　定义规律为 $a_n=(n-2)/(2n)$ 的序列 −1/2, 0, 1/6, 2/8, … 具有这样的性质：其中没有一个大于1的项，也没有小于 −1/2 的项，因而对于所有 n，不等式 $-1/2\leqslant a_n<1$ 成立，这样的序列称做有界的。

序列 $\{a_n\}$ 称为有界的，如果存在两个数 k 和 K，使得对于序列的每一个项 a_n，不等式 $k\leqslant a_n K$ 成立。

对于这个序列，k 称做*下界*，K 称做*上界*。如果对于序列的每一项 a_n，有 $k\leqslant a_n\leqslant K$，那末 $|a_n|\leqslant M=\max(|k|, |K|)$。反之，如果对于项的绝对值 $|a_n|$，存在一个界限 M，有 $|a_n|\leqslant M$，那末 $-M\leqslant a_n\leqslant M$，即这个序列有界。因此定义也可如下陈述：

序列 $\{a_n\}$ 是有界的，如果存在一个不被序列任何一个元素的绝对值所超过的正数 M：对于所有 n，$|a_n|\leqslant M$。

数 k, K, M 不是唯一确定的。显然，如果 k 是序列的一个下界，那末每一个较小的数 $k'<k$ 也是该序列的下界，而如果 K 是一个上界，则每一个较大的数 $K'>K$ 也是上界。有限序列总是有界的；可以选取序列的最小项作为一个下界 k，最大项作为一个上界 K。无限序列则可能是*无界*的，例如平方序列 1, 4, 9, …, n^2, …。最小上界称做*上确界* G；每一个较小的数 $G-\varepsilon$（ε 是任何一个小的正数）至少被序列 $\{a_n\}$ 的某一项 a_m

超过，即 $a_m > G-\varepsilon$。类似地，最大下界称做**下确界** g；每一个较大的数 $g+\varepsilon$（ε 是任意正数）至少超过序列的某一项 a_k，即 $a_k < g+\varepsilon$。可以证明，每一个有界序列具有唯一确定的上确界和唯一确定的下确界。

如果用"集合"代替"序列"，用"元素"代替"项"，上述讨论一般也可用于数集。

算术序列　在算术序列中，相邻两项之间的**差** d 是非零的**常数**：$a_n - a_{n-1} = d$。例如，偶数序列 2, 4, 6, 8, …有公差 $d=2$。如果选择 $d=-3$ 和首项 $a_1=25$，则得到序列 25, 22, 19, 16, 13, …。如果 d 是正的，则算术序列单调增加；如果 d 是负的，则它单调减少。每一个无限的算术序列是无界的。

算术序列	$a_1,\ a_2=a_1+d,\ a_3=a_1+2d,\ \cdots,\ a_n=a_1+(n-1)d,\ \cdots$

这名称起源于这样的事实，即每一项 a_k（$k \geqslant 2$）是它的两个相邻项的**算术平均**：显然，$a_{k-1}=a_k-d$ 和 $a_{k+1}=a_k+d$ 的算术平均是 $(a_{k-1}+a_{k+1})/2 = (2a_k)/2 = a_k$。

【例1】　首项 $a_1=33$ 和公差 $d=8$ 的算术序列，其第100项 $a_{100}=a_1+(n-1)d=33+99\cdot 8=825$。

【例2】　如果 $a_{10}=15$ 是算术序列的第10项，它的公差是2，那末首项是 $a_1=a_n-(n-1)d=15-9\cdot 2=-3$。

线性插值过程是在公差为 d 的算术序列的两项 a_k 和 a_{k+1} 之间再插入 m 项，使它们又构成一个算术序列。设 d' 是所求序列的公差；那末

$$a_{k+1}=a_k+(m+1)d'=a_k+d, \quad 得 \quad d'=d/(m+1)。$$

【例】　要在算术序列 $\boxed{3}$, $\boxed{17}$, $\boxed{31}$, 45, 59, … 的每对项之间插入6项。因为 $d=14$，所以新序列的公差 d' 由 $d'=14/7=2$ 给定，从而这给出序列 $\boxed{3}$, 5, 7, 9, 11, 13, 15, $\boxed{17}$, 19, 21, 23, 25, 27, 29, $\boxed{31}$, …。

从给定的序列，形成**差分序列**，是取其相邻项之间的差。于是，算术序列也可描述成这样：它的一阶差分序列是常数列。在应用数学以及误差和逼近计算中，还用到**高阶算术序列**，例如 n 阶算术序列。就 n 阶算术序列来说，n 阶差分序列 Δ^n 是第一个常数序列。

【例】　序列 1, 8, 27, 64, 125, 216, … 是3阶算术序列，因为它的三阶差分序列 Δ^3 是常数。

序列	1	8	27	64	125	216	…
Δ^1		7	19	37	61	91	…
Δ^2			12	18	24	30	…
Δ^3				6	6	6	…

几何序列 在几何序列中，相邻两项的比$q\neq1$是常数：$a_n=a_{n-1}q$。例如序列9, 3, 1, 1/3, 1/9, … 首项$a_1=9$和公比$q=1/3$。对于$a_1=-1/2$, $q=-2$, 得到序列 $-1/2$, 1, -2, 4, …，而对于$a_1=-24$, $q=1/2$, 则序列为 -24, -12, -6, -3, …。如果q是正的，所有的项和a_1同号；如果q是负的，则序列是交错的。如果$|q|\leqslant1$, 那末几何序列是有界的，否则无界。对于$a_1>0$, $q>1$, 它们单调增加，对于$a_1<0$, $0<q<1$也一样。对于$a_1>0$, $0<q<1$, 它们单调减少，对于$a_1<0$, $q>1$同样如此。

几何序列	$a_1,\ a_2=a_1q,\ a_3=a_1q^2,\ \cdots,\ a_n=a_1q^{n-1},\ \cdots$

这种序列的名称起源于这样的事实，即每一个项$a_k(k\geqslant2)$在数值上等于它的两个相邻项的几何平均：对于$a_{k-1}=a_k/q$和$a_{k+1}=a_kq$有几何平均$\sqrt{(a_k/q)(a_kq)}=\sqrt{a_k^2}=|a_k|$。

【例 1】 首项$a_1=2$和公比$q=1/2$的几何序列，第10项$a_{10}=a_1q^9=2\cdot(1/2)^9=1/256$。

【例 2】 如果几何序列的首项是$a_1=2/3$而它的第10项是$a_{10}=a_1q^9=13122$, 那末公比是$q=\sqrt[9]{a_{10}/a_1}=\sqrt[9]{3\cdot13122/2}=3$。

【例 3】 如果将一张厚度$a_1=0.1$毫米的足够大的纸折叠40次，则得到厚度$d=a_{41}=0.1$ 毫米$\times2^{40}=109951162777.6$毫米$\approx109951$公里的一叠纸。

【例 4】 当一束光线穿过一块玻璃板时，由于在界面上的反射和材料的不均匀性，损失其强度L的1/12。在穿过第一块板后，它有强度$a_1=L-1/12L=11/12L$；在穿过第二块后，它有强度$a_2=11/12L-1/12(11/12)L=(11/12)^2L$；而在穿过第$n$块之后，它有强度$a_n=(11/12)^nL$。如果根据测量证实，强度$a_n$只是原始值的一半，由$a_n=(11/12)^nL=\frac{1}{2}L$, 可算出玻璃板的块数$n$。算得$n=\lg2/(\lg12-\lg11)\approx8$。于是，这束光线穿透了八块玻璃板。

在几何序列的任意两项a_k和$a_{k+1}=a_kq$之间插入m个数，使所成的

序列也是几何序列。如果q'是所要确定的这个序列的公比，那末$a_{k+1}=a_k(q')^{m+1}=a_kq$。由此可得$q'=\sqrt[m+1]{q}$。

【例1】 在序列32, 1, 1/32, 1/1024, …的每对项之间插入4项。对于所给的序列$q=1/32$，从而要插入的序列的公比是$q'=\sqrt[5]{1/32}=1/2$。于是得到序列32, 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, …。

【例2】 用等调律校音时，11个中间音调等距离排列在高低八度音的音调之间。例如，在C大音阶中的音调是$C^{\#}$, D, $D^{\#}$, E, F, $F^{\#}$, G, $G^{\#}$, A, $A^{\#}$, B。这些音调的频率在高低八度音其频率比为$q=2$的音调之间构成一个几何序列。所要求的音调频率比q'是$q'=\sqrt[12]{2}=1.059463$，由此给出频率比序列：$C=1$, $C^{\#}=1.05946$, $D=1.12244$, $D^{\#}=1.18921$, $E=1.25992$, $F=1.33792$, $F^{\#}=1.41421$, $G=1.49831$, $G^{\#}=1.58740$, $A=1.68179$, $A^{\#}=1.78180$, $B=1.88775$, $C'=2$。

模数的基本序列

	$R5$	$R10$	$R20$	$R40$	$R80$
q	$\sqrt[5]{10}\approx1.6$	$\sqrt[10]{10}\approx1.25$	$\sqrt[20]{10}\approx1.12$	$\sqrt[40]{10}\approx1.06$	$\sqrt[80]{10}\approx1.03$

在规格化中，要找出以最少步数满足实际要求的量级。采用所谓十进几何序列。这是些以步或公比$q=\sqrt[n]{10}$的几何序列，在工程技术中称为模数的基本序列。

相应地把每一个十进制区域分成n步。从基本的序列，可以只是每隔二步，每隔三步，或每隔m步采用该序列而选出另一个序列。

序列 $R10$	1	1.25	1.6	2	2.5	3.15	4	5	6.3	8	10	12.5
选出的序列 $R10/2$	1		1.6		2.5		4		6.3		10	
		1.25		2		3.15		5		8		12.5

工艺产品、机器和机器零件，工具等等，都是依照这些基本序列制造的。锻压机的压力、起重机和绞盘的升力与高度、转数、切削速度以及汽轮机的功率同样地分级。国际上约定的纸张开本也是按几何序列分级的。硬币与纸币常常以$q=\sqrt[3]{10}\approx2.2$的几何序列为基础，给出各个近似序列

1, 2, 5, 10, 20, 50, …。英国的十进币制与美国的币制都依照这个格式。

序列的收敛与发散 定义规律为 $a_n=(n+1)/(2n)$ 的序列 1, 3/4, 4/6, 5/8, … 的各项,与 $\frac{1}{2}$ 的差,随着项数 n 变大而越来越小。序列的项与 $\frac{1}{2}$ 之间的差 $|a_n-1/2|$ 可以*任意地*小;亦即可以选定指标n的一个适当值,使得*从这个 n 值起*,所有的差 $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|$ 小于一个任意给定的小正数 ε。例如,如果要求与$\frac{1}{2}$的差至多是$\varepsilon=0.001$,那末由 $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|=|(n+1)/(2n)-1/2|=|1/2+1/(2n)-1/2|=1/(2n)<0.001$, 由此得出当 $n>500$ 的全部项 a_n 都具有所要求的性质。至多有500个项与 $\frac{1}{2}$ 有一个较大的差。如果所要求的精确度增加到 $\varepsilon=0.000001$, 那末只有 500000 项与 $\frac{1}{2}$ 有较大的偏差,从而对于 $n>500000$ 的所有项 a_n, 有 $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<0.000001$。一般说来,对于*所有* $n>1/(2\varepsilon)$,有 $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$。于是,无论选取怎样小的 ε, 总能选定一个指标,使得从这个项起,序列的所有项与 $\frac{1}{2}$ 的差小于 ε。于是这个序列$\{a_n\}$叫做*收敛于极限* $\frac{1}{2}$。

序列 $\{a_n\}$ 称为收敛于极限 a, 如果对于每一个任意小的正数 ε, 相应有一个数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时序列的所有项 a_n 满足不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$。

一般地,超出它之后成立 $|a_n-a|<\varepsilon$ 的数 N 依赖于 ε; 选定的 ε 越小,N 就越大。由于这个原因,就更加明确地记为 $N(\varepsilon)$。当然,就收敛于极限 a 的序列 $\{a_n\}$ 来说,对每一个 $\varepsilon>0$ 相应有一个数 $N_2(\varepsilon)$, 超出它之后成立 $|a_n-a|<\varepsilon/2$; 相应有一个数 $N_k(\varepsilon)$, 超出它之后成立 $|a_n-a|<\varepsilon/k$; 相应有一个 $N'(\varepsilon)$, 超出它之后成立 $|a_n-a|<\varepsilon^{\alpha}$; 等等。这有许多用途。如果序列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a, 写成当 $n\to\infty$ 时, $a_n\to a$, 或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$(读作*当 n 趋向无限时,a_n 收敛于 a, 或当 n 趋向无限时,a_n 的极限为a*)。这在几何上意味着,序列只有有限多项落在极限 a 的 ε 邻域 $a-\varepsilon\cdots a+\varepsilon$ 之外,而其他的所有项全都落在这个 ε 邻域之内。于是可以说,无论 ε 怎样小,序列*几乎所有*的项落在 a 的 ε 邻域内。

【例 1】 定义规律为$a_n=3/10+3/10^2+\cdots+3/10^n$ 的序列0.3,0.33,

0.333, …收敛于$\frac{1}{3}$。与这个极限的变差值为

$$\begin{aligned}|a_n-1/3| &= |3(10^{n-1}+\cdots+10^1+1)/10^n-1/3| \\ &= |[9(10^n-1)/(10-1)-10^n]/(3\cdot 10^n)| \\ &= 1/(3\cdot 10^n)<\varepsilon_{\circ}\end{aligned}$$

对于任意给定的正数 ε，这个不等式当所有的 $n>N(\varepsilon)=\lg[1/(3\varepsilon)]$ 时满足。例如对于 $\varepsilon=10^{-12}$，$N(\varepsilon)=12-\lg 3$；于是，在这种情况下只有 12 项与 1/3 的差大于 $\varepsilon=10^{-12}$。一般地说来，各位数字为 z_i 的无限十进小数 $0.z_1z_2z_3\cdots$ 可以看作 $a_n=z_1/10+z_2/10^2+\cdots+z_n/10^n$ 的收敛序列 $\{a_n\}$。这个序列的极限就是用十进小数表示的那个实数。

【例2】 平方倒数序列 1, 1/4, 1/9, 1/16, … 的极限为零，因为对于任意的 $\varepsilon>0$，当 $n>N(\varepsilon)=1/\sqrt{\varepsilon}$ 时，$|a_n-0|=|1/n^2-0|=1/n^2<\varepsilon$。

极限为零的序列称做*零序列*。由每个零序列 $\{b_n\}$ 可以构造一个极限为 b 的序列 $\{b_n+b\}$。反之，如果序列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a，那末 $\{a_n-a\}$ 是一个零序列。

算术序列与几何序列的收敛性态　序列不收敛就称做*发散的*。例如，每一个算术序列是发散的。因为相邻两项之间的差总是 d，所以不可能使得它的几乎所有项落在固定值的邻域内。当 d 为正数时，序列的项 a_n 最终全都大于每一个任意大的数。因此用符号记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，并称这样的序列*限定发散*。当 d 为负数时，项是最终小于每一个绝对值任意大的负数。这个序列也是限定发散的；记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$。

定义规律为 $a_n=a_1q^{n-1}$ 的无限几何序列，如果公比绝对值 $|q|$ 小于 1，那末它收敛于零。如果 $|q|$ 大于 1，那末序列 $\{a_n\}$ 发散，特别地，当 $q>1$ 时限定发散。

子序列　如果 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n, \cdots$ 是任何一个严格单调增加的自然数的无限序列，那末 $\{p_n\}$ 就称做自然数列的一个*子序列*；例如序列 1, 3, 7, 9, 13, 14, 27, …。如果选定这样一个指标序列 $\{p_n\}$，就从任何序列 $\{a_n\}$ 中确定了它的一个子序列 $\{a_{p_n}\}$。例如 1, 1/8, 1/64, … 是序列 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … 的一个子序列。如果对于所有 $n>N(\varepsilon)$ 的项 a_n 都落在极限 a 的 ε 邻域内，即 $|a_n-a|<\varepsilon$，那末按 $p_n>N(\varepsilon)$，子序列的项 a_{p_n} 也落在这个邻域内。因此下述定理成立。

收敛序列 $\{a_n\}\to a$ 的每一个子序列 $\{a_{p_n}\}$ 收敛于同一极限 a。

收敛序列的几个定理。序列 $\{a_n\}$ 的收敛性取决于存在下标 $N(\varepsilon)$，使超过这个下标 $N(\varepsilon)$ 之后成立 $|a_n-a|<\varepsilon$; $N(\varepsilon)$ 的大小倒是完全无关紧要的。由于这个缘故，可以去掉或加上有限多项而不改变序列的收敛性或者它的极限，因为这至多影响 $N(\varepsilon)$ 的大小。仅仅依赖于"超过 $N(\varepsilon)$"的所有项性态的这个性质，称为序列的无限远性质。序列的收敛性是一个无限远性质。

收敛序列是有界的。

如果序列 $\{a_n\}$ 有极限 a，那末它的几乎所有项处在从 $a-\varepsilon$ 到 $a+\varepsilon$ 的区间内；落在这个区间外的项的集合是有限的，因此也是有界的。

如果收敛序列 $\{a_n\}$ 有上界 K，那末它的极限也不大于 K。否则，必有序列的无限多项整个儿落在位于 K 右边的 a 的一个邻域内，这与 K 为上界的性质相矛盾，类似地，序列的极限 a 不能小于它的任何一个下界。

收敛序列恰有一个极限。

如果 $\{a_n\}$ 有两个不同的极限 a 与 a'，那末 ε 可以选定得如此之小，使 a 与 a' 的 ε 邻域没有公共点。从某个位置 $N(\varepsilon)$ 起，序列的无限多项落在 a 的 ε 邻域外，并且也有无限多项落在 a' 的 ε 邻域外，这与 a 和 a' 为极限的性质相矛盾。

如果序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 有极限 a 和 b，那末序列 $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$，$\{a_nb_n\}$ 分别收敛于极限 $a+b$，$a-b$，ab，并且如果 b_n 和 b 不为零，那末 $\{a_n/b_n\}$ 收敛于极限 a/b。

例如要证明对于一个任意指定的 ε，有 $|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$。由序列 $\{a_n\}$ 的收敛性，可以确定一个指标 N_1，使当 $n>N_1$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon/2$；类似地，对于序列 $\{b_n\}$，可定指标 N_2，使当 $n>N_2$ 时有 $|b_n-b|<\varepsilon/2$。对于所有的 $n>\max(N_1, N_2)$，由三角形不等式可得 $|(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon$，这就是所要证明的。

为了证明可使 $|a_n/b_n-a/b|$ 小于任何一个给定的正数 ε，首先注意到 $|a_n/b_n-a/b|=|[b(a_n-a)-a(b_n-b)]/(b\cdot b_n)|\leqslant[|b|\cdot|a_n-a|+|a|\cdot|b_n-b|]/(|b|\cdot|b_n|)$。可以定出 N_3，使得对于所有的 $n>N_3$ 有 $|b_n|\geqslant g>0$；这总是可能的，因为 $b\neq 0$。最后，可定出 N_1，使得对于所有的 $n>N_1$ 有 $|a_n-a|<g\varepsilon/2$；可以定出 N_2，使得对于所有的 $n>N_2$ 有

$|b_n - b| < g|b|\varepsilon/(2|a|)$。于是得到，当 $n > \max(N_1, N_2, N_3)$ 时，$|a_n/b_n - a/b| < \varepsilon$。

下面的命题是上面定理重要的特殊情况。

1. 如果 c，c_1 与 c_2 是常数，而 $\{a_n\} \to a$，$\{b_n\} \to b$，那末 $\{ca_n\} \to ca$ 以及 $\{c_1a_n + c_2b_n\} \to c_1a + c_2b$。

2. 因为两个收敛序列的相应项乘积的序列收敛于它们极限的乘积，由此得出，只要 $\{a_n\} \to a$ 就对每一个正整数 k 有 $\{a_n^k\} \to a^k$。如果 $a_n \neq 0$ 且 $a \neq 0$，则对每一个负整数 k，结论同样成立。还可推论，如果 $a_n \neq 0$ 且 $a \neq 0$，则对每一个实数 α，有 $\{a_n^\alpha\} \to a^\alpha$。

3. 如果 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是零序列，那末 $\{a_n + b_n\}$，$\{a_n - b_n\}$ 与 $\{a_nb_n\}$ 也是零序列。

一般地，由零序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 构成的序列 $\{a_n/b_n\}$ 不一定是一个零序列。例如 $\{a_n\} = \{1/2^n\}$ 与 $\{b_n\} = \{1/4^n\}$ 是零序列，但 $\{a_n/b_n\} = \{2^n\}$ 是限定发散的。

如果序列 $\{a_n'\}$ 与 $\{a_n''\}$ 收敛于同一极限 a，并且对于序列 $\{a_n\}$ 的几乎所有项成立关系 $a_n' \leqslant a_n \leqslant a_n''$，那末 $\{a_n\}$ 也收敛于极限 a。

相应于对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N(\varepsilon)$，使超出它之后序列 $\{a_n'\}$ 的所有项和序列 $\{a_n''\}$ 的所有项全都落在 a 的 ε 邻域内。因为 $a_n' \leqslant a_n \leqslant a_n''$，所以序列 $\{a_n\}$ 的几乎所有项也落在这个邻域内，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

一些重要的收敛序列的极限。

对于任意的 $q>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} (\log_b n)/n = 0$，其中 $b>0$，$b \neq 1$

1. 对于任意正值 q，$\{x_n\} = \{\sqrt[n]{q} - 1\}$ 是零序列。对于 $q=1$，每一项值为零。对于 $q>1$，$\sqrt[n]{q} > 1$，所以数 x_n 是正的。因此 $q = (1+x_n)^n > 1 + nx_n > nx_n > 0$，或 $0 < x_n < q/n$。但 $\{q/n\}$ 是一个零序列，从而 $\{x_n\}$ 也是一个零序列。对于 $q<1$，有 $1/q>1$，因此 $\{\sqrt[n]{(1/q)} - 1\}$ 的极限为零。如果这个零序列与序列 $\{\sqrt[n]{q}\}$ 逐项相乘，因为 $\sqrt[n]{q} < 1$，所以 $\{\sqrt[n]{q}\}$ 有界。于是乘积序列 $\{1 - \sqrt[n]{q}\}$，从而序列 $\{\sqrt[n]{q} - 1\}$ 是零序列。

2. 如同上面证明的，当 n 趋向无限时，序列 $\{q^{1/n}\}$ 的项以 1 为极限，这里 q 是任意一个正数。因此可以找到一个数 N，使得对于所有 $m > N$，

值 $q^{\pm 1/m}$ 两者都落在 $1-\varepsilon$ 与 $1+\varepsilon$ 之间。对于零序列 $\{a_n\}$，总可以找到一个指标 N_1，使得对于所有 $n>N_1$，a_n 落在 $-1/m$ 与 $+1/m$ 之间，这样对于 $n>N_1$，幂 q^{a_n} 落在 $1-\varepsilon$ 与 $1+\varepsilon$ 之间。因此 $q^{a_n}-1$ 落在 $-\varepsilon$ 与 $+\varepsilon$ 之间，亦即如果 $\{a_n\}$ 是一个零序列，那末 $\{q^{a_n}-1\}$ 是一个零序列。由此得出，如果 $\{a_n\}\to a$，则 $\{q^{a_n}\}$ 收敛于极限 q^a。因为 $q^{a_n}-q^a=q^a(q^{a_n-a}-1)$，这里 $\{a_n-a\}$ 是一个零序列，因此 $\{q^{a_n-a}-1\}$ 也是一个零序列。

> 若 $\{a_n\}\to 0$ 且 q 是正的，则 $\{q^{a_n}\}\to 1$。若 q 是正的且 $\{a_n\}\to a$，则 $\{q^{a_n}\}\to q^a$。若 $\{a_n\}\to a$，$a_n>0$，$a>0$，α 为实数，则 $\{(a_n)^\alpha\}\to a^\alpha$。

下面在4. 中将证明，若 $\{a_n\}\to a$，则对于对数系的任意基 $b>1$，有 $\{\log_b a_n\}\to\log_b a$。如果 α 是任意一个实的常数，那末 $\{\alpha\log_b a_n\}\to\alpha\log_b a$，再如刚才证明的那样有 $\{b^{\alpha\log_b a_n}\}\to b^{\alpha\log_b a}$，因而 $\{a_n^\alpha\}\to a^\alpha$。

3. 序列 $\sqrt[n]{n}$ 收敛于1，亦即 $\{x_n\}=\{\sqrt[n]{n}-1\}$ 是一个零序列。对于 $n\geqslant 2$，它的项 x_n 是正的。从 $(1+x_n)^n=n$，由二项定理得到 $n(n-1)x_n^2/2\leqslant n$，或 $|x_n|\leqslant\sqrt{2/(n-1)}$。如果相应于指定的数 $\varepsilon>0$，选取数 $N(\varepsilon)=2/\varepsilon^2+1$，那末对于所有的 $n>N(\varepsilon)$ 有 $|x_n|<\varepsilon$。

4. 对于对数的任意一个基 $b>1$，$\{(\log n)/n\}$ 是一个零序列；换言之，对于任意的 ε，必定存在数 $N(\varepsilon)$，使得对于所有的 $n>N(\varepsilon)$ 有 $(\log n)/n<\varepsilon$。而

$$(\log n)/n<\varepsilon\leftrightarrow\log n<n\varepsilon\leftrightarrow n<b^{\varepsilon n}\leftrightarrow\sqrt[n]{n}<b^\varepsilon。$$

因为 b^ε 大于1，$\sqrt[n]{n}$ 收敛于1，并且上述论证是可逆的，所以就得出结果。此外，因为 $\log_{1/b}n=-\log_b n$，所以对于 $0<b<1$，序列 $\{(\log n)/n\}$ 也收敛于零。

序列的收敛准则　事实上，按收敛性定义可以检验一个数 a 是不是序列 $\{a_n\}$ 的极限。另一方面，如果不知道这样的数 a，那末用**收敛准则**（**或收敛性检验法**），可以从一般容易验证的一些性质来确定一个序列的收敛或发散。然而，没有一个确定极限的一般方法；只能用对于特定的序列专门构造的各种各样方法来求极限。

收敛性的第一种检验法。单调增加的无界序列，其项取任意大的值；这个序列是**限定发散的**。然而如果单调序列是有界的话，则可证明有极限。

收敛性的第一种检验法：单调有界序列总是收敛的。

数 e 为极限。以 $a_n=(1+1/n)^n$ 的序列 $\{a_n\}$ 单调增加，因为当 $n\geqslant 2$ 时

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= [1+1/(n-1)]^{n-1}=[n/(n-1)]^{n-1} \\ &= [n/(n-1)]^n\cdot(1-1/n)<[n/(n-1)]^n\cdot(1-1/n^2)^n \\ &= [(n+1)/n]^n=(1+1/n)^n=a_n。\end{aligned}$$

应用伯努利 (Bernoulli) 不等式 $1+na<(1+a)^n$，它对于 $a>-1$, $a\neq 1$, $n\geqslant 2$ 成立，现在取 $a=-1/n^2$ 就造成上述不等式。序列 $\{(1+1/n)^n\}$ 是有界的。因为所有的项是正的，零便是一个下界。二项定理给出

$$a_n=(1+1/n)^n=1+\binom{n}{1}\Big/n+\cdots+\binom{n}{k}\Big/n^k+\cdots+\binom{n}{n}\Big/n^n。$$

对于这个和式中的每一项，可得估计为

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\Big/n^k &= (1/k!)(1-1/n)(1-2/n)\cdots[1-(k-1)/n] \\ &\leqslant 1/(2\cdot 3\cdots k)\leqslant 1/2^{k-1},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} a_n=(1+1/n)^n &< 1+1+1/2+1/2^2+\cdots \\ &+1/2^{n-1}<1+1/(1-1/2)=3。\end{aligned}$$

于是这个序列也是有上界的。因而它收敛，并且遵照欧拉的记法，将它的极限记为 e。数 e 夹在所考虑的序列的项与单调减少序列 $\{[1+1/(n-1)]^n\}$ 的项之间，后面这个序列也收敛于 e。然而，e 通常是用级数计算的：

$$e=1+1/1!+1/2!+1/3!+\cdots。$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$	$e=2.718281828459045235 36\cdots$

收敛性的第二种（或柯西）检验法。 收敛性的第一种检验法只适用于单调序列，柯西检验法则对任意序列成立。如果从某个位置 $N(\varepsilon)$ 起，所有可能作出的项对之差小于给定的正数 ε，那末该序列的几乎所有项落在一个 ε 邻域内。至多 $i\leqslant N(\varepsilon)$ 的有限项 a_i 可能落在它的外部。在下面的表达式中，“当且仅当”表明这个检验法既是必要又是充分的。

收敛性的第二种检验法：序列 $\{a_n\}$ 是收敛的，当且仅当相应于任意一个正数 ε，总可选出数 $N(\varepsilon)$，使对大于 $N(\varepsilon)$ 的所有指标 n 与 m，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$。

【例 1】 通项为 $a_n=1+(-1)^n/(2n)$ 的序列 1/2, 5/4, 5/6, 9/8, 9/10, 13/12, 13/14, … 是有界的，但并不单调。第一种收敛检验法不适用。柯西检验法证实这个序列的收敛性，因为，对于所有的 $n>1/\varepsilon$,

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n| &= |1+(-1)^{n+1}/(2n+2)-1-(-1)^n/(2n)|\\ &= |[(-1)^{n+1}\cdot 2n-(-1)^n(2n+2)]/[2n(2n+2)]|\\ &\leqslant |[2n+2n+2]/[2n(2n+2)]|\\ &= |[4n+2]/[4n^2+4n]| \leqslant [4n+4]/[4n^2+4n]=1/n<\varepsilon。\end{aligned}$$

从定义规律显然可见，a_{n+1} 之后的所有元素都落在 a_n 与 a_{n+1} 之间；于是对任意的 n, $m>1/\varepsilon$, 有 $|a_n-a_m|\leqslant|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$。

【例 2】 通项为 $a_n=1+1/2+1/3+\cdots+1/n$ 的序列 1, 1+1/2, 1+1/2+1/3, 1+1/2+1/3+1/4, … 不满足柯西收敛检验法，因为如果选定一个 $\varepsilon<1/2$, 则无论 $N(\varepsilon)$ 多么大，总存在两个数 n, $m>N(\varepsilon)$, 使得 $|a_n-a_m|>\varepsilon$。假设 $m>N$ 而 $n=2m>N$, 于是得到

$$\begin{aligned}|a_n-a_m| &= 1/(m+1)+1/(m+2)+1/(m+3)+\cdots+1/(2m)\\ &> 1/(2m)+1/(2m)+\cdots+1/(2m)\\ &= m\cdot 1/(2m)=1/2>\varepsilon,\end{aligned}$$

这里每一个分数 $1/(m+i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 都被较小的或至多一样大的分数 $1/(2m)$ 代替。

序列的聚点 序列 1+1/2, 2+1/2, 3+1/2, 1+1/3, 2+1/3, 3+1/3, …, $1+1/n$, $2+1/n$, $3+1/n$, … 具有这样的性质，这个序列有无限多项落在数 1, 2 和 3 的每一个邻域内。序列的项凝聚在点 1, 2 和 3 的邻域内，因而这些点称为该序列的聚点。

数 A 称为序列 $\{a_n\}$ 的一个聚点，如果对于任意的正数 ε, 不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 对于无限多的不同项 a_n 满足。

由此得出，序列的极限总是它的一个聚点。另一方面，聚点不一定是极限，因为对于一个聚点 A, 不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 只是对于*无限多个* n 满足；而对于极限 A, 不等式必须对于从一个特定位置 $N(\varepsilon)$ 起的所有 n 满足。因此，收敛序列只能有一个聚点，因为只有有限多项落在极限 L 的每一个 ε 邻域外部，特别地，不可能使无限多项落在 $L'\neq L$ 的每一个 ε 邻域内。下面的定理表明，这个命题的逆命题同样为真。

恰有一个有限聚点的有界序列是收敛的。而如果序列没有有限聚点或者有多于一个聚点，那末它是发散的。

波尔查诺-韦尔斯特拉斯(**Bolzano-Weierstrass**)定理：每一个有界的无限序列至少有一个聚点。

如果 k 是序列的一个下界而 K 是一个上界，那末它的所有项全落在区间 $J_0=[k, K]$ 内。把这个区间一分为二并用 J_1 表示序列有无限多项落在其中的那半个区间(若两半都包含无限多项，则取左半个区间)。对区间 J_1 应用同样的程序，将它二等分并选取半个区间从而给出 J_2，等等。这样构造的**区间套**恰好包含一个实数 A，它是该序列的一个聚点。因为套集的区间长度收敛于零，所以相应于 A 的每一个 ε 邻域，在套集中有这样一个区间，它完全落在这个邻域内，而根据构造法它又包含这个序列的无限多项。

聚点的概念可以延拓到**任意的数集**；波尔查诺-韦尔斯特拉斯定理保证有界的无限数集至少存在一个聚点。它自身不一定是这集合的一个元素；例如，在上面讨论过的例子中，聚点 1, 2, 3 并不属于这个集合。

5.2　级数

级数对于数学的内部结构和对于实际应用都很重要。许多数值方法是以级数理论为基础的：例如，构造对数表和三角函数表以及计算重要的常数如 e 与 π，最好借助于级数来完成(见 II. 第8章)。

级数的概念　古希腊的诡辩学者芝诺(Zenon，公元前五世纪)提出这样一个问题：阿基利斯跑得比乌龟快十二倍，如果阿基利斯让乌龟领先1希里(古希腊的一种长度单位，约606.75英尺)，那末阿基利斯能否追上乌龟？当乌龟爬行了 1/11 希里距离的时候，阿基利斯以乌龟速度的十二倍跑了 $12\cdot1/11=1+1/11$ 希里，亦即乌龟领先以及爬过的路程；于是，阿基利斯追上了乌龟。不过，芝诺争辩说，当阿基利斯跑完1希里时，乌龟爬行了 1/12 希里；当阿基利斯再跑过这十二分之一时，乌龟仍然领先 $1/12^2$ 希里；当阿基利斯又跑完这段距离时，乌龟还是在他前面 $1/12^3$ 希里，等等。因此阿基利斯到追赶乌龟所走过的距离可表达成形式 $1+1/12+1/12^2+1/12^3+\cdots$ 这里点点点表示每一项 $a_k=1/12^{k-1}$，跟着有另一项 $a_{k+1}=1/12^k$，表达式不得中断。这样一个表达式就称做**无限级数**。芝诺以为通过这个例子他已在形式思维中找到了一个矛盾，因为在他看来无限级数的值无疑要大于任何一个量，以致阿基利斯永远不能赶上乌龟。然而，由他正确无误地提出的这个级数是一个几何级数，而根据几何级数的

规则，其和为 12/11。

所谓无限级数(或简称级数)是指形如$a_1+a_2+a_3+\cdots$的一个表达式，缩写成$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$，其中a_i是无限数列$\{a_n\}$的项。

连加号的使用。为了将和记成缩写形式，使用希腊字母Σ，例如$b_1+b_2+\cdots+b_n=\sum_{i=1}^{n}b_i$(读作对$i$等于1到$n$，$b_i$的和)。条件为"$i$等于1到$n$"的符号$\Sigma$其加法意味着，和式的各项是由求和指标$i$相继取从1到$n$的所有自然数所给定的。例如，$\sum_{i=1}^{5}1/i^2=1/1^2+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2$。这个符号也用来将无限级数记成缩写形式。例如，由芝诺得出的级数记为$1+1/12+1/12^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}1/12^i$。符号$\infty$意味着级数没有中断。当级数写成各项和的时候，求和指标就不再出现，因此记为i，k还是任何别的字母都无关紧要。级数的首项给以下标为0常常方便，于是级数具有形式$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$。

收敛与发散，级数的和 已经讲过，可以将值12/11与级数$\sum_{i=0}^{\infty}1/12^i$关联起来。为了能判定一个值可否与级数$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$关联起来，通常由级数的项$a_i$构成它的部分和序列$\{S_n\}$。当且仅当其部分和序列收敛，譬如说收敛于极限$S$，这个值即$S$才归于该级数。这时就说：该级数收敛并有和$S$。

	部分和序列	
a_1	$s_1=a_1$	$=\sum_{i=1}^{1}a_i$
a_2	$s_2=a_1+a_2$	$=\sum_{i=1}^{2}a_i$
a_3	$s_3=a_1+a_2+a_3$	$=\sum_{i=1}^{3}a_i$
⋮	⋮	⋮
a_n	$s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$	$=\sum_{i=1}^{n}a_i$

当且仅当其部分和序列收敛，称无限级数$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$是收敛的。部分和序

列的极限 S 就称做这个级数的和

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots \quad \text{或} \quad S=\sum_{i=1}^{\infty} a_i。$$

另一方面，如果给定级数的部分和序列发散，就称这个级数是发散的；它没有和。

选用级数的和这个名词仅仅是由于它在形式上与有限项和的相似性，它只不过是部分和序列的极限这个概念的同义词。在芝诺级数中，它的部分和序列通项 s_n 有值 $s_n=(12/11)(1-1/12^n)$（见有限几何级数的和），从而收敛于极限

$$S=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}(12/11)(1-1/12^n)=12/11。$$

【例】　如果单位面积的正方形，如图 5.2-1 中那样反复地等分，那末造成的矩形面积可以看作无限级数 $1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n+\cdots$ 的项。

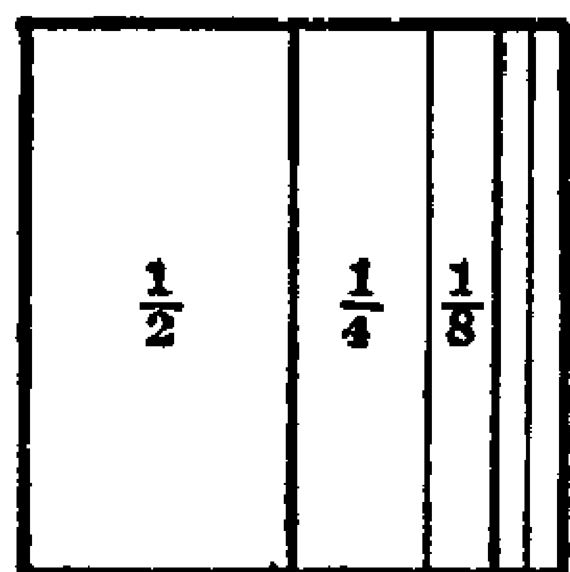


图 5.2-1　级数 $1/2+1/4+1/8+\cdots$ 的收敛性

几何上想象这个级数有和 1。因为这个给定级数的部分和序列是 1/2, 3/4, 7/8, …, $(2^n-1)/2^n$, …，它确实收敛于极限

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}(2^n-1)/2^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}(1-1/2^n)=1。$$

甚至在 18 世纪，这些概念还没有弄清楚。例如，无限级数 $1-1+1-1+1\cdots$ 或写成 $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$，或写成 $1-(1-1)-(1-1)-\cdots$，就有相应的和 0 或 1。但是它的部分和序列 $s_1=1$, $s_2=0$, $s_3=1$, $s_4=0$, … 发散，因而这个级数没有和。

算术级数　在算术级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 中，a_i 是算术序列 $\{a_n\}$ 的项。显然每一个无限的算术级数是发散的。只有它的第 n 个部分和 $s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$（称为有限算术级数），才是有意义的。当高斯九岁的时候，他的教师给全班出了一道题：将 1 到 100 的所有整数一起相加的题。然而，教师还没来得及坐下，幼小的高斯已把他的石板放在讲台上。当教师发现这交来的第一块石板上只有一个数即正确答案 5050 的时候就越发吃惊了。高斯在他的头脑里借助于下面所示的格式算得了这个答案。

教师意识到，高斯在他教的算术课中学不到更多的东西了，于是为高

斯从汉堡弄来了一本专门算术书:《雷默算术》。高斯的观念可以应用于每一个有限算术级数。

$$\begin{array}{r}s_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+(a_1+[n-1]d)\\ s_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+(a_n-[n-1]d)\\ \hline 2s_n=n(a_1+a_n)\quad \text{或}\quad s_n=n(a_1+a_n)/2\end{array}$$

$$\begin{array}{r}1+\ 2+\ 3+\cdots+50+\\ 100+99+98+\cdots+51\\ \hline 50\times 101=5050\end{array}$$

有限算术级数	首项 a_1, 尾项 $a_n=a_1+(n-1)d$, 公差 d, 和 $S_n=n(a_1+a_n)/2=na_1+dn(n-1)/2$

从这个求和公式可以看到，在数 a_1, a_n, d, n 与 s_n 中必须给出三个数;其余的数则可从线性方程或二次方程算出。

【例 1】　如果已知有限的算术级数 $a_1=3$, $a_n=43$ 以及 $d=5$, 那末项数 n 与和 s_n 可以算出来。

$$a_n=a_1+(n-1)d\rightarrow 43=3+(n-1)\cdot 5\rightarrow n=9;$$

$$s_n=n(a_1+a_n)/2\rightarrow s_9=9(3+43)/2=207。$$

【例 2】　由 $d=12$, $s_n=180$ 与 $a_n=60$, 可以求得首项 a_1 与项数 n:

$$a_1=a_n-(n-1)d;\quad s_n=(n/2)(a_1+a_n)$$

$$\rightarrow s_n=(n/2)[2a_n-(n-1)d]$$

$$\rightarrow 180=(n/2)[120-(n-1)\cdot 12]$$

$$\rightarrow n^2-11n+30=0。$$

这个二次方程有解 $n_1=6$, $n_2=5$。从 $n_1=6$ 得 $a_1=0$, 而由 $n_2=5$ 得 $a_1=12$。有限级数 $12+24+36+48+60$ 与 $0+12+24+36+48+60$ 两者都对应于给定的值。

几何级数　在几何级数 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 中，a_i 是一个几何序列 $\{a_n\}$ 的项。

$$\begin{array}{r}s_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}\\ qs_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n\\ \hline s_n-qs_n=a_1-a_1q^n\quad \text{或}\quad s_n=a_1(1-q^n)/(1-q)\end{array}$$

部分和序列的第 n 项 S_n, 常常也记作有限几何级数 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 的和，它用下边

的格式得到：

有限几何级数	首项 a_1，尾项 $a_n=a_1q^{n-1}$，公比 q， 和 $s_n=a_1(1-q^n)/(1-q)=a_1(q^n-1)/(q-1)$，$q\neq1$。

从这个求和公式可以看到，在数 a_1，a_n，q，n 与 s_n 中必须给出三个数，而其余的数则可出算。然而，在此过程中可能出现指数方程或 n 次方程。

【例1】 如果在几何级数中，给出首项 $a_1=2$，公比 $q=5$ 以及和 $s_n=976562$，那末项数 n 可以计算：

$$s_n=a_1(q^n-1)/(q-1)\to976562=2(5^n-1)/(5-1)\to5^n=1953125,$$

这个指数方程有解 $n=9$。该级数有九项。

【例2】 据阿拉伯历史学家贾奎比(Jáqubi)说，国际象棋的发明者曾要求波斯国王按如下计算的麦粒数作为奖赏：在棋盘64个方格中，第一格上放1粒，第二格上放2粒，第三格放4粒，等等；在每个方格上放的麦粒是前一格上麦粒数的两倍。根据公式，麦粒的总数

$$s_n=a_1(q^n-1)/(q-1),$$

于是得 $$s_{64}=1(2^{64}-1)/(2-1)=2^{64}-1\approx1.84\times10^{19}。$$

假定地球的表面(大约为 13×10^{10} 英亩)成为每英亩产1.6吨的巨大麦田，再假定每吨2千万粒，那末四次的收获仍不足以达到所要求的数量。

无限几何级数 对于 $q\neq1$，和 $s_n=a_1(1-q^n)/(1-q)$ 是部分和序列的第 n 项。数 a_1 与 q 是常数，因而这个序列的收敛性仅仅取决于 $(1-q^n)$ 的大小。对于 $q>1$ 以及 $q<-1$，序列 $\{q^n\}$ 是发散的，所以这个几何级数也没有和。对于 $|q|<1$，$\{q^n\}$ 是一个零序列，所以 $\{1-q^n\}$ 有极限1。在这种情况下，这个几何级数收敛并有和 $s=a_1/(1-q)$。

无限几何级数	$s=a_1/(1-q)$，　$|q|<1$。

【例1】 每一个循环十进小数显然可以表示为一个收敛的几何级数。求和公式能将十进小数转换成为普通分数。例如，十进小数 0.2525… 对应于首项为 $a_1=25/100$ 与公比为 $q=1/100$ 的级数 $25/100+25/10000+\cdots$；它有和 $S=25/99$。

【例 2】 过点O画 6 条直线，每相邻的一对直线夹一角$\alpha=30^\circ\triangleq\pi/6$。从其中一条直线上与点$O$相距为$a$的点$P_1$向相邻的直线画垂线，从它的垂足$P_2$对下一条直线画垂线，等等(见图 5.2-2)。相继的垂线形成绕点O并朝O螺旋收缩的多角形弧$|P_1P_2|+|P_2P_3|+\cdots$。垂线$|P_iP_{i+1}|$有长度l_i，其中

$l_1=a\sin(\pi/6)$,

$l_2=a\sin(\pi/6)\cos(\pi/6)$,

$l_3=a\sin(\pi/6)[\cos(\pi/6)]^2,\cdots$

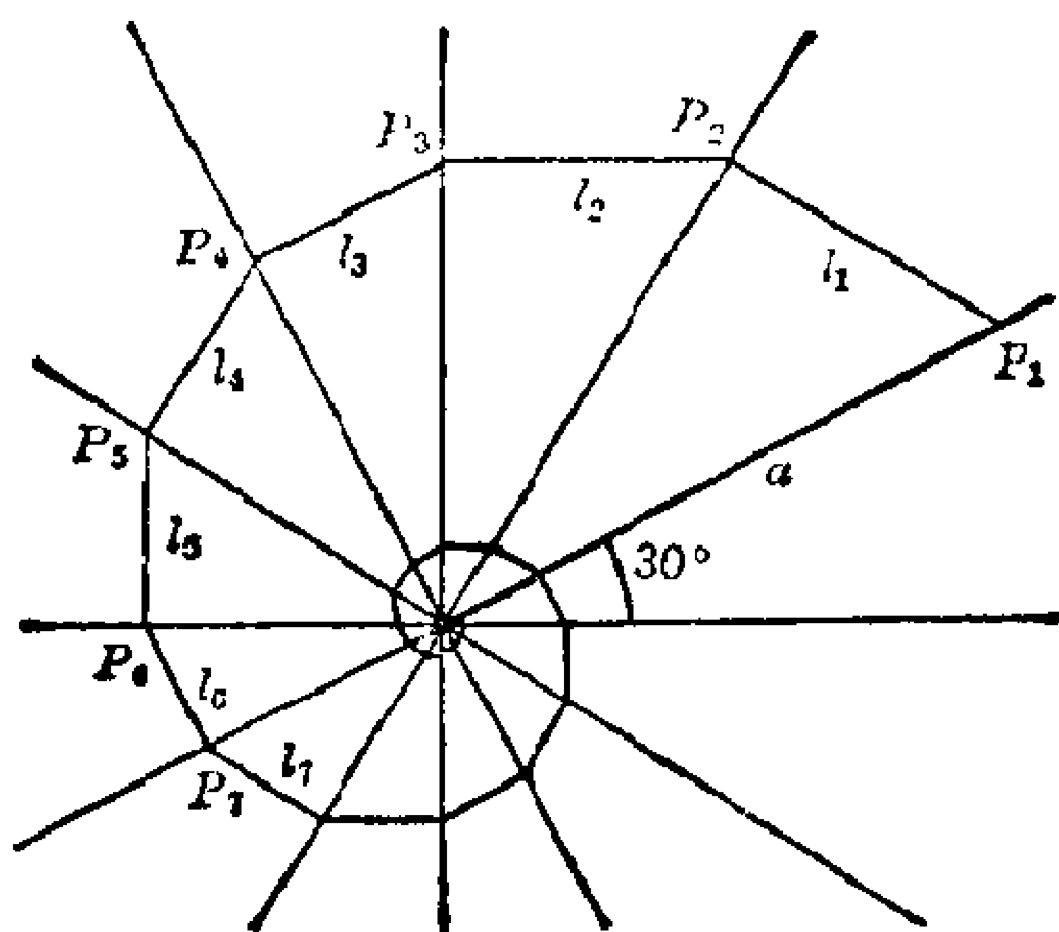


图 5.2-2　几何级数的和

级数$l_1+l_2+l_3+\cdots$是以$a_1=a\sin(\pi/6)$以及$q=\cos(\pi/6)$的一个几何级数；因为$\cos(\pi/6)<1$，所以它收敛且有和

$$s=a\sin(\pi/6)/[1-\cos(\pi/6)]$$

$$=(a/2)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=a(2+\sqrt{3})。$$

正项级数的收敛检验法　一个给定的级数是否收敛？若收敛，它的和是多少？这两个问题象对于序列一样，在这里起着特别重要的作用。能用来判定一个级数收敛性态的那些定理，称做**收敛性准则**，或**收敛检验法**。要区分必要条件、充分条件以及既必要又充分的那些条件。一个**必要条件**导致几种可能性。不满足必要条件的级数一定发散。另一方面，如果这个条件满足，那末级数**可能收敛但不一定收敛**。如果级数满足一个**充分条件**，它一定收敛；但若不满足这个条件，它也许**仍然收敛**。只有当满足一个充分条件或者不满足一个必要条件时，才可引出确定的结论。因而最有用的准则是那些**充分必要条件**，因为它们能立即分清收敛与发散。

一个级数，如果它的部分和序列收敛，换句话说，如果从某个指标n_0起，所有它的部分和全落在极限S的ε邻域内，那末这个级数收敛。但部分和s_{n+1}是由s_n加上a_{n+1}而产生的。因此部分和序列$\{s_n\}$收敛的一个必要条件是级数项的序列$\{a_n\}$是一个零序列。

就级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$收敛而言，它的项构成一个零序列，或$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$这个条件是必要的，但一般说来并不是充分的。

收敛性的第一种主要检验法：正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛的充分必要条件是它的部分和序列有界。

因为级数只有正项，所以部分和序列单调增加。如果它还是有界的，那末根据序列的第一种收敛检验法，它必定收敛。因为这个准则并不要求严格单调的性态，所以这个命题对于非负项的级数也成立。

【例1】 调和级数 $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i = 1+1/2+1/3+1/4+\cdots$ 的项构成一个零序列；但是级数本身发散，因为它的部分和序列 $\{s_n\}$ 无界。当 $n>2^m$ 并且 $m>2C$ 时，s_n 就大于任给的数 C：

$$s_n>(1+1/2)+(1/3+1/4)+(1/5+\cdots+1/8)+\cdots+(\cdots+1/2^m)$$
$$>1/2+2\cdot(1/4)+4\cdot(1/8)+\cdots+2^{m-1}(1/2^m)=m/2;\ \ s_n>C。$$

【例2】 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[(n-1)n]=1/(1\cdot2)+1/(2\cdot3)+1/(3\cdot4)+\cdots$ 的第 n 个部分和为

$$s_n=1/(1\cdot2)+1/(2\cdot3)+\cdots+1/[n(n+1)]$$
$$=(1-1/2)+(1/2-1/3)+(1/3-1/4)+\cdots$$
$$+[1/n-1/(n+1)]=1-1/(n+1)。$$

因为 $\{1/(n+1)\}$ 是一个零序列，所以序列 $\{S_n\}=\{1-1/(n+1)\}$ 有界。给定的级数收敛且有和1。

比较检验法。一个级数，其项不小于给定正项级数的相应项时，就说它**控制**或**优势**于给定级数。如果它收敛，那末根据第一种收敛检验法，它的部分和序列是有界的。它控制着给定级数的这事实蕴涵着那个级数的部分和序列也是有界的。因此它也收敛。用完全相同的方式可以得出结论：给定的正项级数发散，如果有一个相应的发散的比较级数，其项不大于给定级数的项。称这个比较级数**从属**于给定级数。

级数收敛的一个充分条件是它为一个收敛的级数所控制的；级数发散的一个充分条件是它控制一个发散的级数。

<table>
<tr><td>$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n,\ \sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ 发散</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} 1/[n(n+1)],\ \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 收敛</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛，当 $\alpha\leqslant1$ 时发散</td></tr>
</table>

为了能用比较检验法，必须具有足够多可供利用的已知其收敛或发散的级数。$\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{\alpha}$ 形式的级数常常可用作比较级数。级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$ 收敛，因为 $1/n^2=1/(n\cdot n)<1/[(n-1)n]$，从而它被收敛级数 $\sum_{n=2}^{\infty}1/[(n-1)n]$（见例 2）所控制。对于 $\alpha\geqslant 2$，因为 $1/n^{\alpha}\leqslant 1/n^2$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{\alpha}$ 收敛。又因为 $1/n\leqslant 1/\sqrt{n}$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/\sqrt{n}=1+1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3}+\cdots$ 控制发散的调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$，从而它发散。因为对于所有的 $\alpha\leqslant 1$，$1/n\leqslant 1/n^{\alpha}$，所以对于每一个 $\alpha\leqslant 1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{\alpha}$ 发散。对于 $\alpha\geqslant 2$，级数的收敛性已经证实。对于 $1<\alpha<2$，可以找控制的几何级数。如果 k 是一个整数，使 $2^k>n$，那末

$$\begin{aligned}s_n-s_{2k-1}&=1+(1/2^{\alpha}+1/3^{\alpha})+(1/4^{\alpha}+1/5^{\alpha}+1/6^{\alpha}+1/7^{\alpha})+\cdots\\&\quad+(1/(2^{k-1})^{\alpha}+\cdots+1/(2^k-1)^{\alpha})\\&\leqslant 1+2/2^{\alpha}+4/4^{\alpha}+\cdots+2^{k-1}/(2^{k-1})^{\alpha}\\&=1+1/2^{\alpha-1}+1/(2^{\alpha-1})^2+\cdots+1/(2^{\alpha-1})^{k-1}。\end{aligned}$$

这是一个几何级数，公比为 $q=1/2^{\alpha-1}$，对于 $1<\alpha<2$，它小于 1。于是这个几何级数收敛，因而给定的级数也收敛。

比率检验法：如果 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 是正项级数并且如果存在一个小于1的正数 q，使从某个指标 n_0 起 $a_{n+1}/a_n\leqslant q$，那末这个级数收敛。另一方面，如果从 n_0 起 $a_{n+1}/a_n\geqslant 1$，那末这个级数发散。

根据假设：

$$a_{n_0+1}/a_{n_0}\leqslant q\to a_{n_0+1}\leqslant qa_{n_0}$$

$$a_{n_0+2}/a_{n_0+1}\leqslant q\to a_{n_0+2}\leqslant q\,a_{n_0+1}\leqslant q^2a_{n_0}$$

等等。由此得出，从第 n_0 项起，给定级数的余项构成的级数为几何级数 $\sum_{i=1}^{\infty}a_{n_0}q^i$ 所控制。而这个剩余级数的收敛性决定给定级数的收敛性，因此当 $q<1$ 时它收敛。另一方面，如果 $a_{n+1}/a_n\geqslant 1$，从而 $a_{n+1}\geqslant a_n>0$；这个级数的项并不构成一个零序列，因而级数必定发散。这条件是*充分的*。如果它不满足，关于级数的收敛或发散不能下结论。例如若商小于 1，但却不小于一个小于 1 的固定数 q，就呈现上面所说的情况。已知发散的调和级数其相继两项的比率是 $a_{n+1}/a_n=n/(n+1)<1$，但不成立 $n/(n+

1)$\leqslant q<1$。不过对于收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$，$a_{n+1}/a_n=(n/(n+1))^2<1$，但也不成立$(n/(n+1))^2\leqslant q<1$。在两种情况下都是$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n=1$。

$$\text{如果}\lim_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n=k\text{，那末级数}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\begin{cases}\text{收敛，当 }k<1\text{ 时}\\ \text{发散，当 }k>1\text{ 时}\end{cases}$$

如果序列$\{a_{n+1}/a_n\}$“从左边”趋向1，则比率检验法失效。

【例】　级数$\sum_{n=1}^{\infty}n!/n^n=1!/1+2!/2^2+3!/3^3+4!/4^4+\cdots$收敛，因为$a_n=n!/n^n$，$a_{n+1}=(n+1)!/(n+1)^{n+1}$，对于所有$n$，给出$a_{n+1}/a_n=[(n+1)!n^n]/[(n+1)^{n+1}n!]=[(n+1)n^n]/[(n+1)^{n+1}]=[n/(n+1)]^n=1/(1+1/n)^n\leqslant 1/2<1$。

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!/n^n\quad\text{收敛}$$

根式检验法：如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一个正项级数，并且如果存在正数$q<1$，使从某个指标n_0起$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q$，那末这个级数收敛；另一方面，如果从某个指标n_0起$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$，那末这个级数发散。

如果对于所有的$n\geqslant n_0$，$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q<1$，那末收敛的几何级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}q^n$控制给定级数的剩余级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$。然而如果$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$，则此级数的项不构成一个零序列。这条件是*充分的*。例如若$\sqrt[n]{a_n}$“从左边”趋向1，它就失效。

$$\text{若}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k\text{，则级数}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\begin{cases}\text{收敛，当 }k<1\text{ 时}\\ \text{发散，当 }k>1\text{ 时}\end{cases}$$

【例1】　对于每一个固定的$a>0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a^n/n^n$收敛。对于所有的$n>2a$，$\sqrt[n]{a^n/n^n}=a/n$小于1/2。按根式检验法，$\sum_{n=1}^{\infty}(a^n/n^n)$收敛。

【例 2】 对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-1/n)^n$，根式检验法失效，因为$\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/n)=1$。然而，可以证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/n)^n=1/e$。于是这个级数的项$a_n$不构成一个零序列，所以级数发散。

任意项级数的收敛检验法　对于级数$\sum a_n$的部分和序列$\{s_n\}$应用序列的第二种或称柯西收敛检验法，得到级数收敛性的第二种检验法。

收敛性的第二种主要检验法：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，当且仅当对于任意的一个正数$\varepsilon$，相应有整数$N(\varepsilon)$，使对所有的$n>N(\varepsilon)$以及所有的$p\geqslant 1$成立

$$|s_{n+p}-s_n|=|a_{n+1}+a_{n-2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon。$$

当然，这个检验法不容易掌握。比较简单的是$\sum a_n$的收敛性由控制它的$\sum|a_n|$的收敛性来证实。另一方面，如果控制级数发散，那末对于给定级数不能下结论。尽管如此，关于发散性的下列命题是正确的，因为满足这些条件之一的级数项不构成零序列，因此破坏了收敛性的必要条件。

任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，如果满足下列条件之一：

对于所有的$n\geqslant n_0$，$|a_{n+1}/a_n|\leqslant q<1$；$\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|<1$；对于所有的$n\geqslant n_0$，$\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant q<1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$。

另一方面，如果满足下列条件之一，级数就发散：

对于所有的$n\geqslant n_0$，$|a_{n+1}/a_n|\geqslant 1$；对于所有的$n\geqslant n_0$，

$$\sqrt[n]{|a_n|}\geqslant 1;\quad \lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|>1;\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1。$$

收敛性的莱布尼茨检验法：交错级数收敛，如果其项的绝对值构成一个单调的零序列。

如果交错级数写成形式$a_1-a_2+a_3-a_4\cdots$，则a_i记项的绝对值。它的部分和子列$s_2, s_4, s_6, \cdots, s_{2n}, \cdots$是单调增加的，因为$s_{2k+2}=s_{2k}+(a_{2k+1}-a_{2k+2})\geqslant s_{2k}$。在括弧中的表达式是非负的，因为该项的绝对值序列$\{a_i\}$单调减少。同理，从

$$s_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}$$

得出$s_{2n}<a_1$。作为单调增加的有界序列，$\{s_{2n}\}$有极限s。然后得出子

列s_1, s_3, s_5, $\cdots$, s_{2n+1}, $\cdots$有同一极限。因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}+a_{2n+1})=s$。于是，部分和序列$\{s_n\}$收敛。这些论证还表明，序列$\{|a_n|\}$不一定是**严格减少的**。

【例 1】　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n=1-1/2+1/3-1/4+\cdots$是收敛的(它的和是$\ln 2$)。

【例 2】　交错级数$1-1/5+1/2-1/5^2+1/3-1/5^3+1/4-\cdots$发散。其项的绝对值构成一个零序列，但这个序列不单调。第$(2n)$个部分和可整理如下：

$$s_{2n}=(1+1/2+1/3+\cdots+1/n)-(1/5+1/5^2+\cdots+1/5^n)$$

随着n增大，第一部分将超过一切有限数，而第二部分作为一个几何级数趋于有限的极限。

收敛级数的运算　对于有限和来说有效的运算规则只能部分地应用于收敛的无限级数(见下面的定理1, 2, 3)；有一些只能应用于满足较强收敛条件的级数。

1. **一个收敛级数，如果在不变更项的次序情况下，任意地将某些项括在一起，则其收敛性和极限不变。**

如果有$S=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=a_1+a_2+a_3+\cdots$，那末也有$S=\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，其中$A_1=(a_1+a_2+\cdots+a_{r_1})$，$A_2=(a_{r_1+1}+a_{r_1+2}+\cdots+a_{r_2})$，$A_3=(a_{r_2+1}+\cdots+a_{r_3})$，$\cdots$。这因为级数$\Sigma A_i$的部分和序列$\{s'_n\}$是级数$\Sigma a_i$的部分和序列$\{s_n\}$的一个子序列，从而已知它与$\{s_n\}$有同一极限。

2. **如果收敛于和s的级数，其各项a_i乘以一个常数c，那末所造成的级数收敛于和cs。**

如果c是常数并且$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=s$，则$\sum\limits_{i=1}^{\infty}ca_i=cs$。

根据序列的一个定理，$\{s_n\}\to s$蕴涵着$c\{s_n\}\to cs$。

3. **收敛级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=A$与$\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i=B$逐项相加给出级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)$，它也收敛且有和$A+B$。**

如果$\{A_n\}$与$\{B_n\}$是级数Σa_i与Σb_i的部分和序列，那末根据序列的一个定理，$\{A_n\}\to A$并且$\{B_n\}\to B$蕴涵着$\{A_n+B_n\}\to A+B$。

绝对收敛。称任意项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 绝对收敛，如果其绝对值的级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ 收敛。

级数 $1-1/2+1/3-1/4+\cdots$ 不是绝对收敛的，因为这个绝对值的级数是发散的调和级数。如果级数 Σa_i 与 $\Sigma |a_i|$ 有和 s 与 S，那末因为 $|s_n| = |a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| < S$，由此显然得出 $|s| \leqslant S$。

级数的重排。现在的问题是，对有限和成立的交换律在怎样的限度上对无限级数也有效。设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个级数而 $(k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots)$ 是具有这样性质的自然数列，即它包含每一个自然数而无重复。于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ 叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排。例如，级数

$1-1/2+1/3-1/4+1/5-\cdots$ 以及 $1+1/3-1/2+1/5+1/7-1/4+\cdots$ 彼此是由重排而得的。这两者都收敛，但收敛于不同的和 s_1 与 s_2。这表明在重排级数时必须谨慎。

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+1/7-\cdots \\
&= 1-1/2+1/3-(1/4-1/5)-(1/6-1/7)-\cdots \\
&= 10/12-(1/4-1/5)-(1/6-1/7)-\cdots < 10/12
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
s_2 &= 1+1/3-1/2+1/5+1/7-1/4+\cdots \\
&= (1+1/3-1/2)+(1/5+1/7-1/4)+(1/9+1/11-1/6)+\cdots \\
&= 5/6+13/140+(1/9+1/11-1/6)+\cdots > 11/12,
\end{aligned}
$$

因为表达式 $[1/(2n-3)+1/(2n-1)-1/n] = (4n-3)/[(2n-3)(2n-1)n]$ 总是正的。

这种其和依赖于项次序的收敛级数称为**条件收敛级数**。无论怎样重排依然收敛并有同一和的级数称为**无条件收敛级数**。级数运算的重要问题是怎样能区别无条件收敛级数与条件收敛级数，换言之，如何认识一个级数是否可以不管其项的次序。这个问题由下述定理以极简单的方式作出回答：

每一个绝对收敛级数也是无条件收敛的；每一个收敛但不是绝对收敛的级数只是条件收敛的。

这个定理的第一部分容易论证。首先，如果 Σa_n 是非负项的绝对收敛级数而 Σa_{k_n} 是由重排得到的一个级数，那末前一个级数的部分和 s_n

与重排级数的 s'_n 满足不等式

$$s'_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_n} \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_N = s_N < s_{\circ}$$

只要 N 选得足够大，使得所有的 $k_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 都出现在数 1, 2, $\cdots$, N 中间。这样，重排级数 Σa_{k_n} 的部分和序列 $\{S'_n\}$ 是有界的，从而由收敛性的第一种主要检验法得出这个重排级数的收敛性。现在如果 Σa_n 是任意项绝对收敛级数而 Σa_{k_n} 是它的一个重排级数，那末 $\Sigma |a_n|$ 是一个非负项绝对收敛级数；正如已经证明的那样，得到 $\Sigma |a_{k_n}|$ 的收敛性，而这蕴涵着 Σa_{k_n} 的收敛性。

重排也不影响和。因为 Σa_n 假定为绝对收敛的，相应于任意的 $\varepsilon > 0$，可以选取数 m，使对于所有 $k \geqslant 1$，

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_{m+k}| < \varepsilon_{\circ}$$

现在如果 N 选得足够大，使得所有的指标 1, 2, $\cdots$, m 出现在 $k_1, k_2, \cdots, k_N$ 中间，那末当 $n > N$ 时，差 $|s'_n - s_n|$ 只包含 $i > m$ 的项 a_i，由此得出对于所有的 $n > N$，$|s'_n - s_n| < \varepsilon$。因此

$$s' = \lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty}[s_n + (s'_n - s_n)]$$
$$= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty}(s'_n - s_n) = s + O = s_{\circ}$$

为了证明定理的第二部分，可证由收敛但不是绝对收敛的级数 Σa_n，通过适当的重排能构成发散的或收敛于任意指定的和的种种级数。

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} + & a_{12} + & \cdots & + a_{1i} + & \cdots & = z_1 \\
a_{21} + & a_{22} + & \cdots & + a_{2i} + & \cdots & = z_2 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{k1} + & a_{k2} + & \cdots & + a_{ki} + & \cdots & = z_k \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{array}$$

另一方面，绝对收敛级数可以在更加一般的意义下重排，而不影响它们的收敛性或它们的和。设 Σa_n 是一个绝对收敛级数，上边的格式表示给定级数 Σa_n 的部分级数的一个无限序列，它具有这样的性质，级数 Σa_n 的每一项只严格出现在一个部分级数中（例如，a_{ki} 是在第 k 个部分级数中的第 i 项）。然后由给定的绝对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 通过"在拓广意义下的重排"而得到级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{k}$。这时 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ 也是绝对收敛的且有与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 相同的和 s。

值得注意的是，在某些条件下，这个定理的逆定理也成立。亦即一系列绝对收敛的部分级数项可按任意方式放在一起而构成一个级数，而所有可能按此方式造成的级数是收敛的且有同一个和。这就是柯西的强重排定理。

强重排定理。假设下方的阵列是一系列绝对收敛级数亦即对于 $k=1, 2, \cdots$，级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ki}|$ 收敛且有和记为 ζ_k。此外，如果 $\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k$ 收敛，那末在给定阵列的同一列中自上而下出现的各项也构成绝对收敛级数。如果记 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}=S_i$，那末级数 $\sum_{i=1}^{\infty}S_i$ 也绝对收敛，并且 $\sum_{i=1}^{\infty}S_i=\sum_{k=1}^{\infty}z_k$。于是，行和的级数与列和的级数两者都绝对收敛并且有相同的和。

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_{11}&+&a_{12}&+\cdots+&a_{1i}&+\cdots&=&z_1\\
a_{21}&+&a_{22}&+\cdots+&a_{2i}&+\cdots&=&z_2\\
\vdots&&\vdots&\cdots&\vdots&\cdots&&\vdots\\
a_{k1}&+&a_{k2}&+\cdots+&a_{ki}&+\cdots&=&z_k\\
\vdots&&\vdots&\cdots&\vdots&\cdots&&\vdots
\end{array}$$

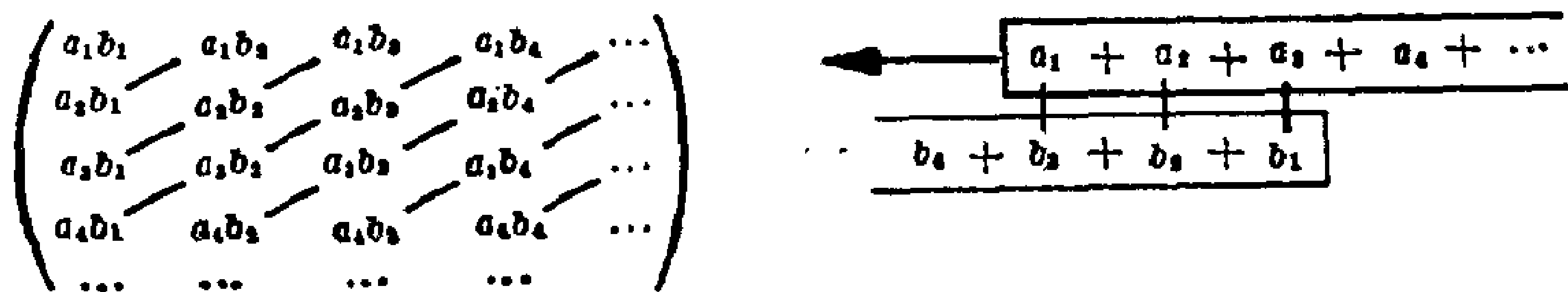
为了证明这一定理，以任意方式将在给定阵列中出现的所有项 a_{ki} 放在一起而构成一个序列记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$。于是级数 Σa_n 绝对收敛，因为如果 N 选得足够大，使得项 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全部出现在阵列的前 N 行之中，那末有

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\leqslant\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_N。$$

因为 $\Sigma\zeta_k$ 假定为收敛的，所以不等式右边是有界的，由此得出左边的级数 $\Sigma|a_n|$ 的第 n 个部分和也有界，因而 Σa_n 绝对收敛。作为 Σa_n 的部分级数，"列级数" $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}=S_i$ 也是绝对收敛的，而且 $|S_i|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ki}|$。由此得出，$\sum_{i=1}^{\infty}S_i$ 的第 n 个部分和肯定不超过级数 $\Sigma|a_n|$ 的和；而这意味着 ΣS_i 绝对收敛。最后，级数 ΣS_i 与 Σz_k 有同一和，因为每个和都等于 Σa_n 的和。由于 Σa_n 的绝对收敛性，按照第二种主要检验法可以选取指标 m，使得对于所有的 $k\geqslant1$，$|a_{m+1}|+|a_{m+2}|+\cdots+|a_{m+k}|<\varepsilon$。现在确定 N，使得项 $a_1, a_2, \cdots a_m$ 全部出现在上述阵列的前 N 行中。用 σ_n 记级数 Σa_n 的第 n 个部分和，对于所有的 $n\geqslant N$，差 $\left|\sum_{k=1}^{n}z_k-\sigma_n\right|$

小于 ε，因为只有 $r>m$ 的那些项 $\pm a_r$ 出现在这个表达式中。于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}z_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=S$。对于列级数进行类似计算产生 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}S_i=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=S$。

级数的乘法。如果用级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i$ 的每一项乘以级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ 的每一项，那末得到如下阵列所示的部分乘积。阵列的每一行包含着无限多项全以同一个 a_i 为因子，每一列包含着无限多项全以同一个 b_i 为因子。现在定义两个级数的乘积为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k$，其中 c_k 是阵列所示的第 k 条对角线上的部分乘积的和。例如，$c_1=a_1b_1$，$c_2=a_1b_2+a_2b_1$，$c_3=a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$，…，$c_k=\sum\limits_{i+j=k+1}a_ib_j$，…这些部分乘积可由平移方法求得，将一个级数以相反次序写出，将另一个级数写在纸条上沿着前一个级数移动。图中正指着乘积级数第三个项的位置 $c_3=a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$。



如果级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=A$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i=B$ 两者都是绝对收敛的，那末以 $c_k=\sum\limits_{i+j=k+1}a_ib_j$ 的乘积级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k$，也绝对收敛且有和 $c=AB$。

下面的例子表明，两个“因子级数”的收敛性不足以保证乘积级数的收敛性。

【例】　收敛但不是绝对收敛的级数

$$1-1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3}-1/\sqrt{4}+\cdots$$

其平方级数是发散的，因为它的项并不构成一个零序列。这个级数自乘的通项 c_n 满足

$$\begin{aligned}|c_n|&=1\cdot[1/\sqrt{n}]+[1/\sqrt{2}]\cdot[1/\sqrt{n-1}]\\&\quad+[1/\sqrt{3}]\cdot[1/\sqrt{n-2}]+\cdots+[1/\sqrt{n}]\cdot 1\\&\geqslant[1/\sqrt{n}]\cdot[1/\sqrt{n}]+[1/\sqrt{n}]\cdot[1/\sqrt{n}]+\cdots\\&\quad+[1/\sqrt{n}]\cdot[1/\sqrt{n}]=1。\end{aligned}$$

5.3 函数的极限——连续性

要是没有函数的极限与连续性概念，就不可能有高等分析的严格结构。如果一个函数描述一种物理情况，那末极限与连续性概念也具有物理意义。

函数的极限

在一点的极限 可以把函数 $y=f(x)$ 的极限概念与序列的极限概念联系起来。为此让自变量 x 遍及一个趋于极限 a 的收敛数列 $\{x_n\}$（横坐标序列），并考虑相应于 x_i 的函数值 $f(x_i)$ 的纵坐标序列 $\{f(x_n)\}$。如果纵坐标序列 $\{f(x_n)\}$ 的收敛性态依赖于横坐标序列的选取，亦即如果两个都收敛于 a 的不同的横坐标序列，其相应的纵坐标序列收敛于不同的极限，或者一个纵坐标序列发散，那末当 x 趋于 a 时，函数 $f(x)$ 并不趋于一个极限。另一方面，如果对于每一个趋于 a 的横坐标序列 $\{x_n\}$，纵坐标序列 $\{f(x_n)\}$ 都趋向于 L，那就说当 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 有极限 L。这意味着自变量 x 越接近于值 a，函数值 $f(x)$ 就越接近于数 L。函数值与极限之差 $|f(x)-L|$ 可小于任意选定的正数 ε，只要 x 不同于 a 其差值小于一个适当选定（依赖于 ε）的数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，亦即 $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$（见图 5.3-1）。数 $\delta(\varepsilon)$ 决不是用唯一确定的，因为如果已找到一个具有所要求性质的 $\delta(\varepsilon)$，那末显然每一个较小的数 $\delta'<\delta(\varepsilon)$ 也同样适用。

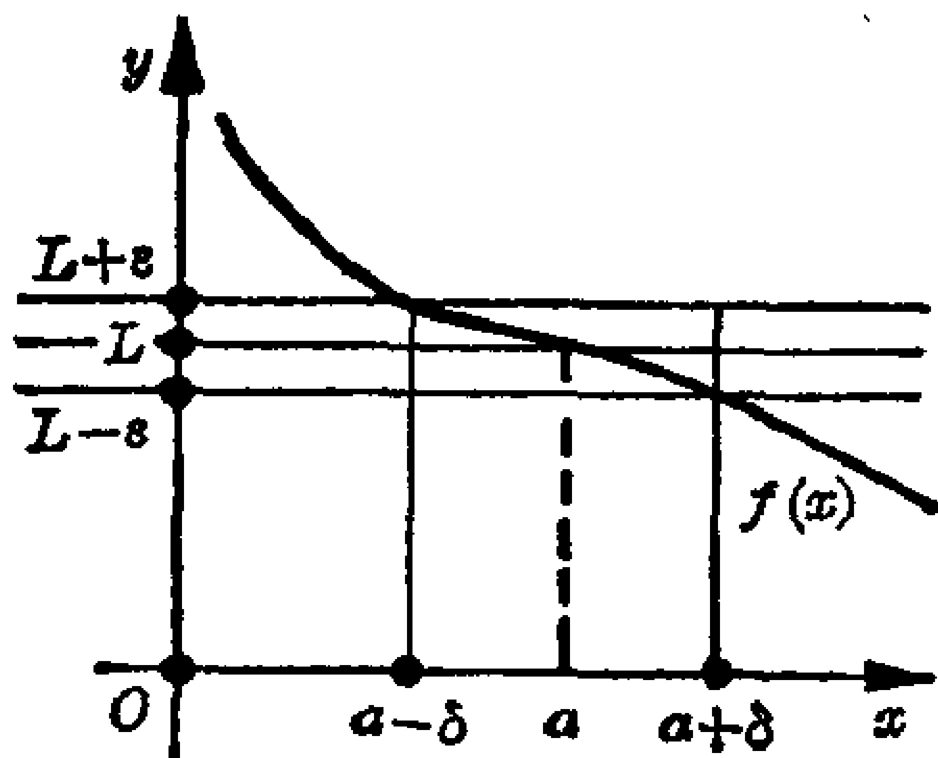


图 5.3-1 极限概念的几何说明

函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时有极限 L，即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，如果对于每一个 $\varepsilon>0$，无论怎样小都相应有数 $\delta(\varepsilon)>0$，使对满足条件 $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ 的每一个 x，成立不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$。

【例 1】 函数 x^2 当自变量 x 趋于零时有极限零，即 $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$，因为对于 $|x-0|<\delta(\varepsilon)\leqslant\sqrt{\varepsilon}$ 的一切 x 有 $|x^2-0|<0$。

【例 2】 当 x 趋于 $a\neq 0$ 时，函数 $1/x$ 趋于极限 $1/a$，即 $\lim\limits_{x\to a} 1/x=1/a$。这由数列的一个定理得出，因为对于每一个横坐标序列 $\{x_n\}\to a\neq 0$，相应的纵坐标序列 $\{1/x_n\}\to 1/a$。

【例3】 存在函数值$f(a)$，并不能断定极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$也必存在并且等于$f(a)$，虽然情况往往如此。例如函数$f(x)=\begin{cases}+1, & 当\ x\neq 0\ 时\\ 0, & 当\ x=0\ 时\end{cases}$，当$x\to 0$时有极限1，但函数值是$f(0)=0$（见图5.3-2）。

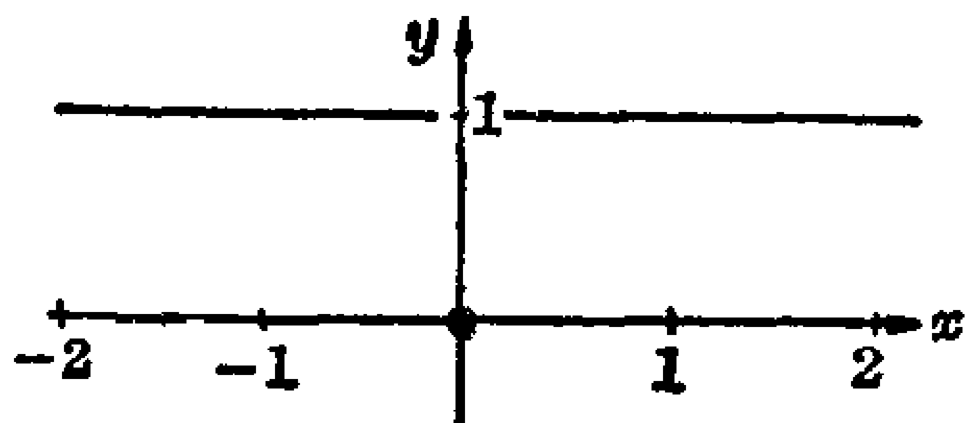


图5.3-2　函数图形

$f(x)=\begin{cases}+1, & 当\ x\neq 0\ 时\\ 0, & 当\ x=0\ 时\end{cases}$

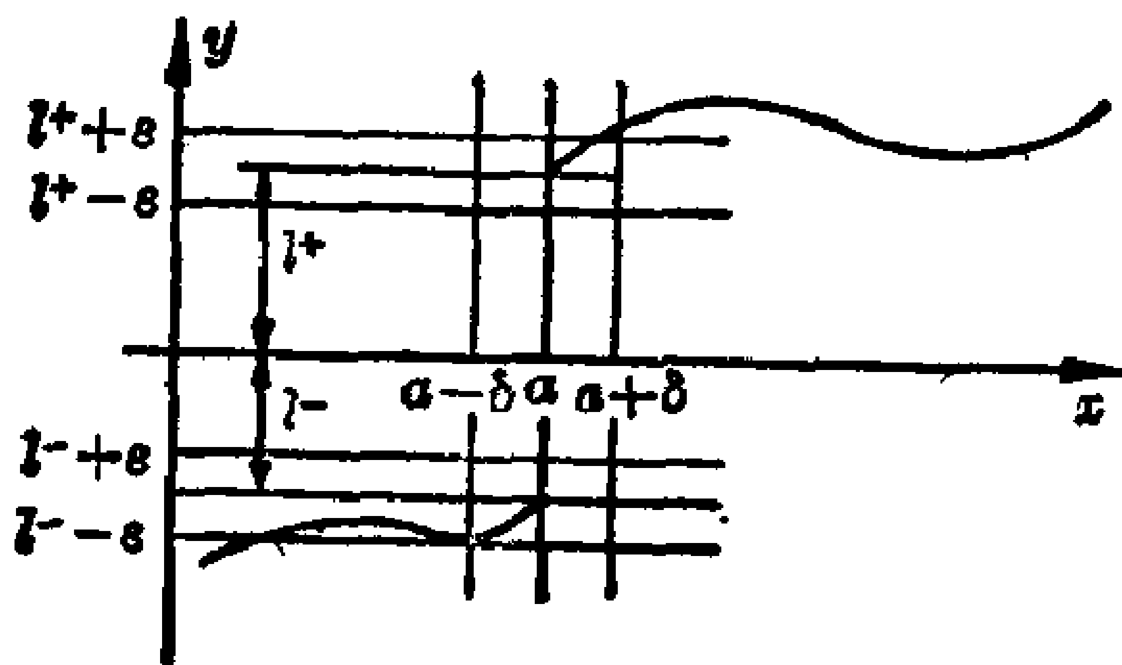


图5.3-3　当$x\to a$时，左极限l^-与右极限l^+不同

【例4】 函数$f(x)=(x^2-4)/(x-2)$对$x=2$没有定义，因为分子分母同时为零。但当$x\neq 2$时，$f(x)=x+2$，所以当$x\to 2$时，函数就趋于极限4，即$\lim\limits_{x\to 2}[(x^2-4)/(x-2)]=4$；因为对于满足$|x-2|<\delta(\varepsilon)=\varepsilon$的一切$x$，$|(x^2-4)/(x-2)-4|=|x+2-4|=|x-2|<\varepsilon$。

单侧极限　在考察极限时这一点是重要的：自变量趋于值a究竟是在x增值的意义下（即从左边趋近），还是在x减值的意义下（即从右边趋近）。所谓左极限l^-，是指对于满足$a-\delta(\varepsilon)<x<a$的一切$x$，有$|f(x)-l^-|<\varepsilon$；右极限$l^+$是指对于满足$a<x<a+\delta(\varepsilon)$的一切$x$，有$|f(x)-l^+|<\varepsilon$。它们分别记为$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=l^-$，$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=l^+$，在符号上用$a-0$，$a+0$表示$x$从哪一边趋于$a$。这两个极限$l^-$与$l^+$可彼此不同，例如在函数$f(x)$的跳跃间断点上（见图5.3-3），函数在这一点上没有双侧极限。另一方面，当$x\to a$时函数有极限，当且仅当$x\to a$时，左极限与右极限相等。

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=l^-=\lim_{x\to a+0}f(x)=l^+=L\leftrightarrow\lim_{x\to a}f(x)=L。$$

无穷大极限　当x无论以什么方式趋于零时，函数$f(x)=1/x^2$的值总会超过每一个任意大的数。这记作$\lim\limits_{x\to 0}1/x^2=+\infty$并且说当$x\to 0$时，函数趋向于**极限正无穷大**。类似地，$\lim\limits_{x\to 0}(-1/x^2)=-\infty$；当$x\to 0$时，函数

$f(x)=-1/x^2$ 趋于极限负无穷大，因为它终将小于任何数 $-N(N>0)$，不论 N 如何大。

如果对于任意大的正数 N，相应有数 $\delta(N)$，使对 $0<|x-a|<\delta(N)$ 的一切 x，有 $f(x)>N$（或 $f(x)<-N$），那末 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$（或 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$）。

【例】 正切函数 $y=\tan x$ 对 $x=\pi/2$ 没有定义，但对此值有左侧和右侧的无穷大极限：$\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\tan x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\pi/2+0}\tan x=-\infty$。

在无穷远点的函数极限 只要 x 的值选得足够大，函数 $f(x)=1/x+b$ 的值显然可任意地接近数 b。例如，对大于 10^6 的所有 x，b 与函数值之差就小于 0.000001。一般地，对于所有的 $x>1/\varepsilon$，有 $|f(x)-b|<\varepsilon$。这个例子表明，函数 $f(x)$ 的极限 L 这个概念可以拓广到横坐标无界地增加（或减少）的情况。

如果对每个任意的 $\varepsilon>0$，相应有足够大的 $\omega(\varepsilon)>0$，使对所有的 $x>\omega(\varepsilon)$，有 $|f(x)-L|<\varepsilon$，那末 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$。类似地，如果对于每个任意的 $\varepsilon>0$，相应有足够大的 $\omega(\varepsilon)>0$，使对所有的 $x<-\omega(\varepsilon)$，有 $|f(x)-L|<\varepsilon$，那末 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$。

函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 如果存在，那末它们描述在无穷远点即对于非常大的正值与非常大的负值 x，函数的性态。

【例 1】 $\lim\limits_{x\to-\infty}1/x=0$，因为对于满足条件 $x>\omega(\varepsilon)=1/\varepsilon$ 的所有 x，有 $|1/x-0|=|1/x|<\varepsilon$。

【例 2】 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在。不论选定多大的 x 值，譬如说 x_0，根据正弦函数的周期性，总存在无限多个大于 x_0 的横坐标，使函数取 $+1$ 与 -1 之间任意指定的某个值。

有理函数在无穷远点的性态已在 I. 第 5 章中讨论过了。

极限运算 序列极限的运算规则可以逐字逐句移用于函数极限的运算。在前一节例子中已经应用过的这些规则是说，极限运算可以与加法、减法、乘法与除法（若 $L\neq0$）运算互相交换，只要所出现的极限都存在且有限。前两个规则对于若干个函数的和与积也成立，但对于无限多个和不一定成立。函数 $h(x)$，如果在点 a 的某个邻域中，其值落在两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的相应函数值之间，而这两个函数当 $x\to a$ 时都有极限 L，那末此

时 $h(x)$ 也有极限 L。

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} f(x)=F$
与　$\lim\limits_{x\to a} g(x)=G$</td><td>$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)$
$\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=F\pm G$,</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)$
$\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=F\cdot G$</td><td>$\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)/\lim\limits_{x\to a} g(x)$
$=F/G,\ G\neq 0$</td></tr>
</table>

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 并且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$，又如果在 a 的某个邻域内成立不等式 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，那末也有 $\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$。

【例 1】 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x)/x=0$。因为 $\sin x$ 落在 -1 与 $+1$ 之间，对于 $x>0$，不等式 $-1/x\leqslant(\sin x)/x\leqslant 1/x$ 成立。又因为 $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x=\lim\limits_{x\to\infty}(-1/x)=0$，所以得出结果(见图 5.3-4)。

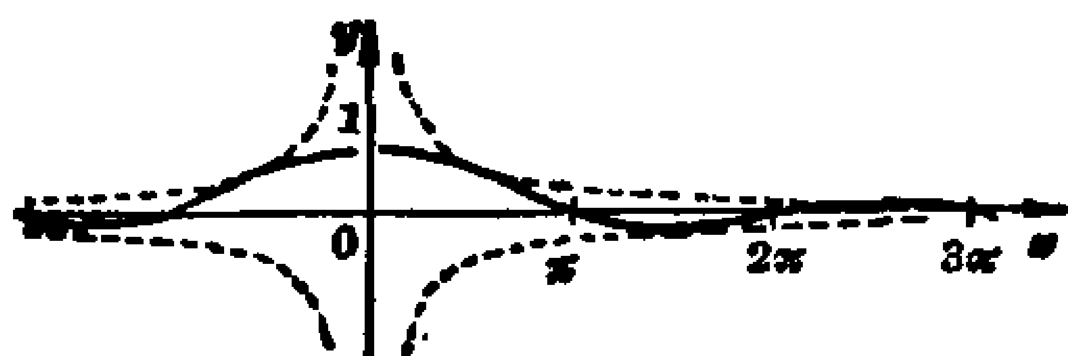


图 5.3-4　函数图形 $y=\dfrac{\sin x}{x}$

【例 2】 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin 1/x=0$，因为 $-|x|\leqslant x\sin 1/x\leqslant|x|$ 从而 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=\lim(-|x|)=0$。

一些重要的极限

对于函数极限的确定，几乎不存在普遍适用的方法。这里借助于收敛数列的知识，导出一些经常使用的极限。

1.　如果 $a>0$，则当 $x\to 0$ 时，$a^x\to 1$。

$$\text{对于 } a>0,\ \lim_{x\to 0} a^x=1$$

已经证明，对于 $a>0$，序列 $\{\sqrt[n]{a}\}$ 收敛于 1。序列 $\{1/\sqrt[n]{a}\}$ 则有倒数极限，同样等于 1。由此得出对于任意一个 $\varepsilon>0$，可以确定正整数 N，使对所有的 $n\geqslant N$，数 $a^{1/n}$ 与 $a^{-1/n}$ 落在从 $1-\varepsilon$ 到 $1+\varepsilon$ 的区间内。因为指数函数是单调的，具有 $-1/N<x<1/N$ 的一切 a^x 也落在这个区间内。于是，如果 $|x|<\delta(\varepsilon)=1/N$，那末 $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$，或者 $|a^x-1|<\varepsilon$。

2.　当 $x\to\infty$ 时，$(1+1/x)^x\to e$

根据对数定义，再由它的单调性，给出

$$-\varepsilon<\log_b(x/a)<\varepsilon\to|\log_b x-\log_b a|<\varepsilon。$$

于是，对数的极限可以作为极限的对数来确定。相应地，当 $x\to0$ 时，$[\log_b(1+x)]/x=\log_b[(1+x)^{1/x}]\to\log_b e$，而这个极限当 $b=e$ 时取值 $\ln e=1$。

$\lim\limits_{x\to0}[\log_b(1+x)]/x=\log_b e;\quad b>1$	$\lim\limits_{x\to0}[\ln(1+x)]/x=1$

5. 如果 $a>0$，则当 $x\to0$ 时，$(a^x-1)/x\to\ln a$

$\lim\limits_{x\to0}(a^x-1)/x=\ln a;\quad a>0$	$\lim\limits_{x\to0}(e^x-1)/x=1$

如果 $a=1$，那末分子为零，从而命题为真，因为 $\ln 1=0$。如果 $a\neq1$，设 $a^x=1+y$，因为当 $x\to0$ 时，$a^x\to1$，所以有 $y\to0$。但是 $x\ln a=\ln(1+y)$，所以 $(a^x-1)/x=y\ln a/\ln(1+y)=\ln a/\ln[(1+y)^{1/y}]$，它的分母趋于1。最重要的特殊情况是 $a=e$，这里 $\ln e=1$。

6. 当 $x\to0$ 时，$\cos x\to1$。

$$\lim_{x\to0}\cos x=1$$

因为对于 $|x|<\sqrt{(2\varepsilon)}$，有 $|\cos x-1|=2|\sin^2(x/2)|=2|\sin(x/2)|\cdot|\sin(x/2)|\leqslant2|x/2|\cdot|x/2|=x^2/2<\varepsilon$，所以当 $x\to0$ 时，$|\cos x-1|$ 收敛于零。

7. 当 $x\to0$ 时，$(\sin x)/x\to1$。

$$\lim_{x\to0}(\sin x)/x=1$$

函数 $h(x)=(\sin x)/x$ 可被包含在两个函数 $f(x)=1$ 与 $g(x)=\cos x$ 之间，当 $x\to0$ 时，这两者都趋于极限1。由图5.3-5可以看到扇形 OEB 的面积 A'_{OEB} 介于三角形 OEB 与 OED 的面积之间：

$$A_{OEB}<A'_{OEB}<A_{OBD}\to1\cdot\sin x<1\cdot x<\tan x\cdot1$$
$$\to1<x/\sin x<1/\cos x\to1>(\sin x)/x>\cos x。$$

这些不等式只对正的 x 成立；而当 $x\to0$ 时，右极限与左极限存在，两者都

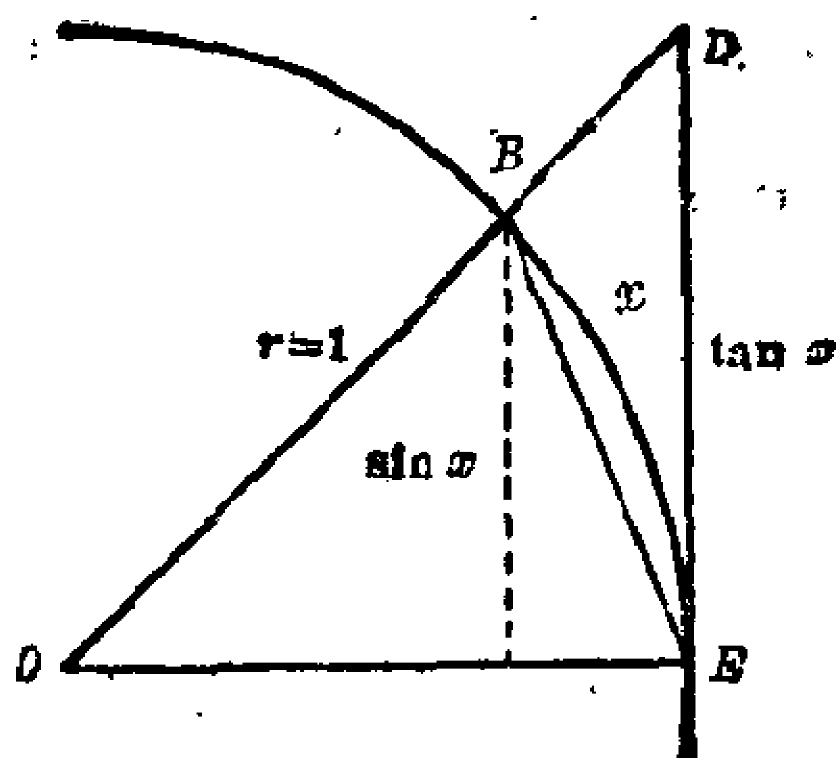


图 5.3-5 当 $x\to 0$ 时 $\frac{\sin x}{x}\to 1$ 的推导

有值 1，这是因为 $[\sin(-x)]/(-x)=(\sin x)/x$。

8. 当 $x\to 0$ 时，$(\tan x)/x\to 1$。

$$\lim_{x\to 0}(\tan x)/x=1$$

因为 $(\tan x)/x=[(\sin x)/x]\cdot[1/\cos x]$，而当 $x\to 0$ 时每个因子都趋于 1。

伯努利与洛必达法则

众所周知，加法、减法、乘法和除法算符与极限算符交换，只有当所出现的极限存在且有限，以及在除法的情况下极限不为零时才有可能。另一方面，如果不加鉴别地交换，就会出现一些无意义的表达式，形如 $0/0$，∞/∞，$0\cdot\infty$，0^0，∞^0 或 1^∞，那时就必须直接确定其极限。如果当 $x\to a$ 时形式上出现这样的一个表达式，那末说它是一个*待定型*。对于极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x$，如果用极限的商来代替商的极限，就会造成待定型 $\frac{0}{0}$。然而，因为分母的极限是零，所以这个过程是不允许的。用另外的方法已经证明 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x=1$。

待定型 0/0 在 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 的情况下，为了确定极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)/g(x)$，伯努利（Johann Bernoulli, 1667～1748 年）发展了一种法则，公开发表这个法则的是洛必达（de L'Hospital, 1661～1704 年）。

伯努利与洛必达法则 如果一个商的分子 $f(x)$ 与分母 $g(x)$ 当 $x\to a$ 时都趋于极限零，又如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=a$ 的一个邻域内有导

数 $f'(x)$ 与 $g'(x)\neq 0$，而且还有导数的商的极限 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)/g'(x)$，那末这等于函数的商的极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)/g(x)$。

这个法则利用了导数的概念，它将在 **II**. 第6章阐明。从那里所讲的广义中值定理可以推出这个法则。在表达式

$$f(x)/g(x)=[f(x)-f(a)]/[g(x)-g(a)]=f'(\xi)/g'(\xi)$$

中，ξ 介于 a 与 x 之间，因而当 $x\to a$ 时它也趋于 a。如果 $\lim\limits_{x\to a}f'(\xi)/g'(\xi)=L$，那末定理就得证。它也可用于 $x\to\infty$ 的情况。

如果再次出现待定型 $\dfrac{0}{0}$ 的表达式，可以对商 $f'(x)/g'(x)$ 应用这个法则并讨论极限 $\lim\limits_{x\to a}f''(x)/g''(x)$。不过可能发生这样的情况，尽管给定的商有极限，但用这个法则老是得出一个待定型或者导数的极限不存在。那时这个法则不适用于给定的函数，必须用别的方法求极限。

【例1】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1/x}{1}=1$。

【例2】 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2e^x-x^2-2x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2e^x-2x-2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2e^x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{2e^x}=3。$$

【例3】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{2}=-\dfrac{1}{2}$。

【例4】 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2\cos 2x}{-\sin 2x}=\pm\infty$，依 x 从左边或从右边趋向值 $\pi/2$ 而定。

【例5】 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln[x/(x-1)]}{5/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{[(x-1)/x]\cdot[-1/(x-1)^2]}{-5x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{5(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{5(1-1/x)}=\frac{1}{5}。$$

【例6】 对于极限 $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{(x^2+\sin^2 x)}/x$ 的确定，洛必达法则失效。用其他方法容易证明这个极限是 $\sqrt{2}$。

待定型 ∞/∞　如果商的分子 $f(x)$ 与分母 $g(x)$ 当 $x\to a$ 时都趋于无穷大，那末函数 $1/f(x)$ 与 $1/g(x)$ 都趋于零。如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=a$ 的

某个邻域内可微，又如果 $g'(x)$ 不等于零并且商 $f(x)/g'(x)$ 趋于一个极限，那末可应用洛必达法则：$\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)=\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$。这对于 $x\to\infty$ 同样成立。

【例 1】 $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{-\ln(x-1)}{1/(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{-1/(x-1)}{-1/(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0$。

【例 2】 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{3/\cos^2 3x}{1/\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-6\cos x\sin x}{-6\cos 3x\sin 3x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 2x}{\sin 6x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\cos 2x}{6\cos 6x}=\frac{1}{3}。$$

【例 3】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 不能用洛必达法则来处理，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在。然而，

$$\lim_{x\to\infty}(x+\sin x)/x=\lim_{x\to\infty}[1+(\sin x)/x]=1。$$

【例 4】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{24x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{24}=\infty$。

【例 5】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\cdots=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n!}{a^x(\ln a)^n}=0$，$n$ 是正整数且 $a>1$。

【例 6】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$，$n$ 是正整数。

最后两个例子表明，指数函数 a^x 趋于无穷大要比任何一个幂 x^n 为快，而任何一个幂趋于无穷大要比对数函数为快。

其余待定型 借助于洛必达法则，能处理其余的待定型，这就要将函数表达成这样的形式，使它在临界点导致 0/0 或 ∞/∞ 中的一个待定型。对于 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ 的情况，为了计算 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$，写成 $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ 或 $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$，于是有 0/0 或 ∞/∞ 的情况。

【例】 $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{arccot} x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arccot} x}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1。$$

当 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ 时，为了计算 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$，写成

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}=\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/[f(x)\cdot g(x)]}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

其中 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$。

【例】 $\lim\limits_{x\to 0}[1/\sin x-1/(x+x^2)]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{(1+2x)\sin x+(x+x^2)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2\sin x-(x+x^2)\sin x+(2+4x)\cos x}=1。$$

在 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$; $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$; 或 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ 中任一情况下，为了计算 $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}$, 注意到在每一情况下，$\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$是这样两个因子的乘积，其中一个因子趋于零而另一个趋于无穷大。因此可用已经知道的的方法来确定 $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$。

【例1】 为了计算 $\lim\limits_{x\to+0}x^x$，注意到 $\ln x^x=x\ln x$ 而 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1/x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0$。由此得出 $\lim\limits_{x\to+0}x^x=\lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x}=1$, 因为 $\lim\limits_{\xi\to 0}a^\xi=1$。

【例2】 为了计算$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$，注意到 $\ln\sqrt[x]{x}=\dfrac{1}{x}\ln x$ 而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0$。由此得出 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$。

函数的连续性

直观上把区间 **I** 上连续函数的图象看作没有一个地方折断的光滑曲线，它可"铅笔不离开纸"地画出来的。这意味着函数在该区间的每一个点 $x=\xi$ 上有定义，而且对自变量的小变化，它的变化也很小(见图 5.3-6)，可将这个想法说得更为精确。

设函数 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 的某个邻域内以及在 ξ 自身这一点上有定义。如果对于每一个小的 $\varepsilon>0$，总可选取适当的数 $\delta(\varepsilon)>0$，使对 $|x-\xi|<\delta(\varepsilon)$的所有 x，有 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$，那末称此函数在 ξ 连续。

这个命题等价于说，极限 $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)$存在且等于函数值 $f(\xi)$: $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$。

【例】 $f(x)=3x^2-1$ 在每一点 $x=\xi$ 连续。首先假定 $|x-\xi|<1$；于是 $|x+\xi|=|2\xi+(x-\xi)|\leqslant 2|\xi|+1$。由此得到，对于

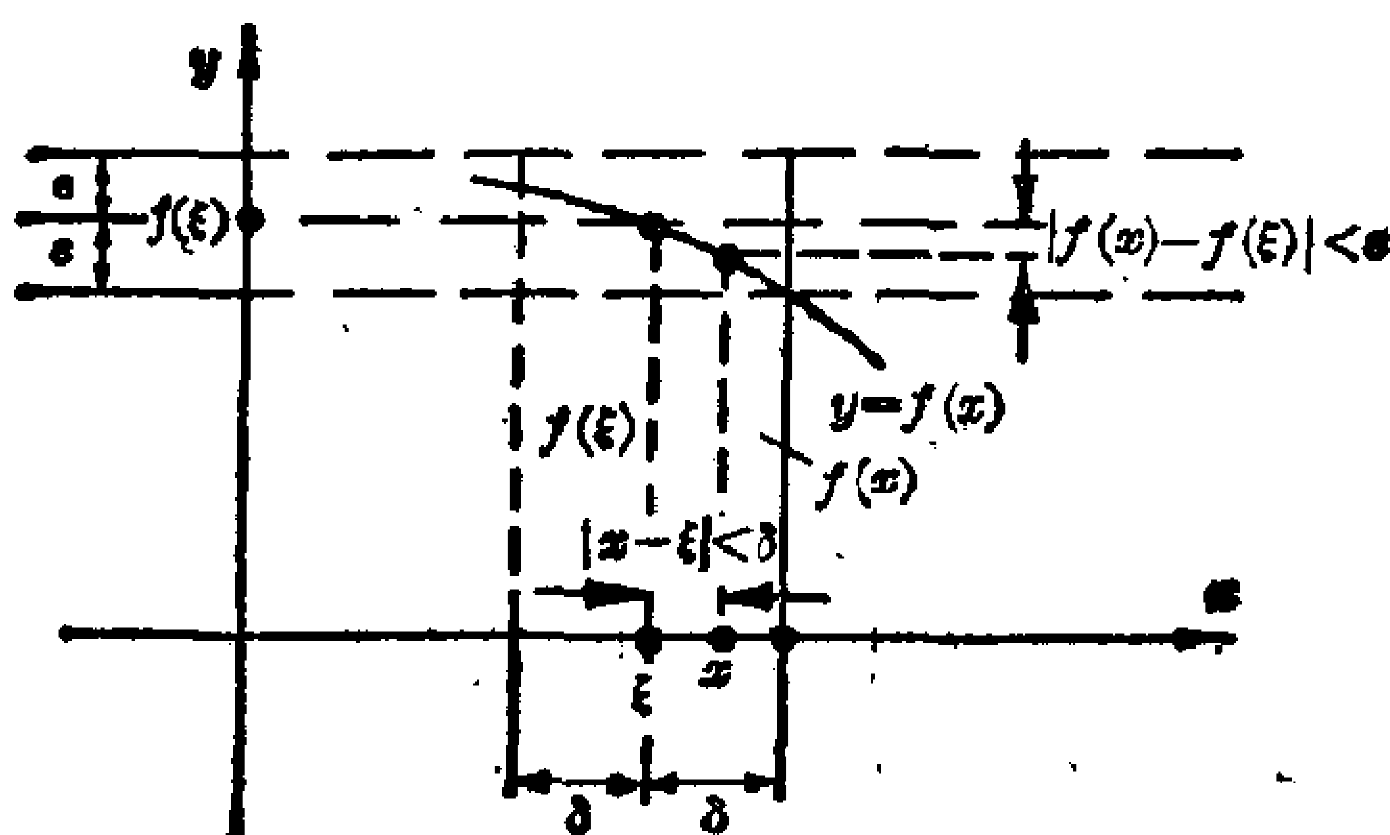


图 5.3-6 连续性的几何解释

$$|x-\xi|<\frac{\varepsilon}{3(2|\xi|+1)} \text{ 的所有 } x,$$

$$\begin{aligned}|f(x)-f(\xi)| &= |3x^2-1-(3\xi^2-1)| \\ &= 3|x^2-\xi^2| = 3|x+\xi|\,|x-\xi| \\ &\leqslant 3(2|\xi|+1)|x-\xi|<\varepsilon_{\circ}\end{aligned}$$

如果对于给定的 $\varepsilon>0$，选取 $\delta(\varepsilon)=\min[1,\ \varepsilon/[3(2|\xi|+1)]]$，那就证得了所给函数的连续性。

单侧连续性 如果当 $x\to\xi$ 时，只有右(或只有左)极限存在并且等于函数值 $f(\xi)$，那末称此为*右(或左)连续*。例如，$f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 右连续，因为 $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}=0=f(0)$。如果函数在 $x=\xi$ 连续，那末它既右连续又左连续。逆定理亦真。

在一个区间的连续性 所谓函数 $f(x)$ 在一个区间连续，是指它在该区间的每一个内点连续，并且如果这区间是左(右)闭的话，那末函数在区间端点上右(左)连续。

例如，函数 $f(x)=3x^2-1$ 在每一个区间连续。另一方面，函数 $f(x)=1/(2-x)$ 不是在整个区间 $1\leqslant x\leqslant 5$ 上连续。对于 $x=2$，函数不连续；在这一点不存在函数值。

一致连续性 函数 $f(x)=3x^2-1$ 的例子表明，相应于给定 $\varepsilon>0$ 的 $\delta(\varepsilon)$ 通常依赖于 ξ 的值。如果一个函数 $f(x)$，对于给定的 $\varepsilon>0$，可选取*单一的*值 $\delta(\varepsilon)$ 使对一个区间的*所有* ξ 保证有 $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$，那末称此函数在这个区间*一致连续*。当相应于这区间每一个 ξ 的值 δ 全体有一个正的下限时，就确实存在一个对整个区间有效的值 $\delta(\varepsilon)$。例如，函数 $f(x)=3x^2-1$ 是在 $2\leqslant x\leqslant 5$ 区间上一致连续的。因为 $\delta(\varepsilon,\ \xi)=\min$

$\left[1,\frac{\varepsilon}{3(2|\xi|+1)}\right]\geqslant\frac{\varepsilon}{33}$，使 $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{33}$ 对于该区间的每一个 ξ 都适合。另一方面，函数 $f(x)=\tan x$ 在区间 $0\leqslant x<\pi/2$ 连续，但不一致连续。对于给定的 $\varepsilon>0$，ξ 越接近于值 $\pi/2$，相应的 $\delta(\varepsilon)$ 值就越小。当 $\xi\to\pi/2$ 时，值 $\delta(\varepsilon)$ 趋于零。下面的定理颇为一般。

在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 也在这个区间上一致连续。

例如 $f(x)=\tan x$ 表明，区间闭的这个条件是实质性的。

不连续点　点 $x=\xi$，$f(x)$ 不在这点上函数连续，就称这点为**不连续点**。在这一点上，或者不存在函数值或者不存在极限，或者两者存在但不相等。有理函数的**极点**就是不连续点的例子；极点已在 I. 第5章讨论过。

在**待定点**上函数形式上取一种待定型。例如，函数 $f(x)=(\sin x)/x$ 有一个待定点在 $x=0$。不过，因为当 $x\to0$ 时左极限与右极限存在且等于1，所以可以考虑一个更新函数 $f^*(x)$，当于 $x\neq0$ 时，它取值 $(\sin x)/x$；而当 $x=0$ 时它取极限值1。于是 $f^*(x)$ 对于 $x=0$ 是连续的，从而不连续性已"移去"，这称之为**可去不连续性**。函数 $f(x)$ 在待定点 $x=\xi$ 的不连续性是可去的，如果两个单侧极限存在，有限且相等：$\lim\limits_{x\to\xi+0}f(x)=\lim\limits_{x\to\xi-0}f(x)=L$。于是 $f(x)$ 可更新为这样一个函数：当 $x\neq\xi$ 时 $f^*(x)=f(x)$；当 $x=\xi$ 时 $f^*(x)=L$，它在 $x=\xi$ 连续。

如果**有理函数** $p(x)/q(x)$ 的分子 $p(x)$ 与分母 $q(x)$ 有公因子 $x-x_0$，那末 $x=x_0$ 是该函数的一个待定点。如果 $p(x)=(x-x_0)^i p_1(x)$，$q(x)=(x-x_0)^k q_1(x)$，其中 $p_1(x_0)\neq0$，$q_1(x)\neq0$ 而且 $i>k$，那末 x_0 是一个**可去不连续点**。更新函数 $f^*(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，当 $x\neq x_0$ 时它等于 $(x-x_0)^{i-k}\cdot p_1(x)/q_1(x)$，而当 $x=x_0$ 时它为零。对于 $i=k$，不连续性也是可去的，更新函数是 $p_1(x)/q_1(x)$。然而，对于 $i<k$，更新函数 $(x-x_0)^{i-k}\cdot p_1(x)/q_1(x)$ 在 $x=x_0$ 点有 $(k-i)$ 阶极点，因此不连续。

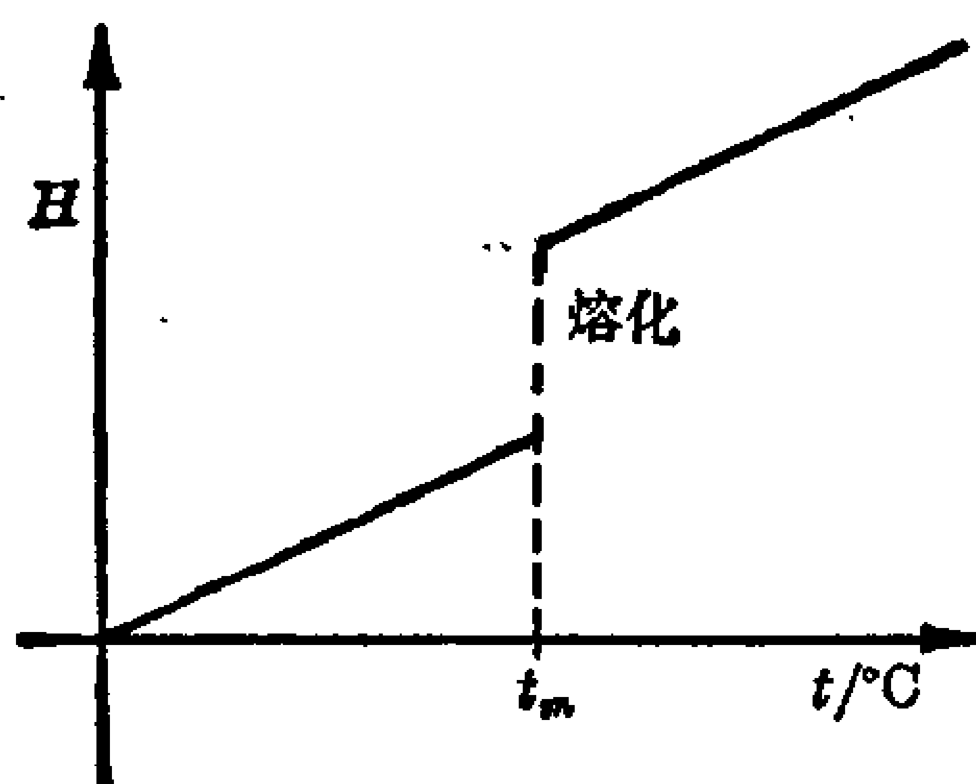


图5.3-7　热容量 H 作为温度 t 的函数，t_m 表示熔化点

跳跃不连续性。在跳跃不连续点上，左极限与右极限是彼此不同，因而函数不可能连续。

给固体提供热量以升高它的温度 t。在熔点 $t=t_m$ 上它的热容量 H 不是温度的连续函数，因为在这一温度上，熔化了的物质的热容量大于固体的热容量(见图 5.3-7)。

【例 1】 函数 $f(x)=\text{Arc}\tan[1/(x-c)]$ 在 $x=c$ 点上有一个大小为 π 的跳跃不连续性(见图 5.3-8a)，因为

$$\lim_{x\to c-0}\text{Arc}\tan[1/(x-c)]=\lim_{z\to-\infty}\text{Arc}\tan z=-\pi/2$$

以及
$$\lim_{x\to c+0}\text{Arc}\tan[1/(x-c)]=\lim_{z\to+\infty}\text{Arc}\tan z=+\pi/2。$$

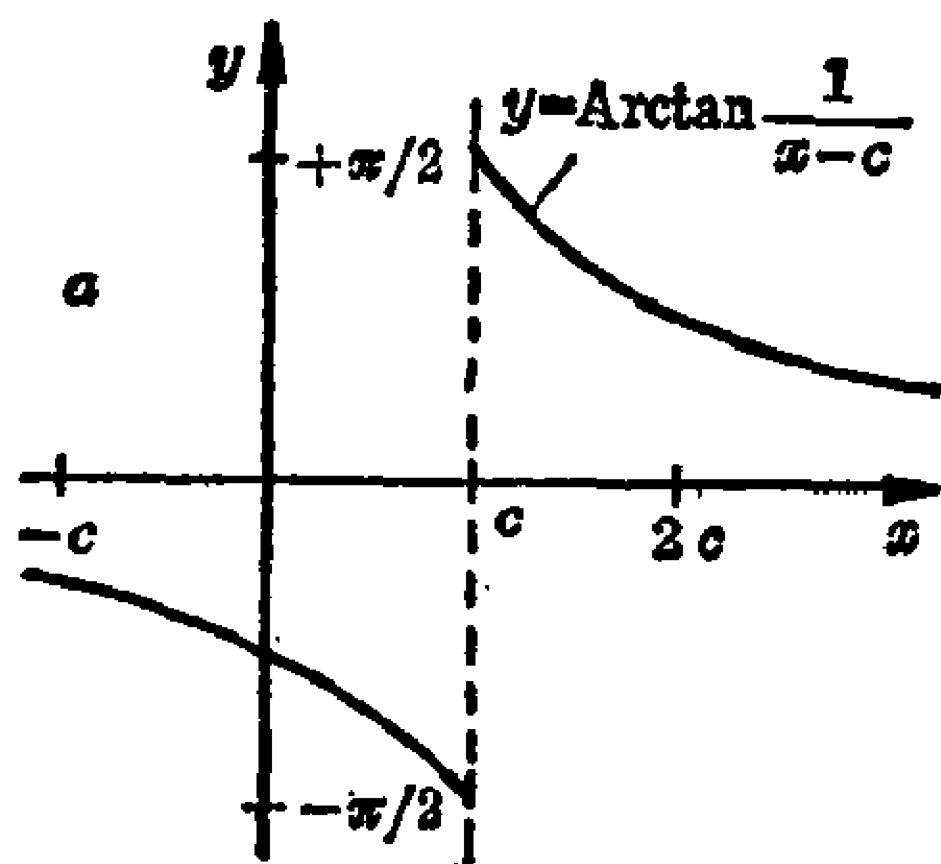


图 5.3-8a 有限跳跃不连续点的函数图形

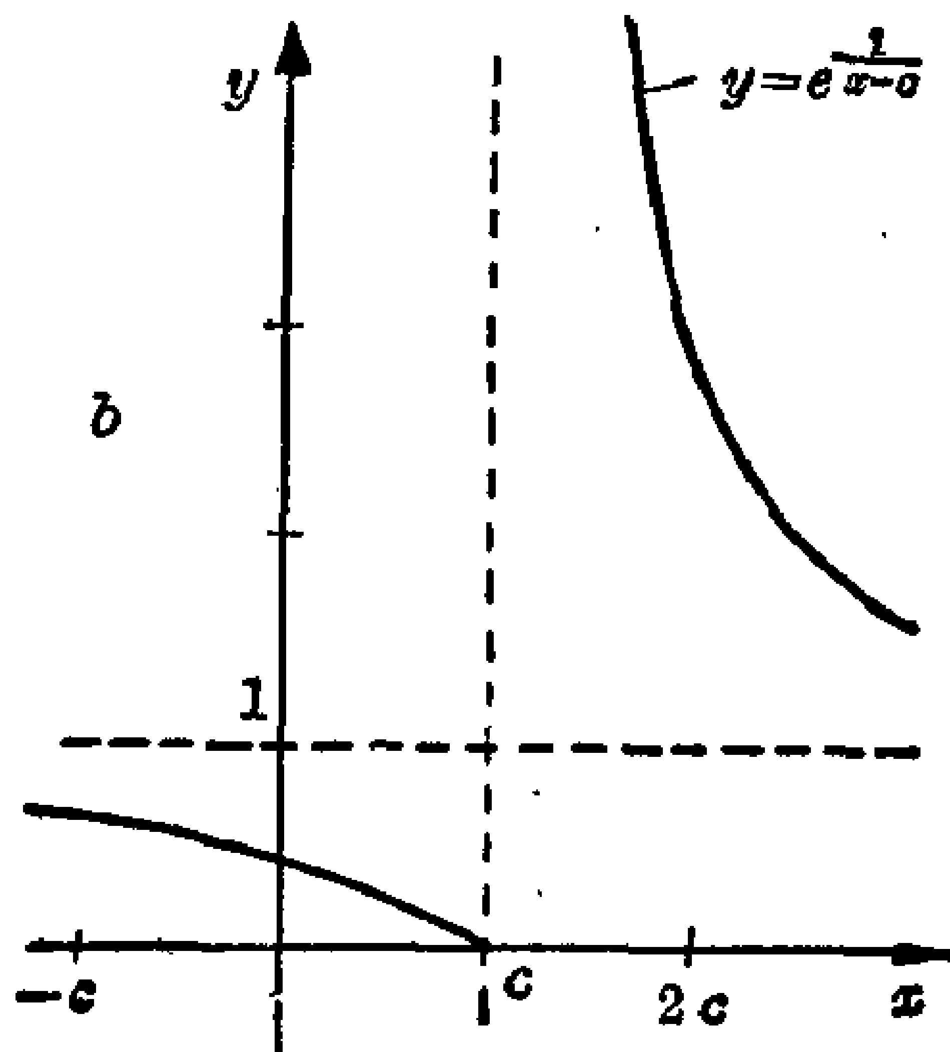


图 5.3-8b 无限跳跃不连续点的函数图形

【例 2】 函数 $f(x)=e^{1/(x-c)}$ 在点 $x=c$ 上有无限不连续性(见图 5.3-8b)，因为 $\lim\limits_{x\to c-0}e^{1/(x-c)}=\lim\limits_{z\to-\infty}e^{z}=0$ 而 $\lim\limits_{x\to c+0}e^{1/(x-c)}=\lim\limits_{z\to+\infty}e^{z}=+\infty$。

【例 3】 函数 $f(x)=1/\cos x$ 在点 $\pi/2+k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,)$ 上有无限不连续性，对于偶数 k 它从 $+\infty$ 到 $-\infty$，对于奇数 k 它从 $-\infty$ 到 $+\infty$(见图 5.3-9)。

振荡不连续函数。 函数 $f(x)=\sin(1/x)$ 在 $x=0$ 点上没有定义，从而不连续。如果取定一个正数 δ，无论怎样小，在区间 $-\delta<x<+\delta$ 内总存在无限多个点 $x=2/(\pi n)$，即 $1/x=\pi n/2$，$[n>2/(\pi\delta)]$ 具有下述性质：对于 $n_1=2k$，$n_2=4k+1$，$n_3=4k+3$(k 是整数)函数 $\sin(1/x)=\sin\pi n/2$ 取值 0，$+1$，-1(见图 5.3-10)。n 越大或者说 x 越靠近于零，函数在 $+1$ 与 -1 之间振荡也就越来越快。因此当 $x\to0$ 时这个函数没有极限；在这种点上的不连续性是不可移去的。另一方面，函数 $x\sin(1/x)$ 在点

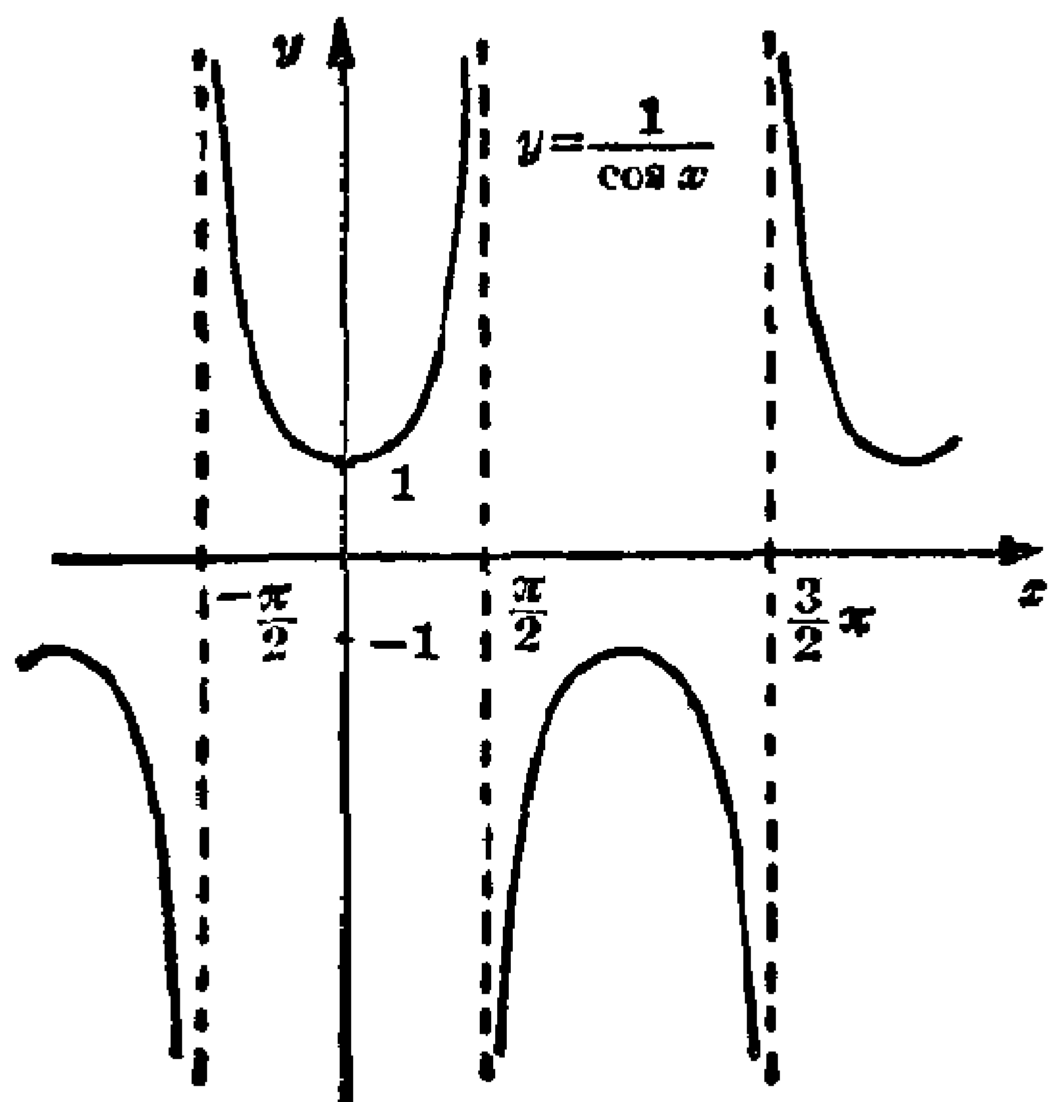


图 5.3-9　从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的跳跃

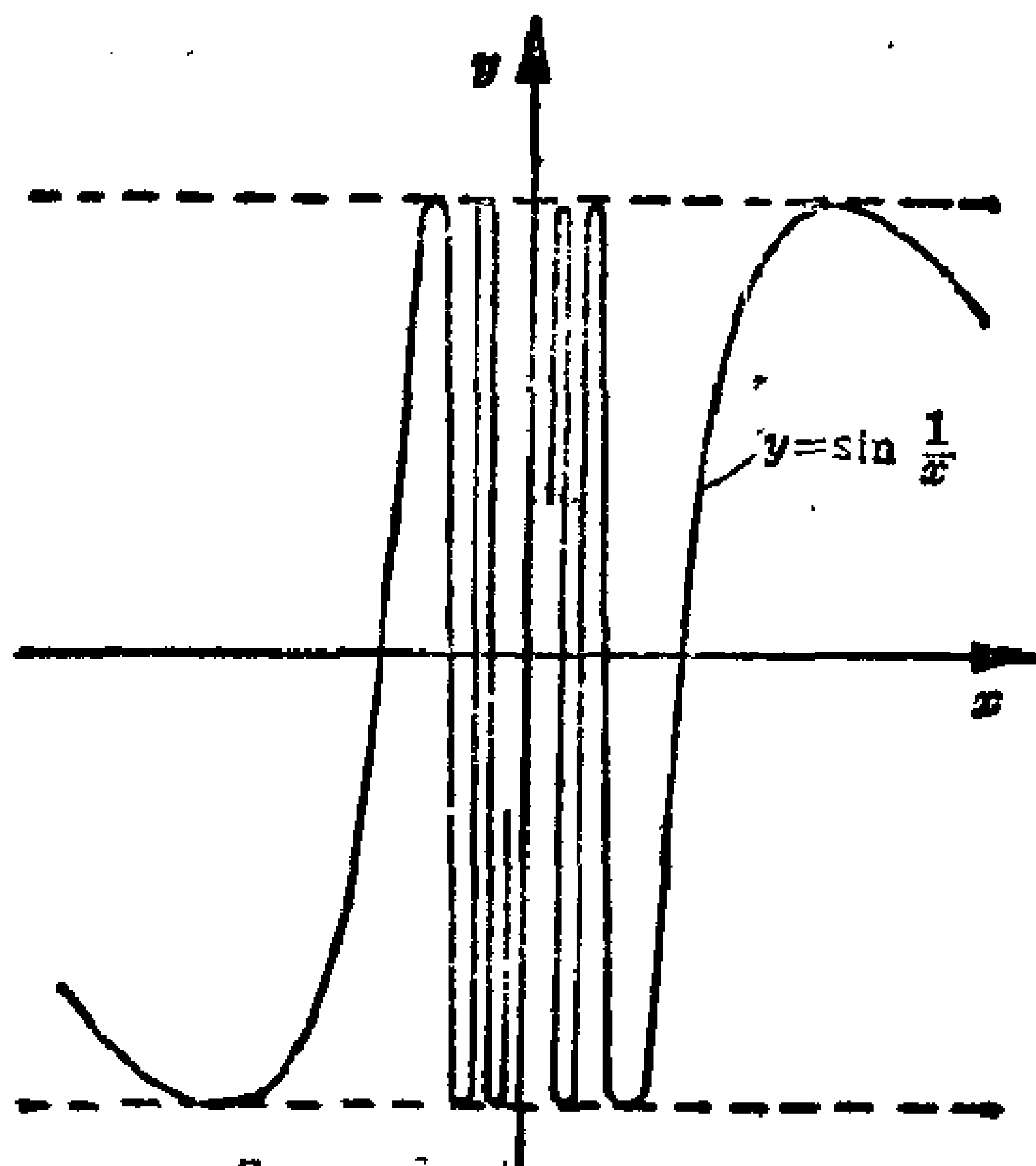


图 5.3-10　振荡不连续函数

$x=0$ 的不连续性是可去的，因为 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)=0$。因而当 $x\neq 0$ 时 $f^*(x)=x\sin(1/x)$；$f^*(0)=0$ 就是 $x\sin(1/x)$ 的一个连续的更新函数（见图 5.3-11）。

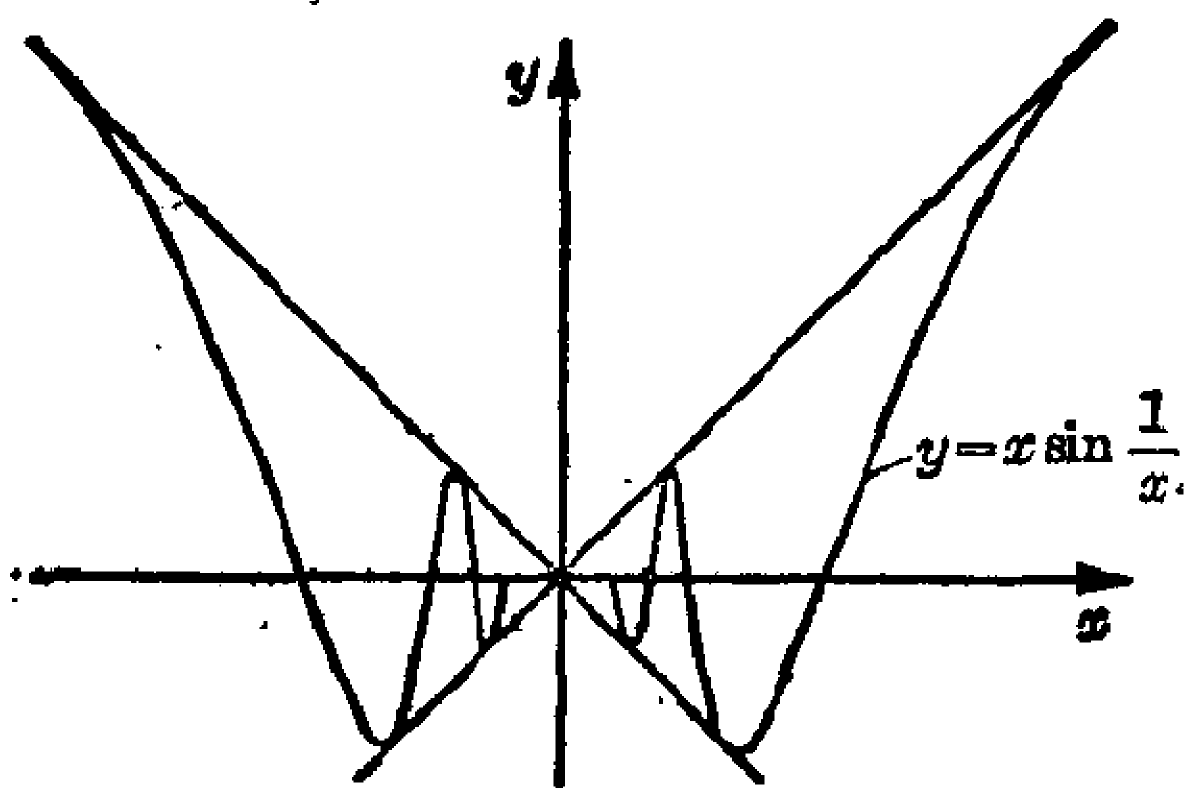


图 5.3-11　具可去不连续性的振荡函数

连续函数的几个定理　根据极限运算的规则，直接可推出下面的定理。

在 $x=\xi$ 连续的两个函数的和，差与乘积还在这一点连续。倘若在 $x=\xi$ 分母不为零，那末它们的商也是连续的。

因为函数 $g(x)=c=$ 常数以及 $h(x)=x$ 显然是处处连续的，所以从这个定理立即知道由它们用四个基本运算而得的所有函数是连续的。下面关于初等函数连续性的前两个命题就是用这个方式证明的。

1. *多项式函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 处处连续。*
2. *有理函数 $p(x)/q(x)$ 在 $q(\xi)\neq 0$ 的所有点 ξ 上连续。*
3. *指数函数 $f(x)=a^x(a>0)$ 处处连续。*
4. *对数函数 $f(x)=\log_b x(b>0;b\neq 1)$ 对于所有正的 x 值连续。*
5. *三角函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 处处连续；函数 $\tan x=\sin x/\cos x$ 对于所有 $\xi\neq(2k+1)\pi/2$（k 是整数）连续；函数 $\cot x=\cos x/\sin x$ 对于所有 $\xi\neq$*

$k\pi$(k 是整数)连续。

借助于已经得到的极限 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$，推出 $\lim\limits_{x\to\xi} a^x=\lim\limits_{x\to\xi}(a^\xi\cdot a^{x-\xi})=a^\xi\cdot\lim\limits_{x\to\xi} a^{x-\xi}=a^\xi\cdot\lim\limits_{h\to 0} a^h=a^\xi\cdot 1=a^\xi$，于是指数函数连续。类似地由 $\lim\limits_{x\to\xi}\log_b x=\log_b\xi\,(\xi>0,\ b>1)$ 得出对数函数的连续性。因为 $\log_b x=-\log_{1/b}x$，所以这对于 $0<b<1$ 也成立，于是对可采取的一切底都成立。

最后，因为 $-|x|\leqslant\sin x\leqslant|x|$ 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，以及已知 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$。由此得出，当 $x\to\xi$ 时，

$$\sin x=\sin(\xi+x-\xi)=\sin\xi\cos(x-\xi)+\cos\xi\sin(x-\xi)\to\sin\xi,$$

$$\cos x=\cos(\xi+x-\xi)=\cos\xi\cos(x-\xi)-\sin\xi\sin(x-\xi)\to\cos\xi。$$

对于函数 $\tan x=\sin x/\cos x$ 和 $\cot x=\cos x/\sin x$ 的连续性，只需排除分母的零点就行。

反函数的连续性。作为连续的三角函数的反函数，圆函数 $\mathrm{Arc}\sin x$，$\mathrm{Arc}\cos x$，$\mathrm{Arc}\tan x$，$\mathrm{Arc}\cot x$ 也是连续的，因为下述定理为真：

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 有反函数 $\varphi(x)$，那末 $f(x)$ 在点 $x=\xi$ 的连续性蕴涵着 $\varphi(x)$ 在点 $x=f(\xi)$ 的连续性。

相应地根函数 $\sqrt[n]{x}$ 对于所有正的 x 连续，因为它是 $x>0$ 时函数 x^n 的反函数。

复合函数的连续性。设 $y=f[\varphi(x)]$ 是一个复合函数，它的**内函数** $t=\varphi(x)$ 在点 $x=\xi$ 连续，而它的**外函数** $y=f(t)$ 在点 $t=\tau=\varphi(\xi)$ 连续。于是复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x=\xi$ 连续。

连续函数的任一连续函数仍连续。

因为 $\lim\limits_{t\to\tau} f(t)=f(\tau)$，对于任意的 $\varepsilon>0$ 总相应有适当的数 $\delta_1(\varepsilon)>0$，使对所有的 $|t-\tau|<\delta_1(\varepsilon)$，有 $|f(t)-f(\tau)|<\varepsilon$。再因为 $\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x)=\varphi(\xi)=\tau$，对于任意一个正数，譬如说 $\delta_1(\varepsilon)$，相应有适当的数 $\delta(\delta_1(\varepsilon))=\delta_2(\varepsilon)$，使对 $|x-\xi|<\delta_2(\varepsilon)$ 的所有 x，有 $|\varphi(x)-\varphi(\xi)|<\delta_1(\varepsilon)$。因而，对于任意一个 $\varepsilon>0$，可以选取数 $\delta_2(\varepsilon)$，使对满足 $|x-\xi|<\delta_2(\varepsilon)$ 的所有 x，有 $|f[\varphi(x)]-f[\varphi(\xi)]|<\varepsilon$。

借助于这个定理，可以论证许多函数的连续性。例如，所有的函数 $\sqrt[n]{p(x)}$，其中 $p(x)$ 表示一个多项式；这样的函数对于 $p(x)\geqslant 0$ 的所有 x 值都是连续的，因为多项式 $p(x)$ 对所有的 x 连续，而函数 $\sqrt[n]{t}$ 对所有的

$t\geqslant 0$ 连续。函数 $f(x)=e^{\sin x}$ 处处连续，因为 $t=\sin x$ 与 $y=e^t$ 是处处连续函数。类似地，函数 $\operatorname{Arc}\tan(x^2)$, $\cos(5x^2-e^{4x+1})$, $\sin(1/x)\,(x\neq 0)$ 处处连续。

连续函数的性质　在一区间连续的函数构成一个函数类，具有下列重要的性质。高斯以及与他同时代的第一流数学家们把这些性质看作显然的，而波尔查诺(1781～1848 年)发表了这方面的第一个证明。

波尔查诺定理：如果函数在一个闭区间上连续，在区间中 a, b 两点上取符号相反的值，那末在 a 与 b 之间至少存在一点 ξ，在这点上函数为零。

这个定理的证明是在给定的假设下用区间套来达到这样一个点 ξ，使 $f(\xi)=0$。

波尔查诺定理是求解方程的许多逼近方法的基础。例如，由这个定理得出，奇次多项式至少有一个实的零点，因为对于充分大的 ω 值，$p(\omega)$ 与 $p(-\omega)$ 必定符号相反。

下列命题是波尔查诺定理的推论：

1. 在一个区间 I 中无零点的连续函数，必定在这个区间中处处有相同符号。

2. 如果在闭区间上的连续函数 $f(x)$，在这区间的两点取值 $f(a)=A$ 与 $f(b)=B\,(A\neq B)$，那末对 A 与 B 之间的每一个值它至少取到一次。

连续函数还有一些基本性质：

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，其中 $f(x_0)\neq 0$，那末 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内具有与在 x_0 点相同的符号。

韦尔斯特拉斯定理：在闭区间上连续的函数，在这个区间上有界。在闭区间上连续的函数，取到它在这个区间上的最大值和最小值。

在这些定理中，区间为闭的假设不能省略。例如，函数 $1/x$ 在区间 $0<x\leqslant 1$ 连续，这个区间是左开的；当 x 趋近于 0 时，它取的值越来越大；它是无界的。然而，在每一个闭区间 $a\leqslant x\leqslant 1\,(a>0)$ 中它是有界的；$1\leqslant f(x)\leqslant 1/a$。韦尔斯特拉斯定理在非闭的区间中也不一定成立。例如函数 $f(x)=x$ 在右开的区间 $0\leqslant x<1$ 连续，但因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$，所以在这区间中不存在这样的点，在这一点的函数值大于所有其他点上的值。

第6章 微 分 学

微分与积分合起来通称为微积分，是高等分析的基础学科。微分学的对象是函数，它的方法是极限值的研究与计算。它的主要概念，即函数 $f(x)$ 的导数，是 $f(x)$ 由其自变量变化所引起反应的一种敏感性度量。许多几何问题，诸如曲线的切线斜率或曲线的曲率计算也可借助于微分学来解决。

因为物理学中量之间的关系往往可用连续且可微的函数来表达，所以微分学就能在自然科学及技术科学中用数学不仅表示状态而且表示过程。例如若 $s=f(t)$ 描述运动质点所行距离 s 对时间 t 的依赖关系，那末这个函数的导数代表质点的瞬时速度。作为这一观念的拓广，速度的概念可移植到其他一些情况去，其中时间仍起着自变量的作用。由此可以定义物体的加热或冷却，化学过程的反应速度，放射过程的衰变率，以及生物机体的生长率等等概念并进行计算。对于数学本身而言，微分学的方法与结果已成为高等分析的基础。许多学科的发展，如果不研究函数与其导数之间的关系，如果不将函数展开成无穷级数，如果不处理微分方程或微分几何，那简直是不可思议的。

微积分的开端可以追溯到16世纪末，它的理论是在17世纪下半叶

由莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646～1716 年) 与牛顿(Isaac Newton, 1643～1727 年)同时独立地作为一种演算，即作为一种容易驾驭的方法发展起来的。牛顿是由研究物理问题达到微分演算的，而莱布尼茨则是从切线问题入手的。牛顿还早在 1665 年就认识到微分与积分(见 II. 第 7 章)互为逆问题。

6.1 函数的导数

为了分析一列火车从 A 城到 B 城的旅程，两地相距 s_A-s_B，距离-时间图 (见图 6.1-1) 可作为函数 $s=f(t)$ 的图形，其中每一时刻 t_i 相应有火车驶过的距离 s_{t_i}。火车在时刻 t_0 驶离 A 城，在时刻 t_3 刹车，因为信号 S 出现红灯，但火车并没有停下来，因为信号马上变成绿灯。通过加速，火车准时到达 B 城。

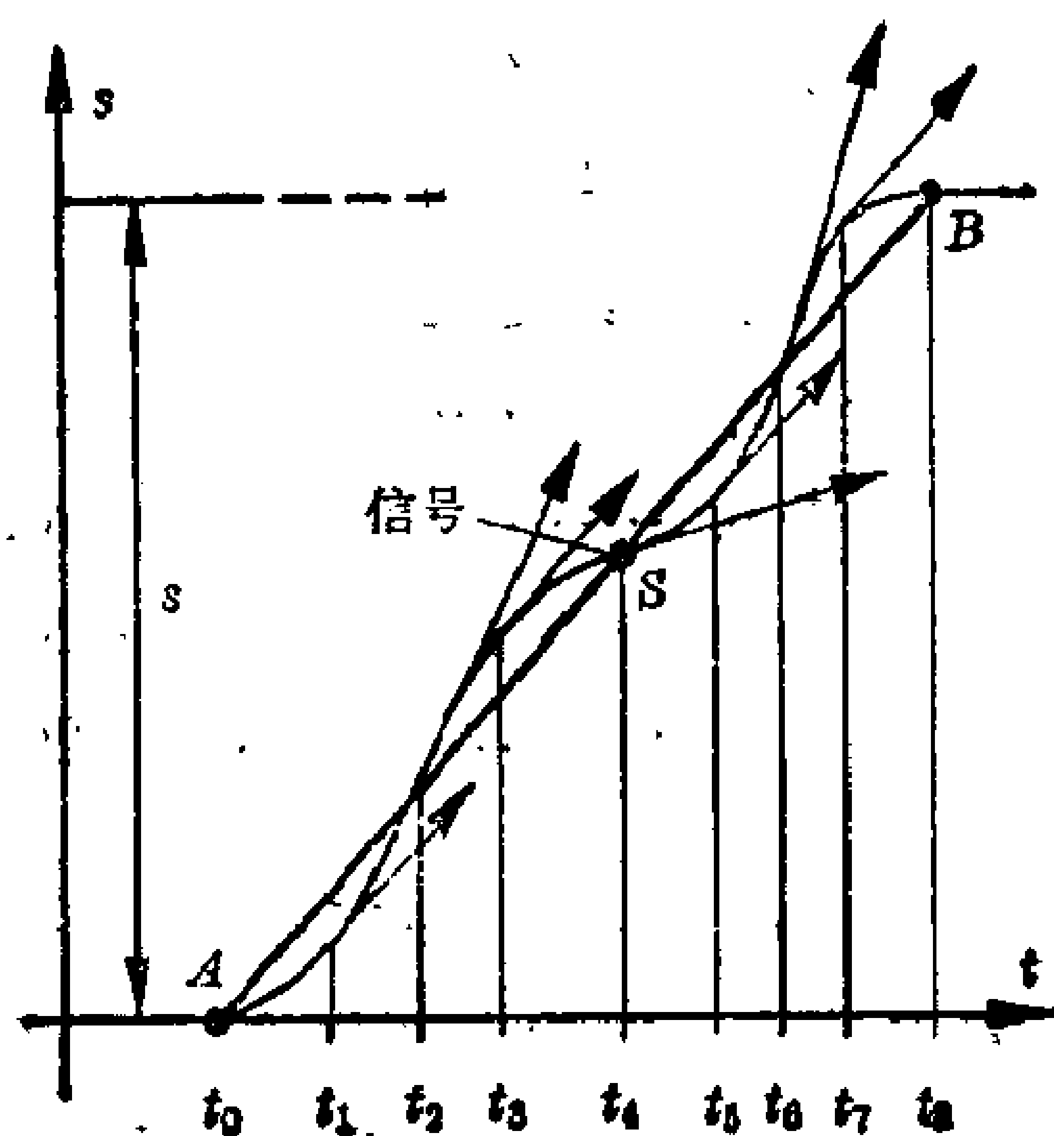


图 6.1-1　火车从 A 城到 B 城的距离-时间图，s 表示距离，t 表示时间

行驶距离(s_n-s_m) 对所花时间(t_n-t_m)的比率 (其中 $n>m$)，是速度的一种度量。在图示的铁路时刻表中，点 A 与 B 是用一条直线连接的。因此一致平均速度为 $\bar{v}=(s_B-s_A)/(t_8-t_0)$。如果要画出曲线的切线平行于直线 AB，那末根据观察，在时刻 t_1, t_3, t_5 与 t_7，火车的速度是 $v=\bar{v}$。在时间区间 (t_0, t_1) 与 (t_4, t_6) 中，速度 v 增加，在 (t_3, t_4) 与 (t_7, t_8) 中速度减少。v 越大，曲线就越陡。在点 (t_1, s_1) 与 (t_5, s_5) 曲线向左弯，在 (t_3, s_3) 与 (t_7, s_7) 向右弯。

当然，必须在几何上将这些命题一个一个弄得更精确，但根本上这个弄精确的过程导致关于函数 $s=f(t)$ 的一些纯粹分析命题，它们不用引证几何意义全都成立。

导数的定义

函数的差商　如果在笛卡尔坐标系中，曲线是函数 $y=f(x)$ 的图形，那末它的每一点 $P_n(n=0, 1, 2, \cdots)$ 有坐标 x_n 与 $y_n=f(x_n)$，其中 x_n 属于这个函数的定义域(见图 6.1-2)。于是可构成差分，如 $\Delta x=x_1-x_0=h$ 与

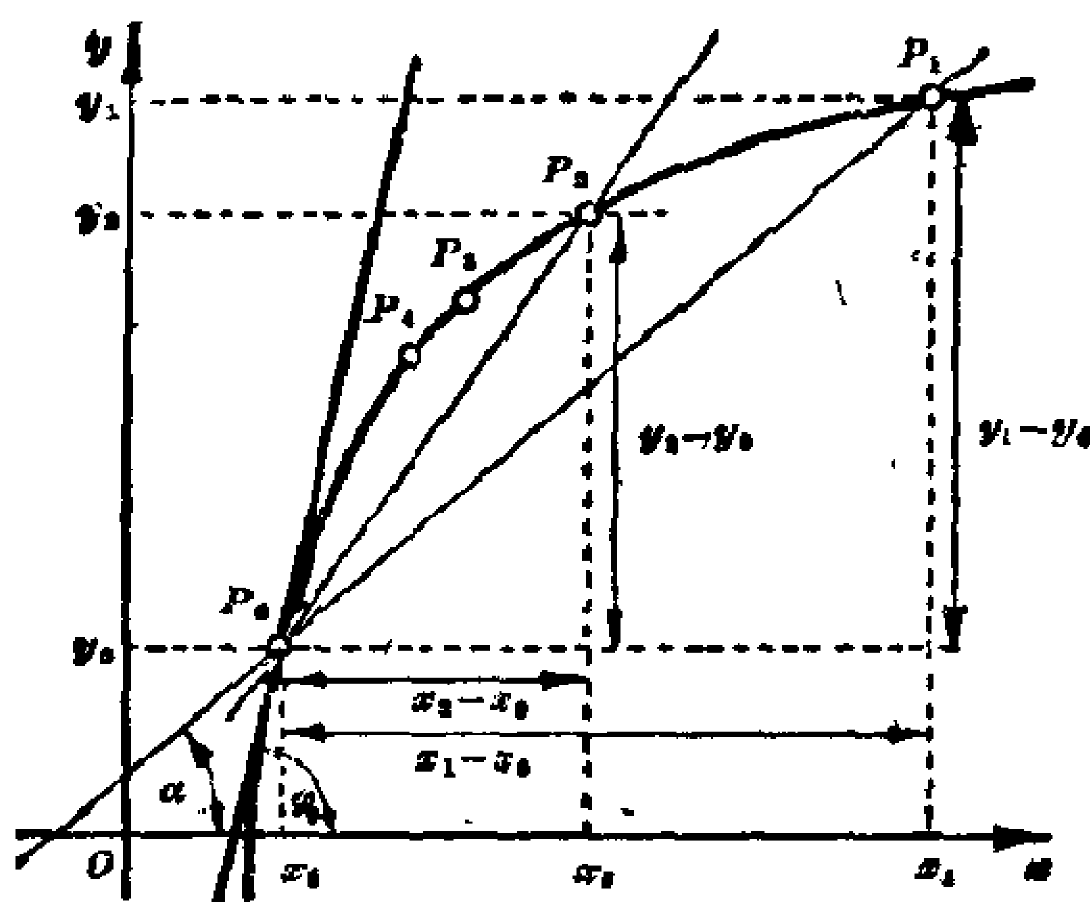


图 6.1-2 曲线在点 P_0 的斜率

$$\begin{aligned}\Delta y&=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=f(x_0+h)-f(x_0),\end{aligned}$$

以及它们的商 $\Delta y/\Delta x$，对于 $x_1\neq x_0$ 这个商是一有限值。它称为**差商**，几何上表示过点 $P_0(x_0, y_0)$ 与 $P_1(x_1, y_1)$ 的直线斜率 $\tan\alpha$，上述直线是曲线的一条割线。这里 α 是从正 x 轴按正向转到割线的角度。

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\&=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\tan\alpha。\end{aligned}$$

差商经常有用，例如，在数值数学中用作均差，在物理中用作平均速度或平均温度梯度。

导数 如果点 $P_0(x_0, y_0)$ 保持固定，而点 $P_1(x_1, y_1)$ 沿曲线朝着点 P_0 移动，那末割线改变着它们的位置及差商，因而角 α 改变着它们的值。如果当 $x_n\to x_0$ 时，差商 $\Delta y/\Delta x$ 趋于一个极限，这个极限就称做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$。于是这个函数的曲线在点 $P(x_0, y_0)$ 有一条切线，它的位置由角 α 的极限 φ 所确定，即由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\tan\varphi$$

所给定。导数也可记为 $f'(x_0)$ 或 $y'_{x=x_0}$（读成：x_0 处的 f 一撇，在点 x_0 的 y' 或者当 $x=x_0$ 时的 dy 比 dx）。

从极限讨论（见 II. 第5章）中得出，左右极限应当彼此相等。

在点 x_0 的导数
$f'(x_0)=y'_{x=x_0}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x_n\to x_0}\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}$ $=\lim\limits_{x_n\to x_0}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

联系到火车从 A 城到 B 城的旅程分析得出，函数 $s=s(t)$ 的曲线凡是这样的时刻 t 就有切线，在这些点上存在极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=\tan\varphi。$$

导数 $\frac{ds}{dt}$ 给出瞬时速度，而曲线单调上升，因为 φ 总大于 0。若在某个区间中 φ 总小于 0，那末曲线将单调下降(见图 6.1-3)。

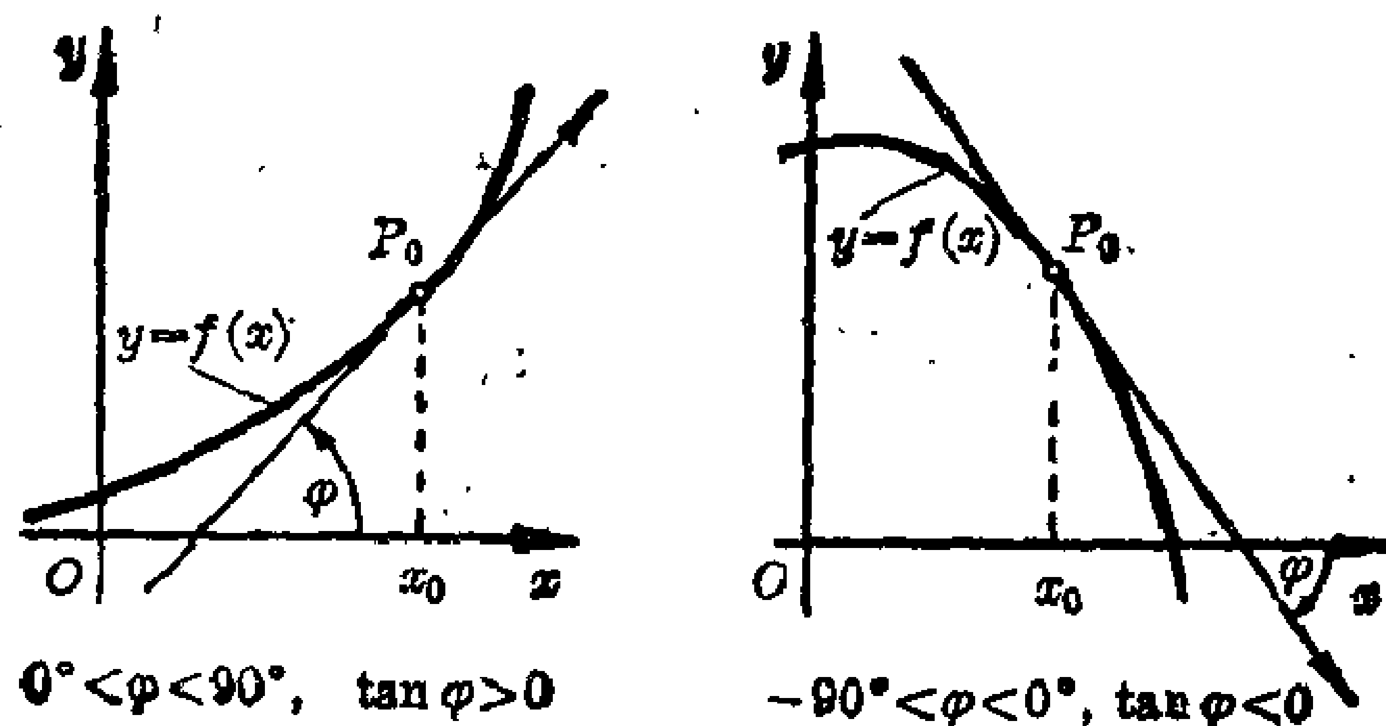


图 6.1-3　递增函数与递减函数

在点 $x=x_0$ 称函数可微，当且仅当差商的左极限与右极限存在且相等。

如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 可微，那末它也在该点连续。

因此，连续性是可微性的一个*必要*条件，但不是*充分*条件。有一些函数(见例 3, 4, 5)在某个点连续但不可微。波尔查诺第一个给出了在一个区间上函数处处连续，但处处不可微的例子。

【例 1】　函数 $y=x^2$ 在点 $x=x_0$ 有导数 $2x_0$。对于不为零的 Δx 值，差商可加以整理并约简为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=2x_0+\Delta x_0。$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，这个表达式收敛于极限 $y'_{x=x_0}=2x_0$。

【例 2】 对于自由落体，距离-时间函数 $s=f(t)=(g/2)t^2$ 关于时间 t 的微分给出速度 $v_{t=t_0}=gt_0$，因为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{(g/2)(t_0+\Delta t)^2-(g/2)t_0^2}{\Delta t}$$

$$=\frac{g}{2}\cdot\frac{\Delta t(2t_0+\Delta t)}{\Delta t}=gt_0+(g/2)\Delta t,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(gt_0+(g/2)\Delta t)=gt_0。$$

【例 3】 函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 不可微（见图 6.1-4）。当 $\Delta x\to 0$ 时差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(0+\Delta x)^{1/3}-0^{1/3}}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x}=\frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}$$

并不趋于有限极限，而是超出一切界限地增大或者说趋于无穷大。函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 的曲线在点 $x=0$ 的切线垂直于 x 轴。

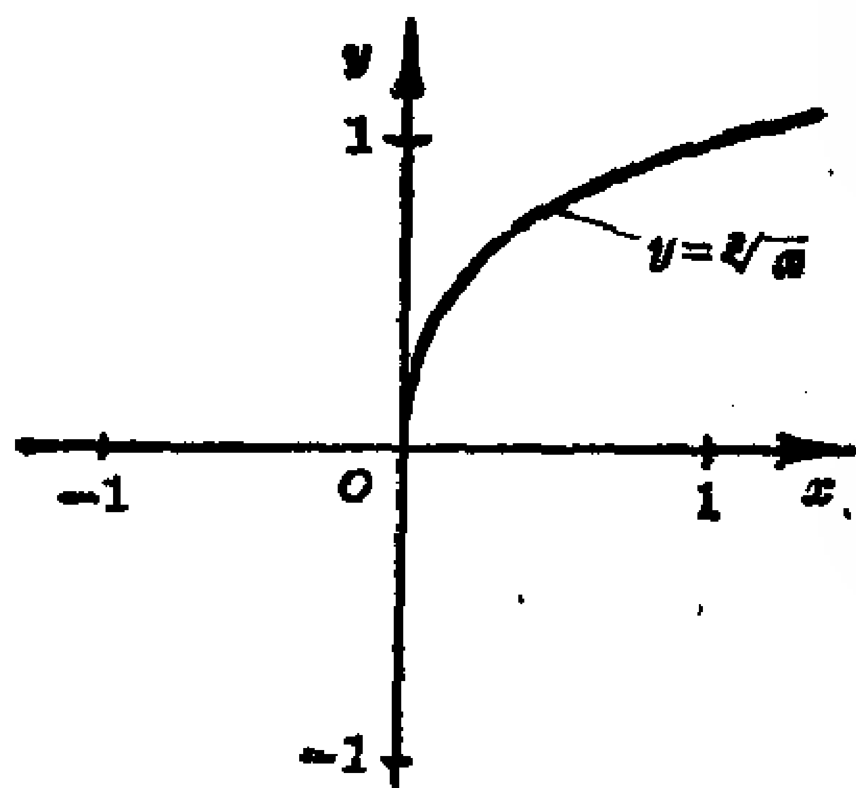


图 6.1-4 函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 图形

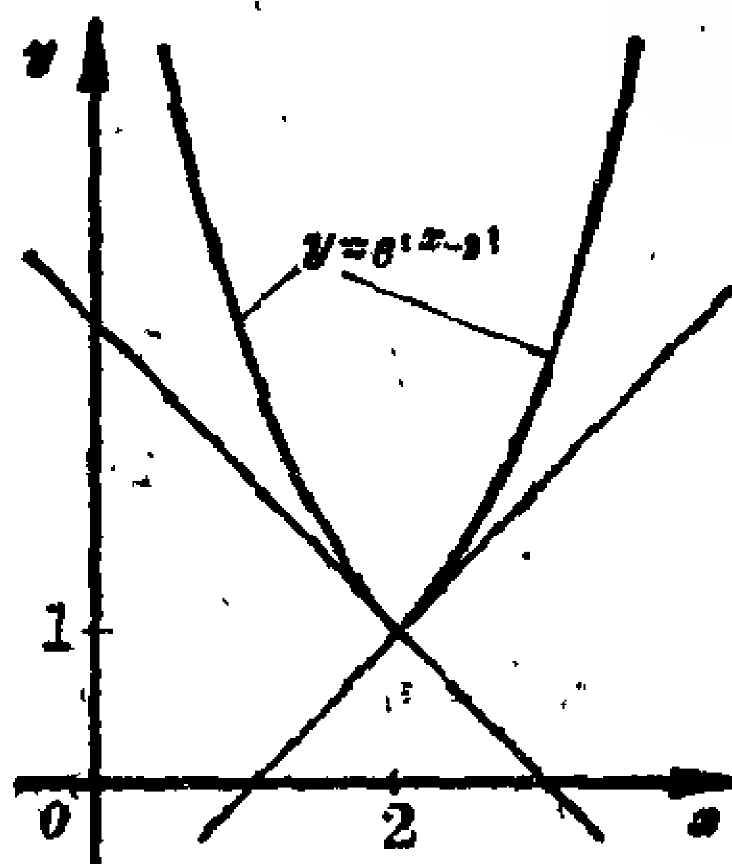


图 6.1-5 函数 $y=e^{|x-2|}$ 图形

【例 4】 函数 $y=e^{|x-2|}$ 在点 $x=2$ 连续，但在该点不可微（见图 6.1-5）。它的差商是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^{|2+\Delta x-2|}-e^{|2-2|}}{\Delta x}=\frac{e^{|\Delta x|}-1}{\Delta x},$$

按 Δx 的符号它趋于 $+1$ 或 -1。在这个点 $(2, 1)$，曲线有两条切线。

【例 5】 在点 $x=0$, 函数 $y=x^{3/2}/2$ 仅仅右侧可微, 因为负的横坐标不属于它的定义域。在 $x=0$, 它的右导数值为零, 因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(1/2)(0+\Delta x)^{3/2}-(1/2)\cdot 0^{3/2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^{3/2}}{\Delta x}=\frac{1}{2}(\Delta x)^{1/2},$$

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1/2)(\Delta x)^{1/2}=0$。

导数作为一个函数

如果函数 $y=f(x)$ 的导数在区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 的所有点都存在, 那末函数在整个区间可微。对于这区间的每一个值 x, 对应有函数在点 x 的导数 $f'(x)$; 于是, $f'(x)$ 是 x 的一个函数, 即**导函数**或**导数**。

【例】 对于所有的值 x, 函数 $y=x^2$ 有导数 $y'=2x$。在点 $x_1=3$ 与 $x_2=-2$, 它分别有值 $y_1'=6$ 与 $y_2'=-4$。

高阶导数 函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 是 x 的一个函数。假定它又是可微的, 如初等函数就几乎总是这种情况, 那末这一阶导数的导数就称做**二阶导数**, 记为 $y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$ (读成: y 两撇, 在 x 点 f 两撇或者 d 两次 y 比 dx 平方)。同理, 可有**三阶**, **四阶**, n **阶导数**。象"存在 n 阶导数"或"任意次可微"等等说法就是在这种意义下理解的。

下列例子可用 **II. 6.2** 导出的规则计算。

【例 1】 $y=f(x)=x^5+x^4/2-5x^3/6+x^2+5x+2$;

$$y'=f'(x)=5x^4+2x^3-5x^2/2+2x+5;$$

$$y''=f''(x)=20x^3+6x^2-5x+2;$$

$$y'''=f'''(x)=60x^2+12x-5;$$

$$y^{IV}=y^{(4)}=f^{IV}(x)=f^{(4)}(x)=120x+12;$$

$$y^{(5)}=f^{(5)}(x)=120;$$

$$y^{(6)}=f^{(6)}(x)=0。$$

【例 2】 $y=f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$; $y'=f'(x)=-\frac{2x}{(x-1)^3}$;

$$y''=f''(x)=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4};\quad y'''=f'''(x)=-\frac{12(x+1)}{(x-1)^5};\cdots$$

【例 3】 $y=f(x)=\sin x$; $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$;

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}\sin x=-\sin x;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3}{dx^3}\sin x=-\cos x;\qquad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^4}{dx^4}\sin x=\sin x;\cdots$$

所有这些都是任意次可微的函数例子。

【例 4】 从自由落体的距离-时间规律 $s=(g/2)t^2$，通过微分得到 $s'=gt$ 与 $s''=g$，这里 g 是一个常数，即重力加速度。因此自由落体是一个等加速运动。

物理上，$s''=\frac{d^2s}{dt^2}$ 记为速度 $s'=\frac{ds}{dt}$ 的导数，也就是加速度。在前面描述的火车从 A 城到 B 城的旅程例子中，可以推算出火车加速的那些时间区间。在这些区间中，x 轴与切线之间的夹角 φ，从而其正切是递增的($s''>0$)；它们是区间 t_0 到 t_2 与 t_4 到 t_6。然而，在区间 t_2 到 t_4 与 t_7 到 t_8，夹角 φ 逐渐变小，火车减速($s''<0$)。

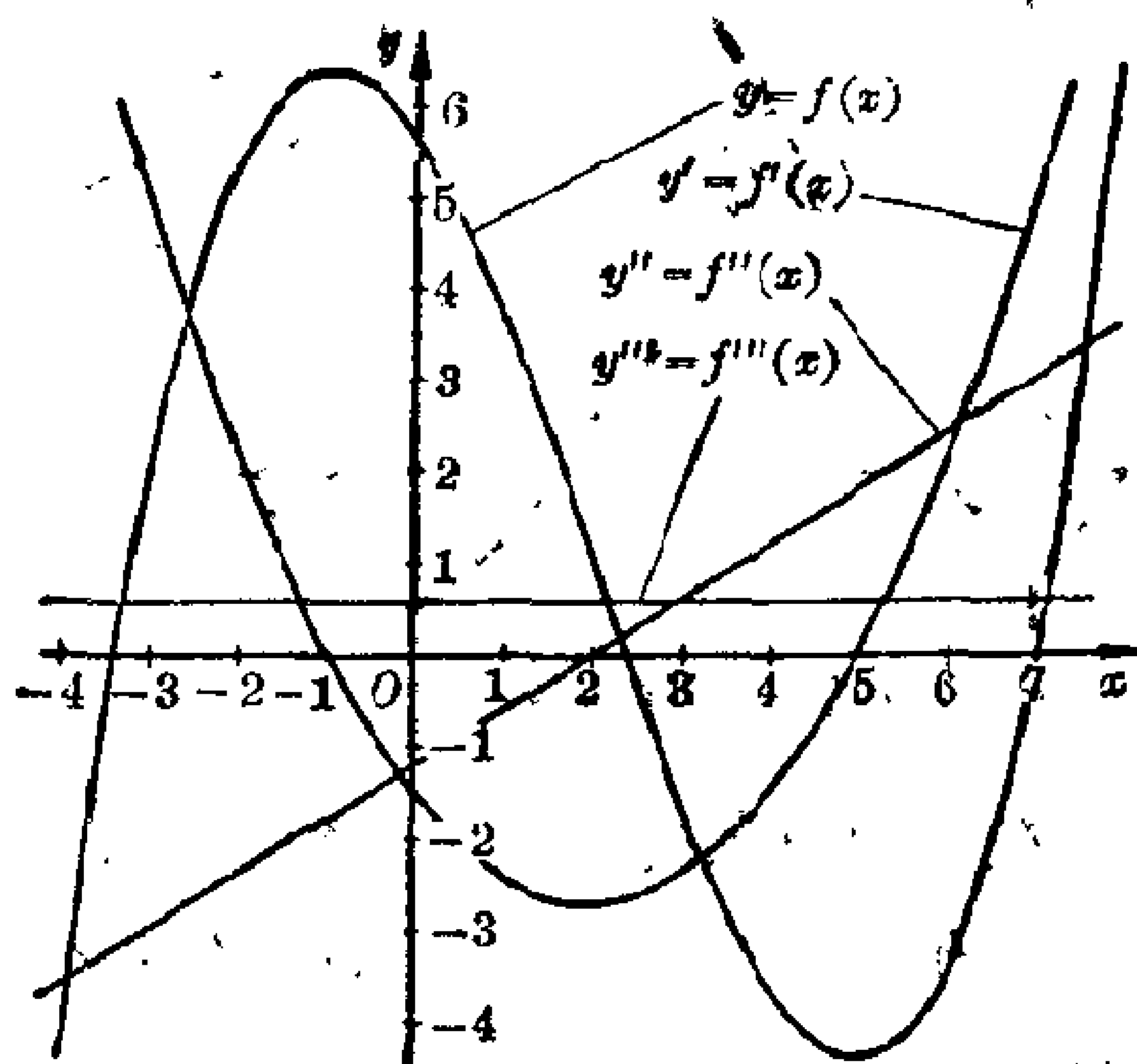


图 6.1-6　函数曲线及其导出曲线

在图 6.1-6 中，函数曲线及其导数曲线相当于下面的数值表：

$$y=f(x)=0.1x^3-0.6x^2-1.5x+5.6;$$

$$y'=f'(x)=0.3x^2-1.2x-1.5;$$

$$y''=f''(x)=0.6x-1.2;$$

$$y'''=f'''(x)=0.6。$$

x	y	y'	x	y	y'
−4	−4.4		3	−1.6	−2.4
−3	2	4.8	4	−3.6	−1.5
−2	5.4	2.1	5	−4.4	0
−1	6.4	0	6	−3.4	2.1
0	5.6	−1.5	7	0	4.8
1	3.6	−2.4	8	6.4	
2	1	−2.7			

图解微分法　由函数 $y=f(x)$ 给定曲线的在点 P 的导数是该点切线 t 与 $+x$ 轴夹角 φ 的切线函数值。如果过点 $A(-1, 0)$ 平行于这条切线的线 t' 与 y 轴相交在点 B，那末 $\tan\varphi=|OB|/|AO|=y'$（见图 6.1-7）。点 P 的切线方向可用镜尺来确定（见图 6.1-8）。尺的平面镜与图形平面成直角。曲线的可见部分要没有一点纽结地过渡到它的镜象那里去，只有当镜尺与曲线在点 P 相交成直角才可能。过 P 点垂直于这一曲线的法线的直线就是切线 t。

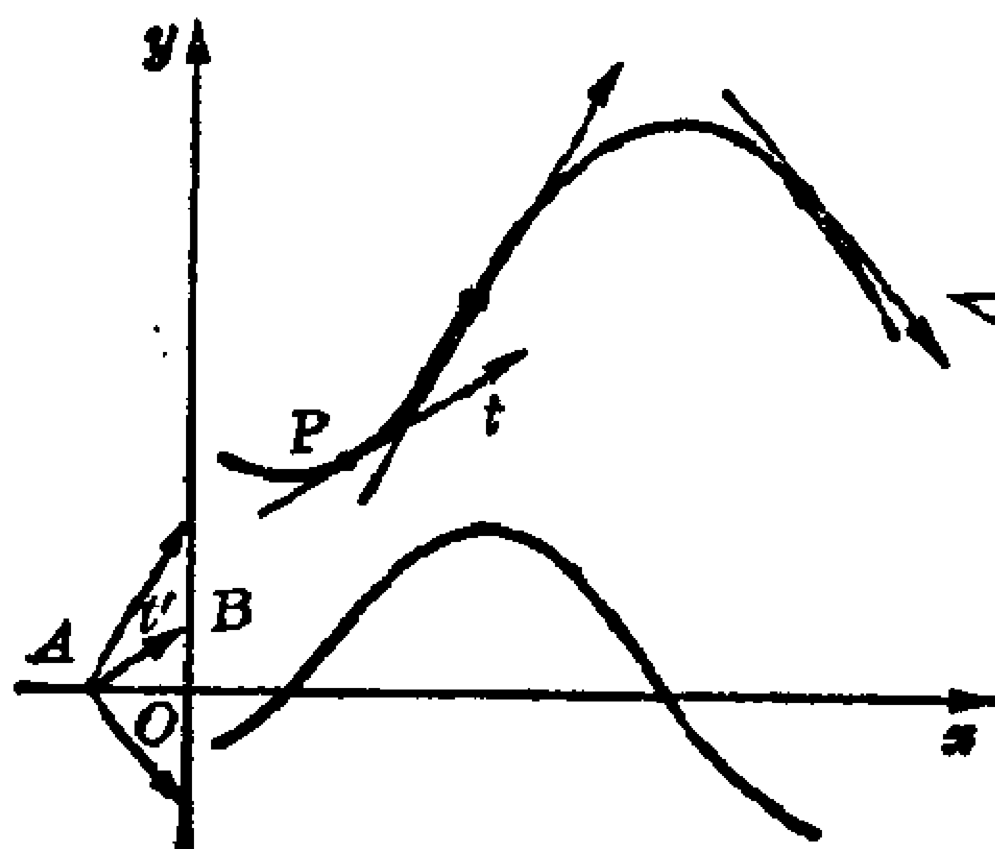


图 6.1-7　图解微分法

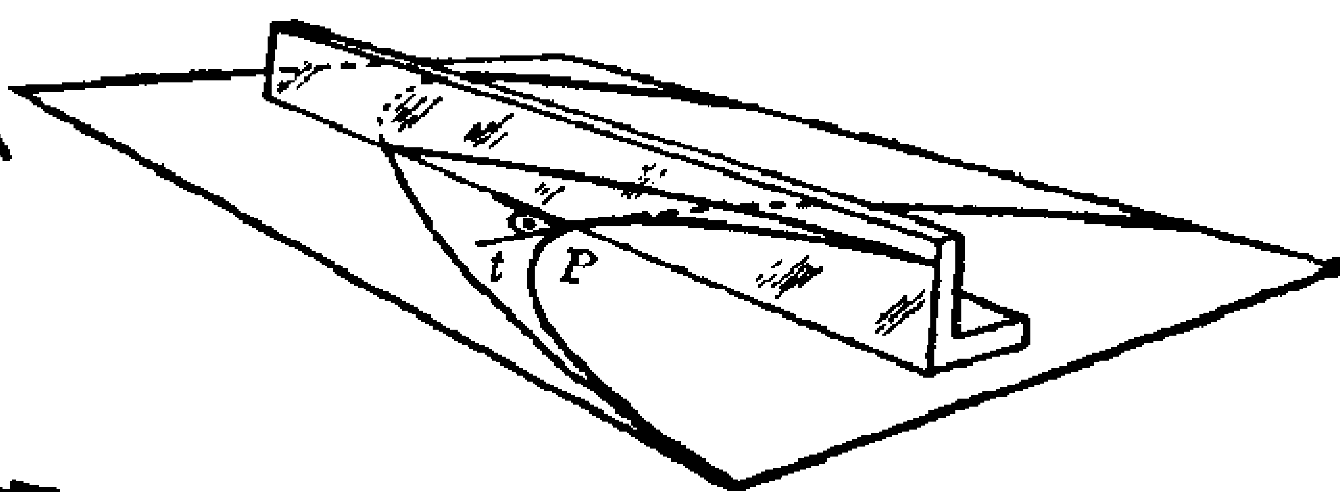


图 6.1-8　镜尺

在更为复杂的工具中，镜尺附加了一个角刻度，切线的方位角可直接读出。在另一式样即微分图解中，附有一个笔录器，它画出给定曲线的导出曲线。

微分中值定理

中值定理　差商 $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ 给出过横坐标 $x=a$ 与 $x=b$ 曲线割线的斜率。如果由曲线所表示的函数 $y=f(x)$ 在从 a 到 b 的区间内可微，那末在此区间内至少存在一点 ξ，使曲线在该点的切线平行于割线。两者具有相同的斜率，亦即

$$f'(\xi)=[f(b)-f(a)]/(b-a)。$$

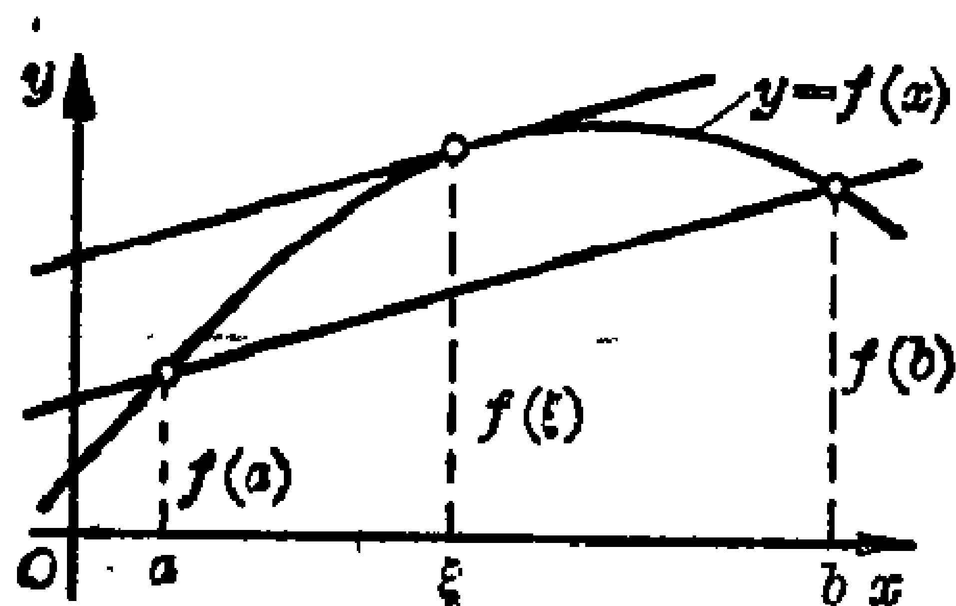


图 6.1-9　微分中值定理

如果将值 a 与 b 记为 $a=x$ 与 $b=x+h$，那末 ξ 可表达成形式 $\xi=x+\vartheta h$，其中 ϑ 是小于 1 的正数，$0<\vartheta<1$（见图 6.1-9）。于是，中值定理具有形式：

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\vartheta h),\ 其中\ 0<\vartheta<1。$$

中值定理: 如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续且在开区间 $a<x<b$ 内可微，那末在此区间内部至少存在一个中间值 ξ（中值），使得 $[f(b)-f(a)]/(b-a)=f'(\xi)$，其中 $a<\xi<b$。

借助于中值定理可以进行数值计算，例如，从已知的邻近值来估计一个函数值。

【例】 从 $f(x)=\ln 690=6.53669$，可确定 $f(x+h)=\ln 691$ 到五位小数。由 $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\vartheta h)$ 可知，$hf'(x+\vartheta h)$ 是加到 $f(x)=\ln 690$ 上的增量。因为 $x=690$ 以及 $x+h=691$，由此得出 $h=1$，又因为 $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\ln x=1/x$，所以增量是 $1\cdot f'(x+\vartheta)=1/(690+\vartheta)$，它介于 $1/690=0.0014492\cdots$ 与 $1/691=0.0014471\cdots$ 之间。取五位小数，这两个数都有值 0.00145。因此得到 $\ln 691=6.53669+0.00145=6.53814$。

罗尔定理 如果在中值定理中函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 相等，那末存在 $a<\xi<b$ 的一个值 ξ，使得 $f'(\xi)=0$，也就是，在这个区间内存在一条切线平行于 x 轴。在以罗尔(Michel Rolle, 1652～1719年)命名的定理中（见图 6.1-10）设了附加条件 $f(a)=f(b)$。

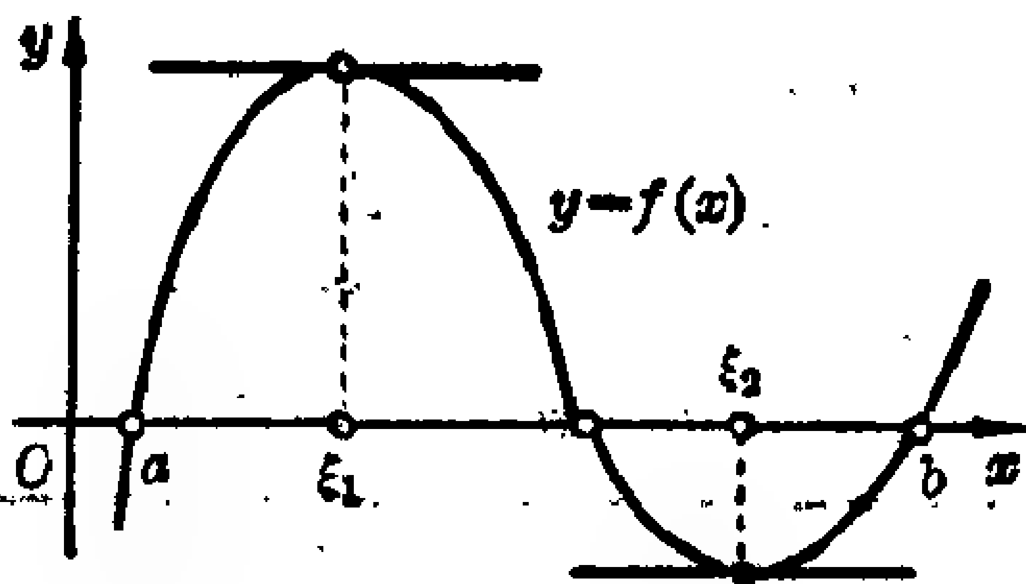


图 6.1-10 罗尔定理的几何解释

罗尔定理: 如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续又在开区间 $a<x<b$ 内可微，而且如果 $f(a)=f(b)$，那末在这区间内部至少存在一个中间值 ξ，使得 $f'(\xi)=0$，其中 $a<\xi<b$。

广义中值定理 为了完整起见，在这里说一下中值定理的拓广，它在许多方面有用：

如果两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，在开区间 $a<x<b$ 内可微，而且如果在这区间内 $g'(x)\neq 0$，那末在这区间的内部至少存在一个中间值 ξ，使得 $[f(b)-f(a)]/[g(b)-g(a)]=f'(\xi)/g'(\xi)$，其中 $a<\xi<b$。

中值定理的推论 如果在某个区间的所有点函数的导数都是零，而且 $x_1<x_2$ 是这样的两个点，那末 $f'(\xi)=[f(x_2)-f(x_1)]/(x_2-x_1)=0$，或 $f(x_2)=f(x_1)$。这函数是一个常函数。

在某个区间内可微的函数且其导数 $f'(x)$ 在此区间内处处为零，则这个函数在该区间内是常数。

如果函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的导数在一个区间内有相同的值，那末 $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ 的导数恒为零，所以 $f(x)$ 是一个常数。

两个函数在一个区间内可微且其导数相等，则在该区间内这两个函数只相差一个加性常数。

直观上已得的定理，在区间 $a<x<b$ 内如果函数 $f(x)$ 的导数是正的，则该函数在该区间递增；如果它的导数是负的，则函数递减，这个定理可借助于中值定理严格地证明。

微分

函数的微分　对于在一个区间可微的函数 $f(x)$，在点 x_0 的差商与导数之差是 Δx 的一个函数 $\varphi(\Delta x)$。从 $[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]/\Delta x-f'(x_0)=\varphi(\Delta x)$ 知道，函数的增量给定为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\varphi(\Delta x)\cdot\Delta x$。它由两部分组成，一部分是 $f'(x_0)\cdot\Delta x$，它关于 Δx 线性且当 $\Delta x\to0$ 时它正比于 Δx 而趋于零；还有一部分是 $\varphi(\Delta x)\cdot\Delta x$，当 $\Delta x\to0$ 时它要比 Δx“更高阶”地趋于零。增量 Δy 的线性部分称做在点 x_0 函数的微分，记为 $dy=df(x_0)=f'(x_0)dx$。量 $dx=\Delta x$ 称做自变量的微分。

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分	$dy=f'(x_0)\cdot dx$

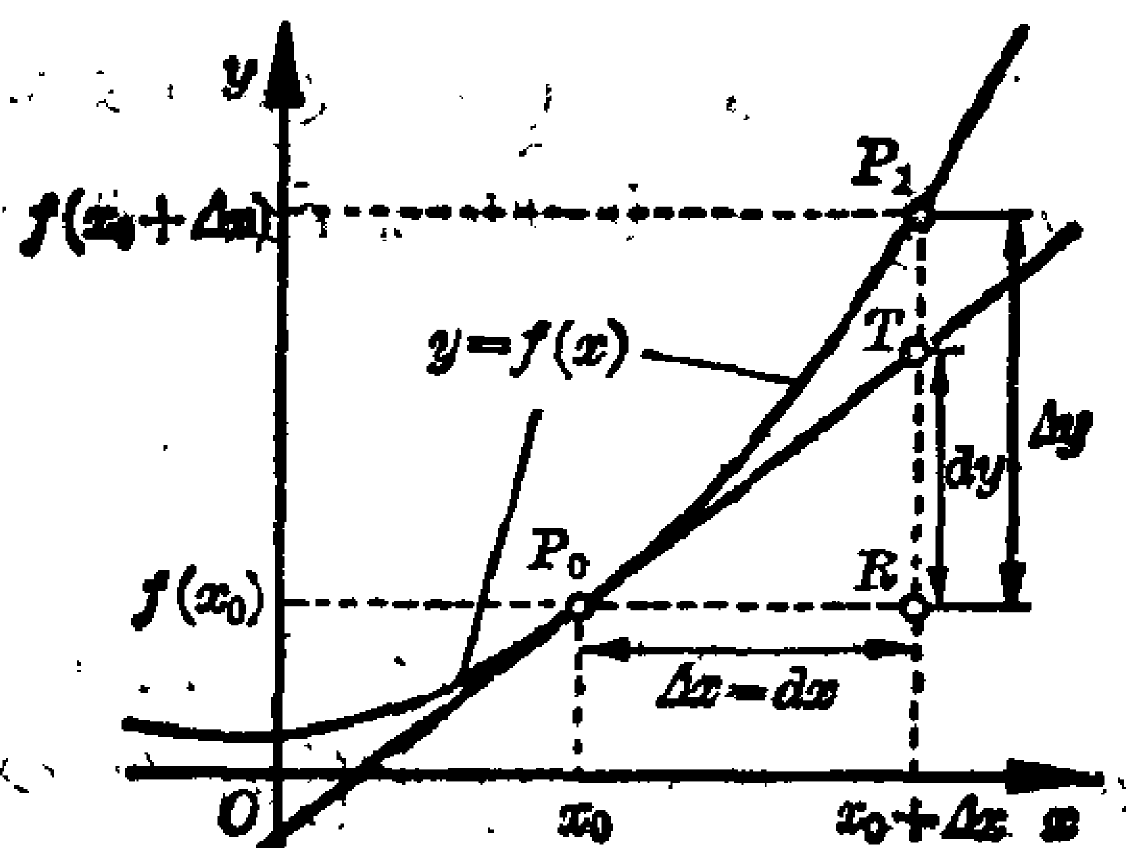


图 6.1-11　函数的微分

【例】　函数 $y=f(x)=x^2$ 在点 x_0 的微分是 $dy=2x_0\cdot dx$。

引进微分概念之后，导数“dy 比 dx”可以表示为两个有限量的商“dy 除 dx”。

在几何解释中(见图6.1-11)，点 $P_0[x_0, f(x_0)]$ 与 $P_1[x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)]$ 位于函数 $y=f(x)$ 的曲线上。如果相应于增量 Δx 的增量 $\Delta y=|RP_1|$ 被点 P_0 的曲线切线相截于点 T，那末 $|RT|=dy$ 就是微分。显然，横坐标增量 $\Delta x=dx$ 越小，dy 对 Δy 的逼近就越好。因此切线可以看作曲线的局部过程的特征。

函数 $y=x^2/10$ 的图形是各别点上画出切线的包络（见图 6.1-12）。

近似 $\Delta y\approx dy$ 在近似计算中利用这样的事实，对于小的 $|\Delta x|=|dx|$，在点 x_0 的邻域内函数的增量 Δy 可由函数在该点的微分 dy 来代替而具有良好的精确度：逼近 $\Delta y\approx dy$ 有效。对于在 $x_0=0$ 的邻域内的函数 $y=\sin x$，$\Delta y=\sin\Delta x-\sin 0=\sin\Delta x=\sin dx$，$dy=\cos 0\cdot dx=dx$，因而近似分式 $\sin dx\approx dx$ 成立，或者对于小的 h，将 h 代 dx 就有 $\sin h\approx h$。

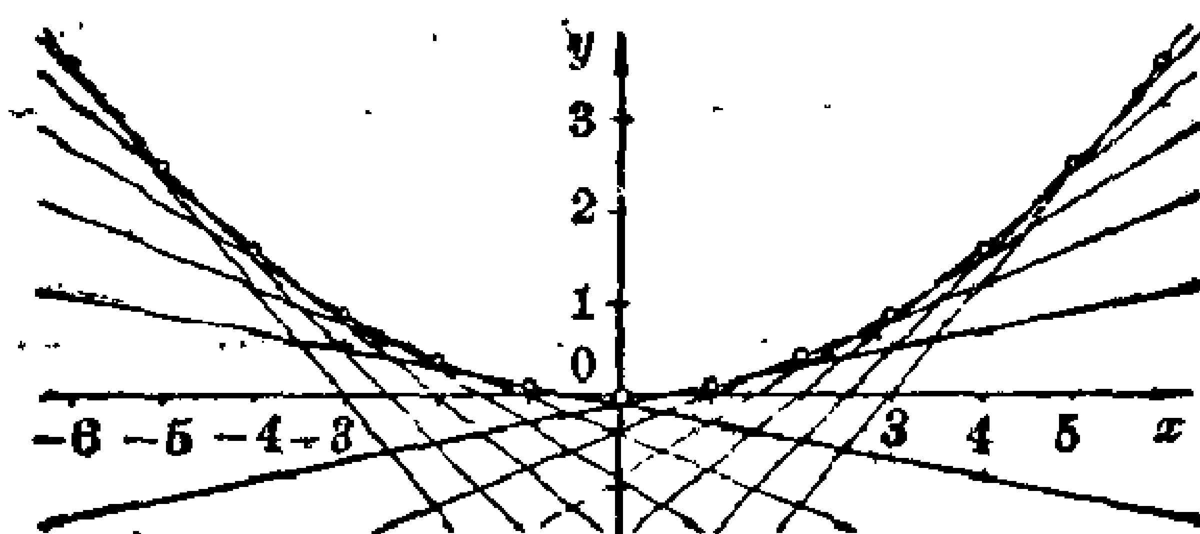


图 6.1-12 方程 $y=x^2/10$ 的曲线切线

有时微分被称为**无穷小**。这是一个不精确且容易误解的说法，因为自始至终考虑的是有限的非零量，只不过对于所考虑的问题选取得充分地小，足以符合要求的准确度而已。

高阶微分 设函数 $y=f(x)$ n 次可微 $(n>1)$，于是它的**一阶微分** $dy=f'(x)dx$ 是 x 的可微函数，具有导数 $(dy)'=f''(x)(dx)^2$，因为 dx 与 x 无关所以在微分时应作为常数因子处理。dy 的微分称做**二阶微分**并记为 d^2y（读成：d 二次 y）。同理可以形成三阶微分，$d^3y=d(d^2y)=f'''(x)(dx)^3$，等等。

二阶，……，n 阶微分	$d^2y=d(dy)=f''(x)(dx)^2$ $d^ny=d(d^{n-1}y)=f^{(n)}(x)(dx)^n$

由这个定义，函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数也可以写成两个微分的商：$f^{(n)}(x)=d^ny/dx^n$（读成：dn 次 y 比 dx n 次方）。

6.2 微分技巧

在导数定义的基础上，在一个函数的微分过程中必须采取如下各步：构成差商，适当整理，然后求出它的极限。不过常常利用典型合成函数与特殊函数导数的**一般公式**更快地得到结果。然而为了证明这些公式，一般地说来，必须遵循上面描述的各步。

典型合成函数的导数

带有常数因子乘积的导数 如果 $y=cf(x)$，其中因子 c 是一个常

数，那末因子 c 可以取在差商的外面：$\Delta y/\Delta x = c(\Delta f(x)/\Delta x)$。只是如果量 a 趋于极限 a_0 的话，那末 ca_0 是 ca 的极限。

因 子 法 则	$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]$

【例】 $y=6x^2$,　$y'=6\cdot 2x=12x$;　$y=\pi\sin x$, $y'=\pi\cos x$;

$y=(2/3)x^3$, $y'=(2/3)\cdot 3x^2=2x^2$;

$y=2\sqrt{x}$,　$y'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$。

和的导数　和 $f(x)=u(x)+v(x)$ 的差商可整理如下：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}。$$

因为和的极限等于极限的和，由此得出

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=u'(x)+v'(x)。$$

和 法 则	$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$

在这种求导中，和式的每一个元素可能又是一个和；于是，定理对于有限多项的和同样成立。

有限个函数之和的导数等于各别函数之导数的和。

该法则对于差也成立，因为减去一个函数可以看作加上同一个函数乘以常数因子(-1)。

积的导数　积 $y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$ 的差商可整理如下：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}。$$

极限运算可与加法以及乘法运算交换，于是，该导数给出为

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)。$$

对于三个因子

$$(v_1v_2v_3)'=(v_1v_2)'v_3+v_1v_2v_3'=v_1'v_2v_3+v_1v_2'v_3+v_1v_2v_3'。$$

积 法 则	
$\frac{d}{dx}(uv)=\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u$	$(uv)'=u'v+v'u$

幂 法 则
$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$; n 是正整数

这个法则可用归纳法推广到 n 个因子。在特殊情况下，当每个因子都等于 x 时，由此得出 $(x^n)'=1\cdot x^{n-1}+1\cdot x^{n-1}+\cdots=nx^{n-1}$。借助于和、积与幂法则，每一个多项式函数都可以微分。

n 次多项式函数的导数是一个 $n-1$ 次多项式函数。

【例 1】 $y=(3x^2-5x+6)(4x^2+3x-7)=u\cdot v,$

$$y'=(6x-5)(4x^2+3x-7)+(8x+3)(3x^2-5x+6)$$
$$=u'\cdot v+v'\cdot u,$$
$$y'=48x^3-33x^2-24x+53。$$

如果首先进行乘法，给出 $y=12x^4-11x^3-12x^2+53x-42$，然后利用和法则微分，那末得出相同的结果。

如果非有理函数，如超越函数作为和式中的项或作为因子出现，那末必须利用下面将要导出的一些导数。

【例 2】 $y=x^2\cdot\sin x$, $y'=2x\sin x+x^2\cos x$。

【例 3】 $y=x^2\cdot\ln x$; $y'=2x\ln x+x^2\cdot(1/x)=x(2\ln x+1)$;

$$y''=1\cdot(2\ln x+1)+x(2/x)=2\ln x+3。$$

【例 4】 $y=x\sin x\cos x=uvw$;

$$y'=u'vw+uv'w+uvw'$$
$$=1\cdot\sin x\cos x+x\cos x\cos x+x\sin x(-\sin x);$$
$$y'=\sin x\cos x+x\cos 2x。$$

商的导数 在商 $y=f(x)=u(x)/v(x)$，$v(x)\neq 0$ 可微的假设下，它的导数可由积法则导出。由 $y=u/v$ 得出 $yv=u$ 或 $u'=y'v+yv'$。于是，

$$y'=(1/v)\cdot(u'-yv')=(1/v)[u'-(u/v)\cdot v']$$
$$=[u'v-uv']/v^2。$$

商法则	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}\left(v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}\right)$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

不难证明，如同积的情况那样从 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 出发，两个可微函数的商确实是可微的。

由商法则可以建立对于 $y=x^n$ 当负整指数即 $n=-m$，m 为正时的导数公式。因为 $y=x^{-m}=1/x^m$，令 $u=1$，$v=x^m$ 进而得到：

$$y'=\frac{0-mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}。$$

$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$，n 为负整数。

【例 1】　在函数 $y=\frac{3x^2-5}{x^4+2}$ 中，取 $u=3x^2-5$，$v=x^4+2$。因为 $u'=6x$ 和 $v'=4x^3$，得

$$y'=\frac{6x(x^4+2)-4x^3(3x^2-5)}{(x^4+2)^2}=\frac{2x(6+10x^2-3x^4)}{(x^4+2)^2}。$$

【例 2】　在函数 $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ 中，取 $u=x^3$ 和 $v=x^2-1$。因为 $u'=3x^2$ 和 $v'=2x$，得

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}。$$

为了求二阶导数，应取 $u=x^4-3x^2$ 与 $v=(x^2-1)^2$。因为 $u'=4x^3-6x$ 与 $v'=4x(x^2-1)$，得

$$y''=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-4x(x^2-1)(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}。$$

【例 3】　函数 $y=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{u}{v}$ 的导数，由于 $u'=1/\cos^2x$，$v'=-1/(\cos^2x)$，所以得到

$$y'=\frac{(1-\tan x)/\cos^2x+(1+\tan x)/\cos^2x}{(1-\tan x)^2}$$

$$=\frac{2}{\cos^2x(1-\tan x)^2}=\frac{2}{1-\sin 2x}。$$

链式法则　如前所述（见 I. 第 5 章），$y=f[\varphi(x)]$ 是一个复合函数，

这个复合函数的定义域由这样的 x 值组成，对于这些 x，函数 $t=\varphi(x)$ 的值 t 属于函数 $y=f(t)$ 的定义域。差商可代为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}$。如果函数 $t=\varphi(x)$ 在点 ξ 可微，于是 $\frac{dt}{dx}=\varphi'(\xi)$ 存在，再如果函数 $y=f(t)$ 在点 $\tau=\varphi(\zeta)$ 有导数 $\frac{df}{dt}=f'(\tau)$，那末复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 ξ 也可微。得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx},\qquad \frac{df}{dx}=\frac{df}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx},$$

或
$$f'[\varphi(x)]=f'(t)\varphi'(x),$$
其中
$$t=\varphi(x)。$$
这个证明只有当 $\Delta t\neq 0$ 时才有效，不过结果总是成立的。

链式法则	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ 或 $f'(x)=f'(t)\varphi'(x)$

【例 1】 函数 $y=(3x^2+5)^4$ 具有形式 $y=f(t)=t^4$，其中 $t=\varphi(x)=3x^2+5$。由链式法则可得

$$y'=\frac{dy}{dt}=\frac{df}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=4t^3\cdot 6x=4(3x^2+5)^3\cdot 6x=24x(3x^2+5)^3。$$

【例 2】 在函数 $y=\sqrt{5x^3-7x+8}$ 中，$y=f(t)=t^{1/2}$ 且 $t=\varphi(x)=5x^3-7x+8$。链式法则给出

$$y'=\frac{df}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=\frac{1}{2}t^{-1/2}(15x^2-7)=\frac{15x^2-7}{2\sqrt{5x^3-7x+8}}.$$

【例 3】 在函数 $y=\sin 2x$ 中，$y=f(t)=\sin t$ 且 $t=\varphi(x)=2x$。求得 $y'=\frac{df}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x$。

【例 4】 为了微分函数 $y=\ln\sin\sqrt{a+bx}$，必须使用链式法则若干次。令 $y=f(t)=\ln t$，$t=\varphi(u)=\sin u$，$u=\psi(v)=\sqrt{v}$ 以及 $v=a+bx$，相继得到

$$y'=\frac{df}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{d\psi}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{1}{t}\cdot\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot b$$

$$=\frac{1}{\sin\sqrt{a+bx}}\cdot\cos\sqrt{a+bx}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a+bx}}=\frac{b\cot\sqrt{a+bx}}{2\sqrt{a+bx}}。$$

对数微分法 在某些情况下，不微分给定函数 $y=f(x)$，而微分它的

自然对数 $\ln f(x)$ 更方便。由链式法则给出

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{d}{dx}f(x) \quad 或 \quad f'(x)=f(x)\cdot\frac{d}{dx}\ln f(x)。$$

$$\frac{d}{dx}f(x)=f(x)\cdot\frac{d}{dx}\ln f(x)$$

【例 1】 对于正的 x 值，函数 $y=x^x$ 的自然对数是 $\ln x^x=x\ln x$。由积法则给出 $\frac{d}{dx}\ln x^x=1\cdot\ln x+\frac{x}{x}$。于是，给定函数的导数是 $y'=x^x(\ln x+1)$。

【例 2】 对于正的 x 值，函数 $y=x^{1/x}$ 有导数

$$y'=x^{1/x}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x^{1/x})=x^{1/x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)=x^{1/x}\cdot\frac{-\ln x+1}{x^2}$$
$$=x^{(1-2x)/x}(1-\ln x)。$$

【例 3】 函数 $y=x^n[\varphi(x)^{1/m}]\sin^2 x$ 有三个因子。它的自然对数是 $\ln y=n\ln x+1/m\cdot\ln\varphi(x)+2\ln\sin x$，其导数是

$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{n}{x}+\frac{\varphi'(x)}{m\varphi(x)}+\frac{2\cos x}{\sin x}。$$

由此得到给定函数的导数

$$y'=x^n[\varphi(x)]^{1/m}\sin^2 x\left[\frac{n}{x}+\frac{\varphi'(x)}{m(\varphi(x))}+2\cot x\right]。$$

【例 4】 对于 $y=(\sin x)^x$，得到

$$y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cos x/\sin x)=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cot x)。$$

互为反函数的导数 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $a<x<b$ 内单调且连续，对于该区间的每个 x 具有有限的非零导数 $f'(x)$，那末 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应的 y 区间也可微，且 $f'(x)\cdot\varphi'(y)=1$。

反函数法则	$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)},\quad \frac{dx}{dy}=1\Big/\frac{dy}{dx}$

根据假定使在两个差商 $\Delta x/\Delta y$ 与 $\Delta y/\Delta x$ 中 Δx 与 Δy 有相同的值，所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}=1$。根据假定 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ 存在且不为零，因此极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ 同样存在且有值 $\frac{1}{f'(x)}$。为了作几何解释，在 $x=\varphi(y)$ 中交换变元。于是曲线 $y=\varphi(x)$ 是作为曲线 $y=f(x)$ 关于坐标系的对称线 $x=y$ 取镜象而

得。如果曲线 $y=f(x)$ 的切线与 $+x$ 轴的交角为 α，那末曲线 $y=\varphi(x)$ 的对应切线与 $+y$ 轴的交角也是 α，亦即与 $+x$ 轴的交角为 $\beta=\pi/2-\alpha$。而对于余角有 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$，或 $f'(x)\cdot\varphi'(x)=1$（见图 6.2-1）。

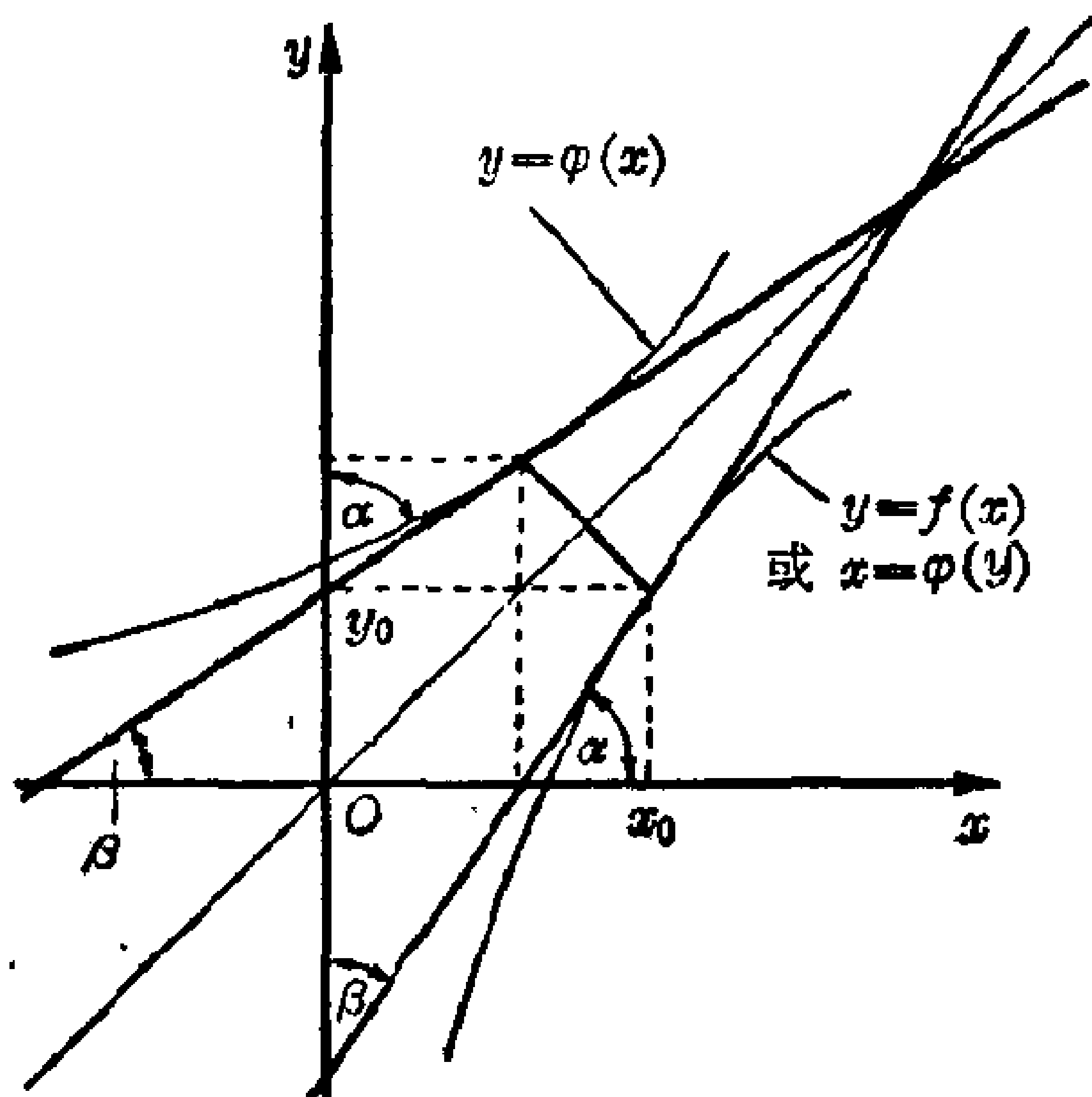


图 6.2-1 互为反函数的曲线斜率

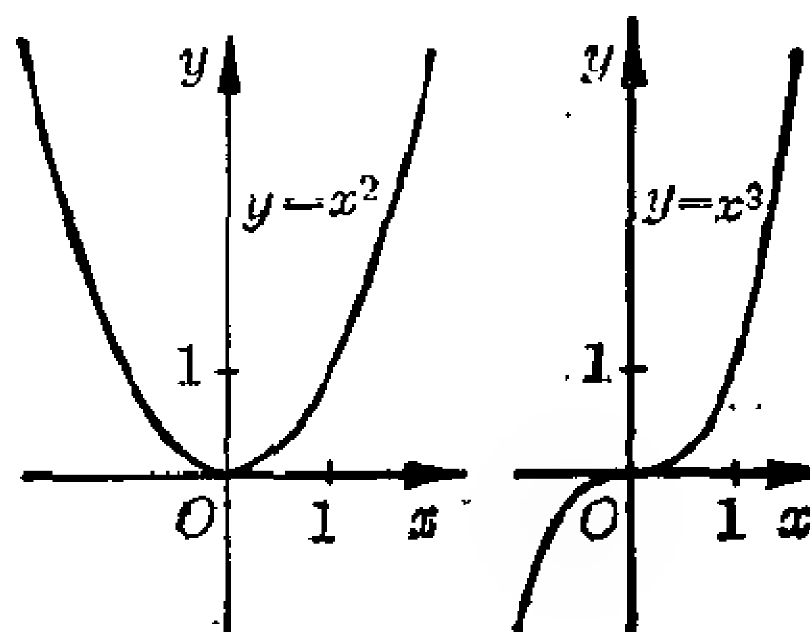


图 6.2-2 函数 $y=x^2$ 与 $y=x^3$ 图形，它们的反函数在 $x=0$ 不可微

如果在一个区间 $f'(x)\equiv 0$，那末函数 $f(x)$ 在这个区间肯定没有反函数，因为在此情况下，y 单独一个值对应于在该区间所有的 x 值。但如果只对该区间的个别点 x_i 才有 $f'(x_i)=0$，在这些点相应于函数 $f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 又是确定的，那末因为 $f(x)$ 单调，$f'(x)$ 在通过这些点 x_i 时不变号。另一方面，如果 $f'(x_i)=0$ 且 $f'(x)$ 在点 x_i 的某个邻域内总是同号，那末 $f(x)$ 在这个邻域内肯定有反函数，但反函数在点 x_i 不可微；例如，函数 $y=x^3$ 在点 $x=0$ 就是这种情况（见图 6.2-2）。

反函数的微分法则用于当一个函数的反函数的导数为已知时求这个函数的导数；例如求对数函数、圆函数以及反双曲函数的导数。

参数形式的函数微分法 函数 $y=f(x)$ 的参数表示给定为 $x=\varphi(t)$ 与 $y=\psi(t)$。于是也可将 y 表示成参数 t 的复合函数 $y=f[\varphi(t)]$，而链式微分法则产生 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$。在这个计算中假定函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 关于参数 t 可微且 $\varphi'(t)\neq 0$。

参数形式的函数导数	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$ 或 $f'(x)=\psi'(t)/\varphi'(t)$

【例 1】 方程为 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的椭圆，参数表示为 $x=a\cos t$ 与 $y=b\sin t$。由关于参数的导数，$\frac{dx}{dt}=-a\sin t$ 与 $\frac{dy}{dt}=b\cos t$，求得导数 $\frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos t}{a\sin t}=(-b/a)\cot t$。因为 $\cos t=x/a$ 与 $\sin t=y/b$，所以得到 $\frac{dy}{dx}=-b^2x/(a^2y)$ 作为给定椭圆在点 $P(x, y)$ 的切线斜率。

【例 2】 旋轮线的参数表示为 $x=a(t-\sin t)$ 与 $y=a(1-\cos t)$。因为 $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)=2a\sin^2(t/2)$ 与 $\frac{dy}{dt}=a\sin t=2a\sin(t/2)\cos(t/2)$，所以其导数给出为 $\frac{dy}{dx}=\cot(t/2)$。由此结果得出在 $t=2k\pi$，($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)的每一个点，旋轮线与 x 轴相触而为尖点。其切线垂直于 x 轴。

极坐标中的函数微分　如果在极坐标中 $r=r(\vartheta)$ 表示一个函数，那末借助于极坐标与笛卡尔坐标之间的关系 $x=r\cos\vartheta$ 与 $y=r\sin\vartheta$，可转变为函数的参数表示(参数为 ϑ)：$x=r(\vartheta)\cos\vartheta$ 与 $y=r(\vartheta)\sin\vartheta$。于是，它的导数由 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\vartheta}\Big/\frac{dx}{d\vartheta}$ 给定。如果用一个小点记关于参数的微分，$\frac{dr}{d\vartheta}=\dot{r}$，那末：

$$\frac{dy}{d\vartheta}=\dot{r}\sin\vartheta+r\cos\vartheta \quad 与 \quad \frac{dx}{d\vartheta}=\dot{r}\cos\vartheta-r\sin\vartheta。$$

极坐标中函数 $r=r(\vartheta)$ 的导数	$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{r}\sin\vartheta+r\cos\vartheta}{\dot{r}\cos\vartheta-r\sin\vartheta}$

【例】 对数螺线的方程为 $r=ae^{k\vartheta}$，根据上述的法则，其导数是：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ake^{k\vartheta}\sin\vartheta+ae^{k\vartheta}\cos\vartheta}{ake^{k\vartheta}\cos\vartheta-ae^{k\vartheta}\sin\vartheta}=\frac{k\sin\vartheta+\cos\vartheta}{k\cos\vartheta-\sin\vartheta}。$$

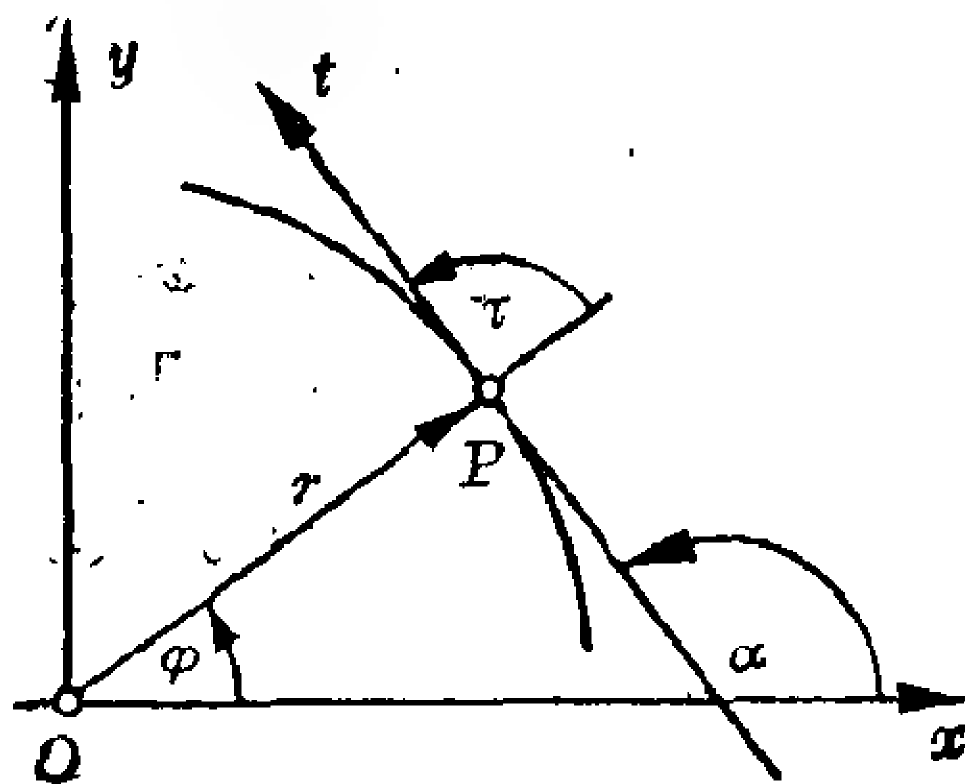


图 6.2-3　曲线的切线与位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角 τ

这个结果表明，切线的方向仅依赖于 ϑ，所以与正 x 轴交角为 ϑ_0 的位置向量总是与螺线相交成常角 φ_0。

一般情况下为了计算切线与位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角 τ，取关系 $\tau=\alpha-\varphi$ (见图 6.2-3)而推得

$$\tan\tau=\tan(\alpha-\varphi)=\frac{\tan\alpha-\tan\varphi}{1+\tan\alpha\tan\varphi}=\frac{\frac{dy}{dx}-\tan\varphi}{1+\frac{dy}{dx}\tan\varphi}$$

$$=\frac{y'\cos\varphi-\sin\varphi}{y'\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{r}{\dot{r}},$$

其中最后一个表达式是用极坐标下函数的导数法则得到的，然后解出 $\frac{r}{\dot{r}}$。

如果将此结果应用于对数螺线(见本章第5节—特殊曲线)，得到

$$\tan\varphi=(ae^{k\theta})/(ake^{k\theta})=1/k。$$

这意味着对数螺线以与所有矢径向量相交成同一个角 $\varphi=\operatorname{arc}\tan(1/k)$。由于这个原因，为保证一个常切削角，某些切削机床刀具的刃口具有对数(或等角)螺线的形状。

隐函数微分 经常需要对一个由 $F(x,\ y)=0$ 隐式定义的函数进行微分。为了这个目的，表达式 $F(x,\ y)$ 作为两元函数必须就固定的 x，关于 y 可微，以及就固定的 y，关于 x 可微。再如果对于给定的函数存在一个连续的显式 $y=f(x)$，那末当 $\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}\neq 0$ 时，$y=f(x)$ 也可微，且不必先找出显式 $y=f(x)$，就可借助于下面的公式（见多元函数的导数）得到它的导数 $y'=f'(x)$。字母 ∂ 标记函数 $F(x,\ y)$ 的偏导数。

隐式微分 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}\Big/\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}$ 或 $y'=-Fx/Fy$

【例】 由 $F(x,\ y)=2x^2-y^2+12x-2y+3=0$ 给定的双曲线在点 $P_0(2,\ 5)$ 的斜率为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0=2$ 的导数。由

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x+12,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-2y-2,$$

得出 $f'(x)=-(4x+12)/(-2y-2)=(2x+6)/(y+1)$ 从而 $f'(2)=5/3$。

特定函数的导数

常函数与幂函数的导数 因为常函数的每一个差商都为零，所以它的导数也等于零。对于幂函数 $y=x^n$ 的导数，如果 n 是正整数，则由积法则给出 $y'=nx^{n-1}$。将这一点与商法则结合起来，此结果可拓广到负整指数。幂函数的指数 n 也可以是有理数 p/q，或一般地为实数（见Ⅰ.第2章）。

那末定义 $y=x^{p/q}=(x^p)^{1/q}$ 或 $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$，其中变量 x 限于取正值。利用链式法则，对于任意的 α 求得指数函数的导数为

$$\frac{dy}{dx}=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot(1/x)=\alpha\cdot(x^\alpha/x)=\alpha x^{\alpha-1}。$$

独立于上述结果，有理指数 p/q 的幂函数的导数，其中整数 p 与 q 没有公因子，利用反函数法则可直接按下述步骤得出：

$$y_1=x^{1/q}\to y_1^q=x\to\frac{dy_1}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy_1}=1/(qy_1^{q-1});$$

$$y=x^{p/q}=y_1^p\to\frac{dy}{dx}=py_1^{p-1}\cdot\frac{dy_1}{dx}=(p/q)\cdot(y_1^{p-q})$$

$$=(p/q)x^{(p-q)/q}=(p/q)x^{(p/q)-1}。$$

$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1},\quad n\text{ 是实数}$$

【例】

函数	导数	函数	导数
$y=x$	$y'=1$	$y=x^{-4}$	$y'=-4x^{-5}$
$y=2x-1$	$y'=2$	$y=x^{1/3}$	$y'=1/(3x^{2/3})$
$y=-x/2+2$	$y'=-1/2$	$y=x^{2\sqrt{2}}$	$y'=2\sqrt{2}\,x^{2\sqrt{2}-1}$
$y=x^{15}$	$y'=15x^{14}$	$y=x^\pi$	$y'=\pi x^{\pi-1}$

指数函数的导数 当 x 趋于零时，$(e^x-1)/x$ 的极限为 1(见 **II**. 第 5 章)。这个表达式出现在指数函数 $y=e^x$ 的差商中：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\frac{e^xe^{\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)。$$

$$\frac{de^x}{dx}=e^x$$

这里 Δx 趋于零，而对于任意固定的 x 值 e^x 是常数，因而差商趋于极限 e^x。只有这个函数的导数等于该函数。由于这个原因，指数函数 $y=e^x$ 适合于描述给定变量 y 的变分 y' 等于 y 或与 y 成比例的那种自然事件，例如放射性物质的衰变。由链式法则得出 $\frac{d}{dx}e^{kx}=ke^{kx}$($k$ 是比例因子)。一般

指数函数 $y=a^x=e^{x\ln a}$ 的导数按链式法则给出:

$$\frac{dy}{dx}=\ln a\cdot e^{x\ln a}。$$

$$\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$$

对数函数的导数 对数函数 $y=\log_a x$ 的反函数是函数 $x=a^y$，其导数是 $\frac{dx}{dy}=a^y\ln a$。函数 $x=a^y$ 单调且其导数对变量的有限值恒不为零。由此得出其导数的倒数是对数(见 I. 第 2 章)的导数:

$$\frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=1/(a^y\ln a)=1/(x\ln a)=(1/x)\log_a e。$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\cdot\log_a e \qquad \frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$

三角函数的导数 在取极限之前形成差商并加整理:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$=\cos(x+\Delta x/2)\cdot\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}。$$

这里使用三角公式

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos[(\alpha+\beta)/2]\sin[(\alpha-\beta)/2],$$

其中 $x+\Delta x=\alpha$ 与 $x=\beta$。

当 $\Delta x\to 0$ 时，商 $\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)$ 趋于极限 1。于是，当 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta y/\Delta x$ 趋于极限 $\cos x$，因为余弦函数是连续的。

$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$	$\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=\sec^2 x$
$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$	$\frac{d\cot x}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$ $=-\operatorname{cosec}^2 x$

函数 $y=\cos x$ 的导数是通过相应的整理而得。因为 $y=\tan x=\sin x/\cos x$ 与 $y=\cot x=\cos x/\sin x$，这些函数的导数可利用商法则求得。然而，这些导数仅对 $\cos x$ 或 $\sin x$ 不等于零的 x 值有效，因此不能取 $x=(2k+1)\pi/2$

或 $x=2k\cdot\pi/2$，其中 k 是任一整数。

圆函数的导数　具有 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 及 $-\pi/2\leqslant y\leqslant+\pi/2$ 的函数 $y=\operatorname{Arc}\sin x$ 是函数 $x=\sin y$ 的反函数，正弦函数在给定区间上连续且单调。因此它的导数由 $\frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=1/\cos y=1/\sqrt{1-x^2}$ 给出。由于条件 $\frac{dx}{dy}\neq0$，这个结果必须限于开区间 $-1<x<+1$。如果函数 $x=\sin y$ 在其另一个单调性区间取逆，例如在 $-\pi/2+k\pi\leqslant y\leqslant+\pi/2+k\pi$ 上取逆，其中 k 是整数，那末 $y=(-1)^k\operatorname{Arc}\sin x+k\pi$ 是反函数且其导数是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(-1)^k}{\sqrt{1-x^2}}。$$

同理，具有 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 及 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 的函数 $y=\operatorname{Arc}\cos x$ 是函数 $x=\cos y$ 的反函数，因而在区间 $-1<x<+1$ 内它的导数是 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。在区间 $k\pi\leqslant y\leqslant(k+1)\pi$ 上，其中 k 是整数，函数 $x=\cos y$ 单调，它的反函数是 $y=(-1)^k\operatorname{Arc}\cos x+k\pi$。这个函数有导数 $\frac{dy}{dx}=\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{1-x^2}}$。用类似的方式，可得 $y=\operatorname{Arc}\tan x$ 当 $-\pi/2<y<+\pi/2$ 时的导数，以及 $y=\operatorname{Arc}\cot x$ 的当 $0<y<\pi$ 时导数，并且这方法分别对于区间 $-\pi/2+k\pi<y<+\pi/2+k\pi$，$k\pi<y<(k+1)\pi$ 也有效。

$\frac{d\operatorname{Arc}\sin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　$\lvert x\rvert<1$	$\frac{d\operatorname{Arc}\tan x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d\operatorname{Arc}\cos x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　$\lvert x\rvert<1$	$\frac{d\operatorname{Arc}\cot x}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$

双曲函数的导数　这些函数定义为指数函数的有理函数，因此可利用和与商法则进行微分。例如，

$$\frac{d\sinh x}{dx}=\frac{d}{dx}(e^x-e^{-x})/2=(e^x+e^{-x})/2=\cosh x。$$

$\frac{d\sinh x}{dx}=\cosh x$	$\frac{d\cosh x}{dx}=\sinh x$
$\frac{d\tanh x}{dx}=\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\frac{d\coth x}{dx}=-\frac{1}{\sinh^2 x}$

由 $y=\tanh x=\sinh x/\cosh x$, 得

$$\frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x},$$

其中 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$。

反双曲函数的导数 按反函数法则，反双曲函数的导数可以由关系 $\frac{dy}{dx}=1\bigg/\frac{dx}{dy}$ 求得；例如，

$$\frac{d\sinh^{-1}x}{dx}=1\bigg/\frac{d\sinh y}{dy}=1/\cosh y=1/\sqrt{1+x^2}。$$

在定义域 $|x|<1$ 内对于 $y=\tanh^{-1}x$，以及在 $|x|>1$ 内对于 $y=\coth^{-1}x$ 采用类似的过程。这里所示的导数代表不同的函数，尽管它们形式同一，但它们的定义域不同。

$\frac{d\sinh^{-1}x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\frac{d\tanh^{-1}x}{dx}=\frac{1}{1-x^2}$; $\|x\|<1$
$\frac{d\cosh^{-1}x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $x>1$	$\frac{d\coth^{-1}x}{dx}=\frac{1}{1-x^2}$; $\|x\|>1$

在单调性区间 $0\leqslant y<+\infty$ 上函数 $y=\cosh^{-1}x$ 是 $x=\cosh y$ 的反函数；因此 $\frac{d\cosh^{-1}x}{dx}=1\bigg/\frac{d\cosh x}{dy}=1/\sinh y=1/\sqrt{x^2-1}$。这函数在定义域 $x\geqslant 1$ 内除 $x=1$ 外对所有的 x 可微。在单调性区间 $-\infty<y\leqslant 0$ 上，$x=\cosh y$ 有反函数 $y=-\cosh^{-1}y$，因而它的导数是 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-\sqrt{x^2-1}}$。

积分关于上限的导数 在积分 $\int_a^x f(\xi)d\xi$ 中数 a 固定而上限 x 是变量；因此积分是其上限的函数 $\Phi(x)$。积分关于这个变上限的导数等于被积函数在此上限的函数值 $f(x)$（见 II. 第 7 章）。

6.3 多元函数的导数

函数的偏导数

在函数 $z=f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 中，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示彼此独立的变量；例如，在 $z=f(x, y)$ 中，变量 $x_1=x$ 与 $x_2=y$，而在 $z=f(u, v, w)$ 中，$x_1=u$, $x_2=v$, $x_3=w$。如果除一个譬如说 x_i 以外，把所有变量都作为常数，$x_{1,0}$, $x_{2,0}$, $\cdots x_{i-1,0}$, $x_{i+1,0}$, $\cdots$, $x_{n,0}$，那末该函数就变成一元函数。如

果这个函数可微，那末可以构成偏导数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_{1,0},\cdots,x_i,\cdots,x_{n,0})=f_{x_i};$$

字母 ∂ 标记偏导数(读成：偏 ∂f 比 ∂x_i)。例如，对于 $z=f(x,y)$，只要下面的两个极限存在，就有

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y_0)-f(x,y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y+\Delta y)-f(x_0,y)}{\Delta y}。$$

一元函数的微分法则关于单个不固定的变量 x_i 也成立。

【例 1】 $z=f(x,y)=x^3+7x^2y+3xy^5-5y^6$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)=3x^2+14xy+3y^5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)=7x^2+15xy^4-30y^5。$$

【例 2】 $z=f(x,y)=\arctan(x/y)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_x=\frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z_y=\frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot(-xy^{-2})=-\frac{x}{x^2+y^2}。$$

【例 3】 $w=f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

$$\frac{\partial w}{\partial x}=w_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=w_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=w_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

两元函数偏导数的几何意义　一般地说，两元函数 $z=f(x,y)$ 可表示为空间的一张曲面。$y=y_0=$常数这个假定，选出这张曲面上同时落在平行于 x, z 平面的 $y=y_0$ 平面上的点，它们构成一条平面曲线，而 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y_0)$ 是这条曲线在点 (x,y_0) 切线 t_1 的斜率：$z_x=\tan\varphi_{x,y_0}$。角 φ_{x,y_0} 描述 t_1 对 $+x$ 轴的倾斜(见图 6.3-1)。同理，$z_y=\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y)=\tan\varphi_{x_0,y}$ 是曲面 $z=f(x,y)$ 由平行于 y, z 平面的 $x=x_0$ 平面截出的这条曲线的切线 t_2 对

$+y$轴的斜率。在这个曲面的每一点 P 定义有 z_x 确定的切线 t_1，与 z_y 确定的切线 t_2。在某些通常满足假定条件下，这两条切线张成曲面在点 P 的切平面。

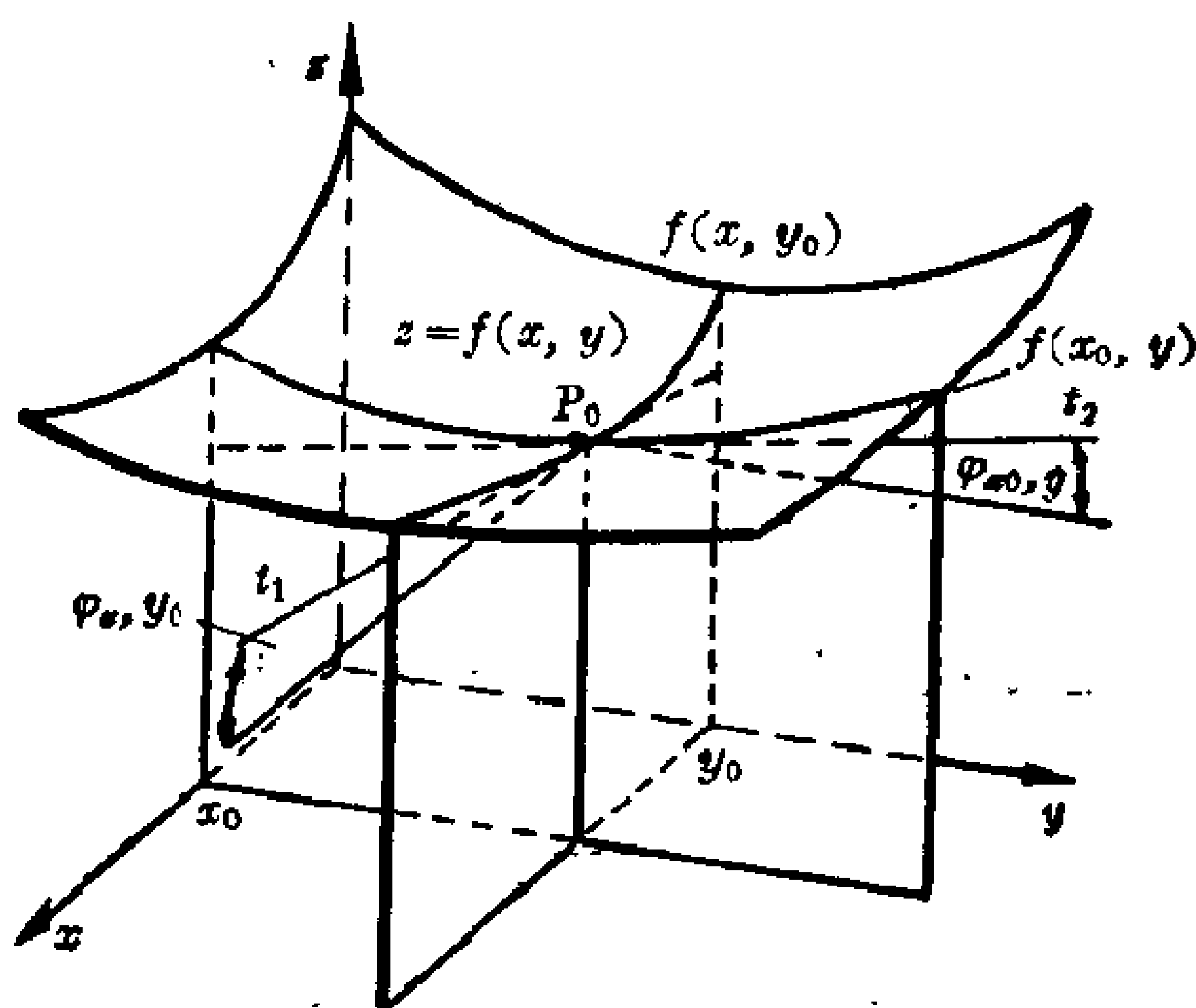


图 6.3-1 两元函数偏导数的几何意义

高阶偏导数 每个偏导数仍是一个同样变量的函数，而如果相应差商的极限存在，它自身又可有偏导数。这些就称做**高阶偏导数**，例如，二阶、三阶、…、n 阶偏导数。关于不同变量的偏导数称做**混合导数**。例如，由 $z=f(x, y)$，通过微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y$，得到四个二阶导数：

$$f_{xx}=\frac{\partial f_x}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad f_{xy}=\frac{\partial f_x}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

$$f_{yx}=\frac{\partial f_y}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\quad 与 \quad f_{yy}=\frac{\partial f_y}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}。$$

根据它们的构成方式，函数 f_{xy} 与 f_{yx} 彼此不同。不过欧拉早已知道它们相等的条件；施瓦茨(Hermann Amandus Schwarz, 1843～1921 年)证明了后来以他命名的这个定理。

施瓦茨定理 如果函数 $f(x, y)$ 的二阶混合偏导数 f_{xy} 与 f_{yx} 在定义域 D 中是 x 与 y 的连续函数，那末它们在这个定义域内部彼此相等。

$$\boxed{f_{xy}=f_{yx}}$$

函数 $u=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的**连续性**意味着相应于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得满足 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta^2$ 的所有数对 (x, y) 有 $|f(x, y)-f(x_0, y_0)|\leqslant\varepsilon$。几何上这点意味着如果自变量 (x, y) 取在以 (x_0, y_0) 为中心的充分小圆内，那末函数 $f(x, y)$ 的值就能与 $f(x_0, y_0)$ 相差任意的一个小量。如果 $f(x, y)$ 在定义域 D 的每一点连续，那末该**函数在 D 内连续**。施瓦茨定理对于高阶偏导数同样成立并且对于多于两个变量的函数也成立；例如，对于 $z=f(x, y)$，$f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$ 与 $f_{xyy}=f_{yxy}=f_{yyx}$。

【例 1】 $z=f(x, y)=x^3+7x^2y+3xy^5-5y^6$,

$f_x=3x^2+14xy+3y^5$; $f_y=7x^2+15xy^4-30y^5$;

$f_{xx}=6x+14y$; $f_{xy}=14x+15y^4=f_{yx}$;

$f_{yy}=60xy^3-150y^4$; $f_{xxx}=6$;

$f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}=14$; $f_{xyy}=f_{yxy}=f_{yyx}=60y^3$;

$f_{yyy}=180xy^2-600y^3$。

【例 2】 $z=f(x, y)=\arctan x/y$; $f_x=\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

$f_y=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $f_{xx}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$f_{xy}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=f_{yx}$; $f_{yy}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$。

全微分

一阶全微分 如果 $z=f(x, y)$是两个变量 x 与 y 的函数，并且如果它的一阶偏导数 f_x 与 f_y 存在，那末它们是差商 $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ 与 $\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ 的极限。于是，象在一元函数 $f(x)$的全微分情况那样，$\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\varphi_1(\Delta x)$ 与 $\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}+\varphi_2(\Delta y)$，其中 $\varphi_1(\Delta x)$ 与 $\varphi_2(\Delta y)$ 记为相应的差商与偏导数之差。如果用同样的方式从这些等式解出函数 $z=f(x, y)$的增量，那末得到等式 $\Delta_x z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\varphi_1(\Delta x)\cdot\Delta x$ 与 $\Delta_y z=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y+\varphi_2(\Delta y)\cdot\Delta y$。在这些表达式中 $\varphi_1(\Delta x)\cdot\Delta x$ 与 $\varphi_2(\Delta y)\cdot\Delta y$ 项是比偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}dx$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ “高阶”的小量。因而如果 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 连续且略去高阶小的项，则由函数 $z=f(x,y)$ 的全增量 Δz 得到一阶全微分 dz。

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)+f(x, y+\Delta y)-f(x, y),$$

$$\begin{aligned}\Delta z&=\left[\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\right]\Delta x\\&\quad+\left[\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}\right]\Delta y\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\varphi_1(\Delta x)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\varphi_2(\Delta y)\cdot\Delta y,\end{aligned}$$

从而
$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy。$$

一阶全微分	$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2$

选取的 Δx 与 Δy 值越大，全微分 dz 与全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$之间的差就越大。对于函数 $z=x^2-y^2$ 有 $dz=2(x\,dx-y\,dy)$。表格显示，在点 $x=2,\ y=1$ 的邻域内 Δx 和 Δy 取两对值 2，1以及 0.2，0.1 时的差 $\Delta z-dz$。

x	2	2	y	1	1	$(\Delta z-dz)/\Delta z$	33%	5%
$dx,\ \Delta x$	2	0.2	$dy,\ \Delta y$	1	0.1	$\Delta z-dz$	3	0.03
xdx →	4	0.4	ydy →	1	0.1	→ dz	6	0.60
$x+\Delta x$	4	2.2	$y+\Delta y$	2	1.1	Δz	9	0.63
x^2 →	4	4	y^2 →	1	1	→ $f(x,\ y)$	3	3
$(x+\Delta x)^2$ —	16	4.84	— $(y+\Delta y)^2$	4	1.21	→ $f(x,\ y)+\Delta z$	12	3.63

两元函数微分的几何意义 偏微分 $d_x z$ 代表曲线 $z=f(x,\ y_0)$的切线在纵坐标上的增量，而偏微分 $d_y z$ 代表曲线 $z=f(x_0,\ y)$ 的切线在纵坐标上的增量。全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

是四个变量 $(x,\ y,\ dx,\ dy)$ 的函数，它在几何上代表了曲面 $z=f(x,\ y)$ 与切平面的接触点如果 x 增加 $\Delta x=h=dx$ 和 y 增加 $\Delta y=k=dy$ 而在纵坐标上造成的增量(见图 6.3-2)。

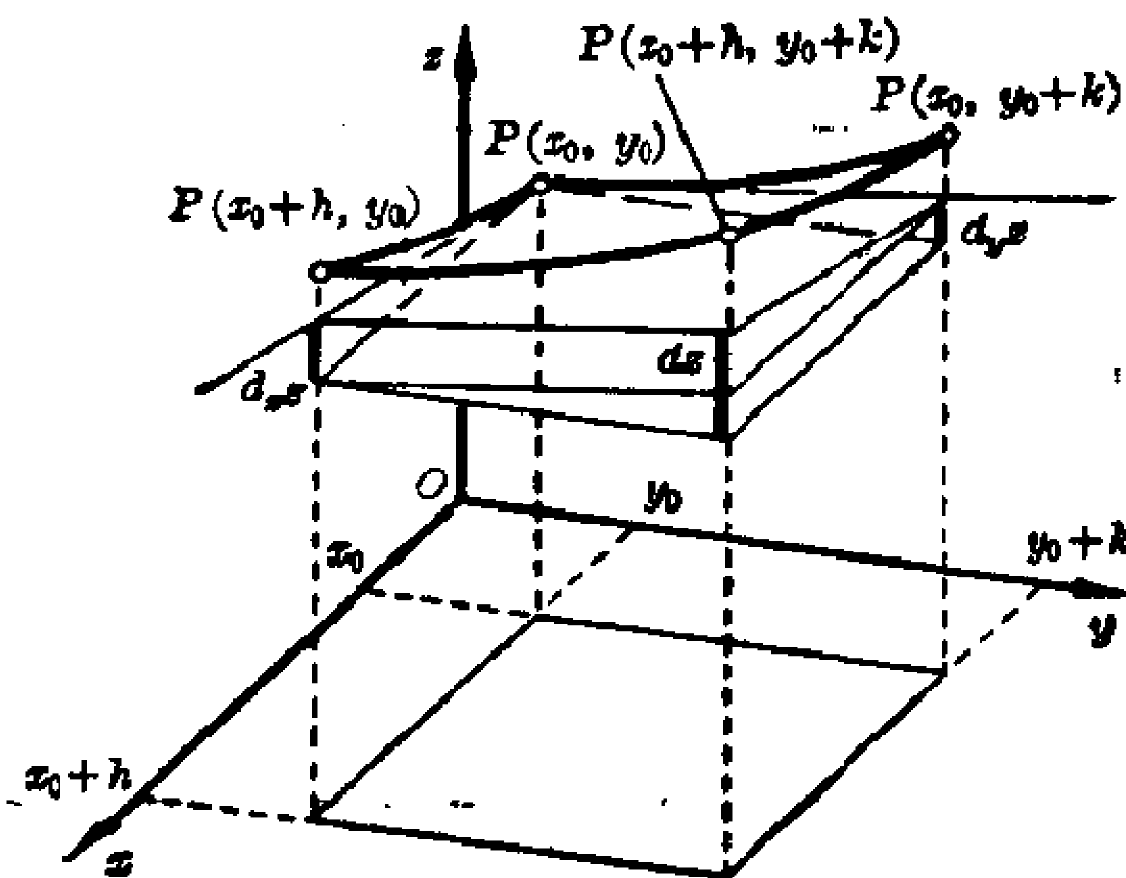


图 6.3-2 两元函数全微分的几何意义

【例】 对于函数 $z=f(x,\ y)=x^3+7x^2y+3xy^5-5y^6$，$z_x=3x^2+14xy+3y^5$ 与 $z_y=7x^2+15xy^4-30y^5$。其全微分

$$dz=(3x^2+14xy+3y^5)dx+(7x^2+15xy^4-30y^5)dy。$$

如果
$$z=f(x,\ y)\equiv 0,$$

那末这函数可看作一元隐函数。因为 $dz=0$，所以一元隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 为

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0,\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}。$$

高阶微分　如果函数的偏导数自身连续且可微，那末又可构成全微分的全微分 d^2z。它称作二阶全微分。在微分时，任意选定的有限量 dx, dy 作为常量处理。得到

$$d^2z=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2。$$

因为根据施瓦茨定理 $z_{xy}=z_{yx}$，所以微分取这样一种形式，其中 dx 与 dy 的乘积和系数由二项定理形式地给出。

二阶全微分	$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2$

例如对于二阶全微分，得到 $d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)}z$。括弧内的表达式在算子的意义下乘以 z。可以证明，高阶全微分，例如 n 阶的全微分，由这个形式关系给定。

n 阶全微分	$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)}z$
三阶全微分	$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$

【例】　函数 $z=f(x,y)=x^3+7x^2y+3xy^5-5y^6$ 有偏导数 $z_x=3x^2+14xy+3y^5$; $z_y=7x^2+15xy^4-30y^5$; $z_{xx}=6x+14y$; $z_{xy}=14x+15y^4$; $z_{yy}=60xy^3-150y^4$。因而它的二阶全微分是

$$d^2z=(6x+14y)dx^2+2(14x+15y^4)dxdy+(60xy^3-150y^4)dy^2。$$

多元方程的解　方程 $3x-4y+5=0$ 可以看作隐函数的方程，容易得到它的显式 $y=3x/4+5/4$。一般地说，要求从给定方程 $F(x,y)=0$ 中

找出一元函数 $y=y(x)$，使它恒满足 $F[x, y(x)]=0$。这种解可能借助于初等函数表达，也可能要应用极限过程诸如无穷级数。例如，$x^2+y^2+1=0$ 不可能有解。还可能在满足 $F(x_0, y_0)=0$ 的不同点 (x_0, y_0) 邻域内存在不同的 y 解。例如，方程 $F(x, y)=5x^2+y^2-9=0$ 在点(1, 2)的邻域内有解 $y=\sqrt{9-5x^2}$，在点(0, −3)的邻域内解为 $y=-\sqrt{9-5x^2}$。

方程 $F(x, y)=0$ 在满足 $F(x_0, y_0)=0$ 的点 (x_0, y_0) 的邻域 $U(x_0, y_0)$ 内唯一地确定连续函数 $y=y(x)$ 具有两点性质：$y_0=y(x_0)$，且对于所有的 $x\in U$ 有 $F[x, y(x)]=0$。为此要求满足下述条件：1．函数 $F(x, y)$ 在 $U(x_0, y_0)$ 内连续；2．偏导数 F_x 与 F_y 存在且连续；3．$F_y(x_0, y_0)\neq 0$。于是函数 $y=y(x)$ 也可微且 $y'=y'(x)=-F_x/F_y$。如果给定函数 $F(x, y)$ 具有直到 k 阶的连续偏导数，那末 $y=y(x)$ 也 k 次连续可微。

这些结果立刻可推广到两个以上变量的函数。如果 $F(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 在满足 $F(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_k^0)=0$ 的 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_k^0)$ 的邻域内连续且有连续偏导数 F_{x_i}，又对于某个固定的 j 有 $F_{x_j}(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_k^0)\neq 0$，那末在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_k^0)$ 的邻域内存在连续函数 $x_j=f(x_1, \cdots, x_{j-1}, f, x_{j+1}, \cdots, x_k)$，使得 $x_j^0=f(x_1^0, \cdots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \cdots, x_k^0)$ 以及 $F(x_1, \cdots, x_{j-1}, f, x_{j+1}, \cdots, x_k)=0$。

【例1】 方程 $F(x, y)=e^y-e^{-y}-2x=0$ 在(0, 0)的邻域内可解出 y，因为 $F(x, y)$ 是连续函数，具有连续导数 $F_x=-2$，$F_y=e^y+e^{-y}$ 且 $F(0, 0)=0$，$F_y(0, 0)=2\neq 0$。这个解是

$$y=\ln(x+x^2+1)=\sinh^{-1}x。$$

【例2】 对于笛卡尔叶形线方程 $F(x, y)=x^3+y^3-3axy=0$ 在(0, 0)的邻域内不能解出 y，因为 $F_y=3y^2-3ax$，从而 $F_y(0, 0)=0$。从函数图形就能直观地推测到这个结论(见图6.5-6)。

下面的定理给出 m 个方程 $F_i(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m)=0$，$i=1, 2, \cdots, m$ 的系统在点 $(x_1^0, \cdots, x_n^0; y_1^0, \cdots, y_m^0)$ 的邻域内能解出 m 个函数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的条件。

如果函数 $F_i(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m)$ 对 $i=1, 2, \cdots, m$ 在点 $(x_1^0, \cdots, x_n^0; y_1^0, \cdots, y_m^0)$ 的邻域 U 内连续且在该点有连续偏导数 $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}$，$\dfrac{\partial F_i}{\partial y_k}$，又如果在点 $(x_1^0, \cdots, x_n^0; y_1^0, \cdots, y_m^0)$ 由偏导数 $\dfrac{\partial F_i}{\partial y}$ 构成的函数行列式

$\mathrm{Det}\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_k}(x_1^0, \cdots, x_n^0; y_1^0, \cdots, y_m^0)\right]$不为零，那末在$U$唯一地存在$m$个可微函数$y_i=y_i(x_1, \cdots, x_n)$的系统具有性质$y_i^0=y_i(x_1^0, \cdots, x_n^0)$以及$F_i[x_1, \cdots, x_n; y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m(x_1, \cdots, x_n)]=0$。

函数行列式或称雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}。$$

【例 1】 这里给出的三个方程的系统代表一个点的笛卡尔坐标(x, y, z)与它的极坐标之间的联系。

$$x=r\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$y=r\sin\varphi\sin\vartheta$$
$$z=r\cos\vartheta$$

雅可比行列式为

$$D=\begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ r\cos\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}=r^2\sin\vartheta,$$

从而对于所有不在z轴上的点$D\neq 0$。对于这些点，方程组可解出r, ϑ, φ:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}; \quad \varphi=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\vartheta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

【例 2】 例1的推广。如果对于$k=1, 2, \cdots, n$，函数$y_k=f_k(x_1, \cdots, x_n)$及其一阶偏导数在点$(x_1^0, \cdots, x_n^0)$的邻域内连续，而且雅可比行列式

$$\mathrm{Det}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1^0, \cdots, x_n^0)\right]\neq 0,$$

那末存在连续函数$x_k=x_k(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，对于$k=1, 2, \cdots, n$有

$$x_k(y_1^0, \cdots, y_n^0)=x_k^0$$

以及 $f_k[x_1(y_1, \cdots, y_n), x_2(y_1, \cdots, y_n), \cdots, x_n(y_1, \cdots, y_n)]=y_k$。于是，在上述条件下，方程系统(直观地讲)有"逆系统"。

6.4 函数的极值

一元函数的极值

由函数 $y=f(x)=1/6(x^3-3x^2-9x+17)$ 的图形 (见图 6.4-1) 认识到在 $-\infty$ 到 -1 的范围内，纵坐标值随着横坐标的增加而增加。另一方面，由 $x=-1$ 到 $x=+3$ 纵坐标逐渐减少，而对于 $x>3$ 重又逐渐增加。在点 $x_{max}=-1$ 的一个适当选定的邻域内，对于所有不同于 x_{max} 的横坐标值 x，函数值 $f(x)$ 小于 $f(x_{max})$。于是称这个函数在点 x_{max} 有一个*局部极大值*。在点 $x_{min}=+3$ 称这个函数有一个*局部极小值*，因为在这点的一个适当选定的邻域内，对于所有不同于 x_{min} 的值 x，函数值 $f(x)$ 大于 $f(x_{min})$。极大值与极小值，都称做*局部极值*(或简称*极值*)；所谓局部，因为还有这样一些地方，那里函数取大于 $f(-1)=+11/3$ 的值和小于 $f(+3)=-5/3$ 的值。不过在闭区间 $-2\leqslant x\leqslant 4$ 上，它们是*绝对极值*或称*总体极值*。

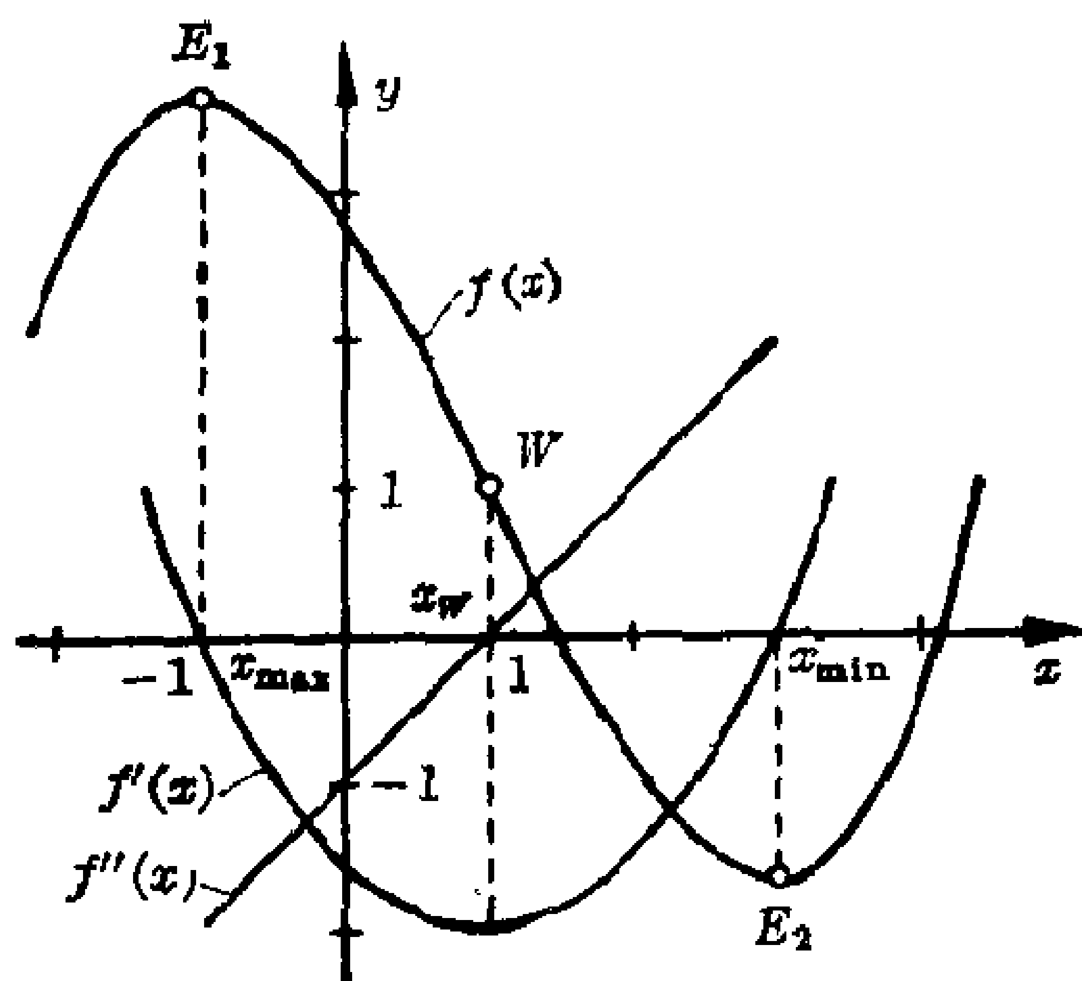


图 6.4-1 函数$y=f(x)=(1/6)(x^3-3x^2-9x+17)$图形的极值点与拐点

局部极大值 $f(x_{max})>f(x)$ 对于 $x\neq x_{max}$ 局部极小值 $f(x_{min})<f(x)$ 对于 $x\neq x_{min}$	在一个充分小的邻域内

根据*韦尔斯特拉斯定理*，闭区间上的连续函数在该区间上取到它的上确界与下确界。不过这些绝对极值可能出现在区间的边界点上，例如上面讨论的函数在区间 $-5\leqslant x\leqslant 10$ 上就是这种情况。

局部极值的条件 当可微函数 $f(x)$ 的自变量 x 通过局部极值点 x_m 时，它的导数 $f'(x)$ 符号发生变化。如果 $x_m=x_{max}$ 是一个局部极大值的位置，那末当 $x<x_{max}$ 时 $f'(x)>0$，因为对于这些自变量，函数 $f(x)$ 是递增的；而当 $x_{max}<x$ 时 $f'(x)<0$，因为 $f(x)$ 是递减的。如果导数连续，那

末必定成立 $f'(x_{max})=0$。同理，对于一个局部极小值的位置 x_{min} 而言，当 $x<x_{min}$ 时 $f'(x)<0$ 而当 $x_{min}<x$ 时 $f'(x)>0$，从而对于连续的导函数有 $f'(x_{min})=0$。

由此得出局部极值的**必要条件**是导数 $f'(x)$ 为零。上面为保证存在局部极大值或局部极小值而讨论的一阶导数 $f'(x)$ 的符号改变，在分析上表达为 $f''(x_{max})<0$ 或 $f''(x_{min})>0$。于是，存在极值的**充分条件**为

$$f'(x_{max})=0$$

并且 $f''(x_{max})<0$ 或 $f'(x_{min})=0$ 并且 $f''(x_{min})>0$。在 $f''(x_m)=0$ 的情况下，可以考虑函数 $f(x)$ 的高阶导数。

$f'(x_0)=0$ 并且 $f''(x_0)<0 \rightarrow x_0$ 是一个局部极大值
$f'(x_0)=0$ 并且 $f''(x_0)>0 \rightarrow x_0$ 是一个局部极小值

在二阶及高阶导数的零点上的极值。如果 $f'''(x)$ 是 $x=x_m$ 的第一个不为零的导数，那末由上面讨论可得若 $f'''(x_m)>0$，则函数 $f'(x)$ 在此点有极小值，若 $f'''(x_m)<0$，则有极大值。在这两种情况下，因为 $f'(x_m)=0$，所以 $f'(x)$ 的曲线在点 $x=x_m$ 与 x 轴相切。对于函数 $f(x)$ 的图形，这意味着在 x 递增的意义下当自变量 x 通过点 x_m 时，如果 $f'''(x_m)>0$，那末切线的斜率 $\tan\varphi$ 从正值减少到 $x=x_m$ 处的 $\varphi=0$，然后重新增加；而如果 $f'''(x_m)<0$，那末 $\tan\varphi$ 从负值增加到 $x=x_m$ 处的 $\varphi=0$，然后又减少（见图 6.4-2）。这种点称做**水平拐点**。

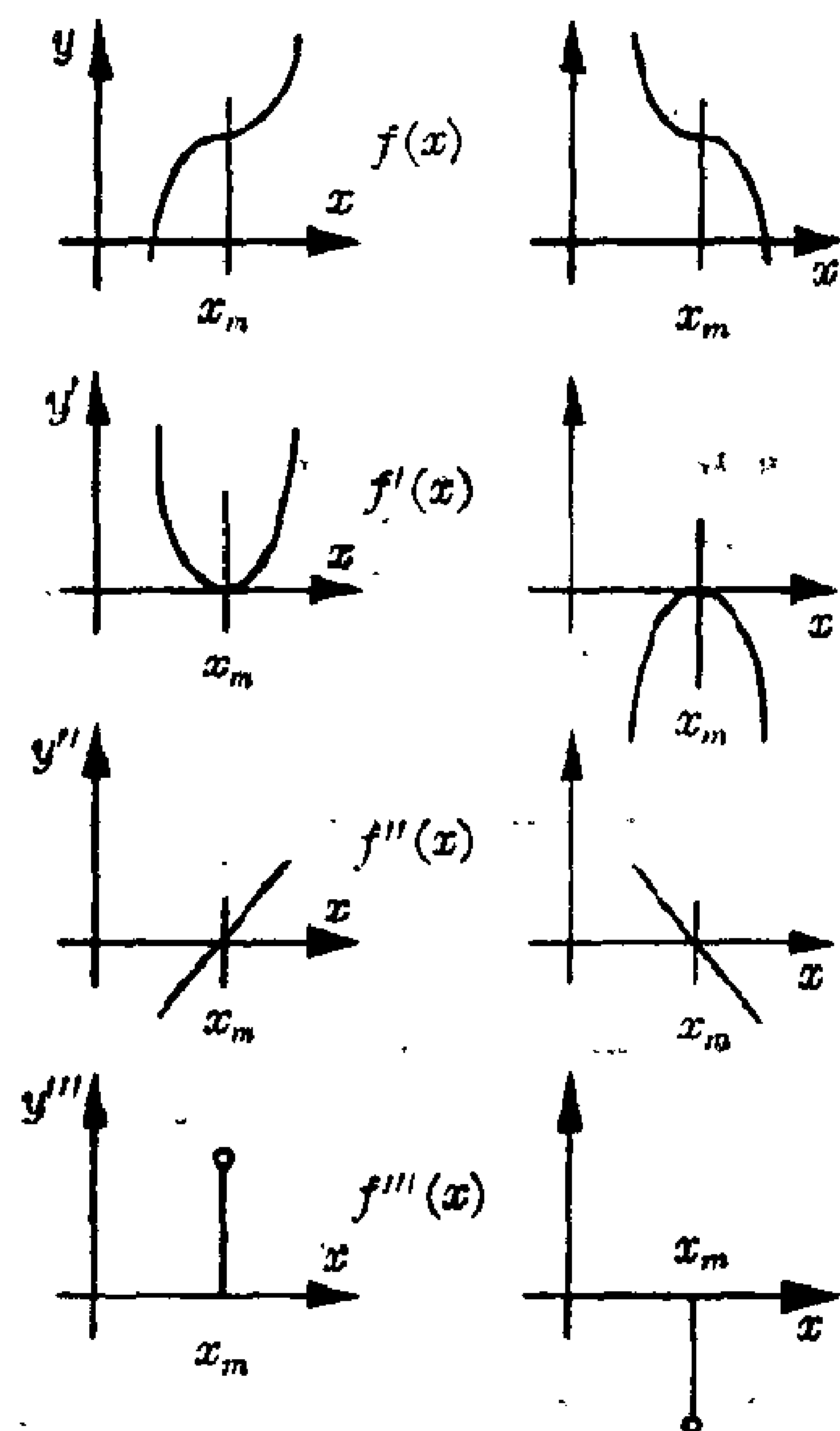


图 6.4-2　$f'(x)=0$；$f''(x)=0$；$f'''(x)\neq0$ 的图形表示

在点 ξ 至少 n 次可微（$n\geqslant2$）的函数 $f(x)$，如果 n 是偶数并且

$$f'(\xi)=f''(\xi)=\cdots=f^{(n-1)}(\xi)=0,$$

而 $f^{(n)}(\xi)\neq0$，那末函数在这一点有局部极值；若 $f^{(n)}(\xi)<0$，则出现局部极大值，而若 $f^{(n)}(\xi)>0$，则出现局部极小值。

如果利用泰勒(Taylor)定理将$f(x)$于点ξ展开，那末因为

$$f'(\xi)=f''(\xi)=\cdots=f^{(n-2)}(\xi)=0,$$

所以$f(x)-f(\xi)=(h^{n-1}/(n-1)!)\cdot f^{(n-1)}(\xi+\vartheta h)$，其中$0<\vartheta<1$。

因为$f^{(n)}(x)$是$f^{(n-1)}(x)$的导数，对于$f^{(n)}(\xi)<0$而言，$f^{(n-1)}(x)$经过值$f^{(n-1)}(\xi)$单调减少而当$f^{(n)}(\xi)>0$时它单调增加。另一方面，h的符号在ξ的左边总是负的，在右边总是正的；因为$n-1$是奇数，所以h^{n-1}具有与h同样的符号。因而，如下表所示，当$f^{(n)}(\xi)<0$时，余项即差值$f(x)-f(\xi)$在点$x=\xi$的两边都是负的，使$f(\xi)>f(x)$，从而函数有**局部极大值**，若$f^{(n)}(\xi)>0$则在ξ的两边$f(\xi)<f(x)$，因而函数有**局部极小值**。

		$x<\xi$	ξ	$\xi<x$
	h^{n-1}	$-$	0	$+$
$f^{(n)}(\xi)<0$	$f^{(n-1)}(x)$	$+$	0	$-$
$f^{(n)}(\xi)>0$	$f^{(n-1)}(x)$	$-$	0	$+$

拐点 函数$y=(1/6)(x^3-3x^2-9x+17)$的曲线在点$(-3,-5/3)$的切线(见图6.4-1)有斜率$f'(-3)=+6$。在极大值$(-1,+11/3)$斜率减少到值$f'(-1)=0$，经过这一点斜率继续减少直到点$x_w=+1$，其值为$f'(1)=-2$。从此斜率单调地增加。函数$f'(x)$在点$x_w=1$有局部极小值。在区间$-\infty<x\leqslant+1$上，在x值递增的意义下切线方向按**右旋**，即以数学上的负向移动成为下一个切线方向。在区间$+1\leqslant x<+\infty$上相应为**左旋**，即数学上的正向。**在拐点**旋转指向从右旋变为左旋。

如果设想一辆车子沿着曲线行驶，那末在到拐点之前马路位于切线的右边，但过了拐点以后马路就位于切线的左边。在拐点之前曲线的**曲率**与在拐点之后的曲率符号相反。如果通过彼此充分接近的三点作一圆弧来替代曲线的这一部分，那末在拐点之前这个**曲率圆**的中心位于曲线的右边而在拐点之后就位于它的左边。于是在拐点的切线或**拐切线**将曲线分成两部分，它们的曲率指向相反。

根据这些考虑得出：函数有拐点的地方它的一阶导数取极值。如果还有$f'(x_w)=0$，那末拐切线是水平的；称此为**水平拐点**(见图6.4-3)。

> 如果 $f''(x_w)=0$ 并且 $f'''(x_w)\neq 0$，那末 x_w 是一个拐点。
> 拐切线方程：$(y-y_w)=f'(x_w)(x-x_w)$。

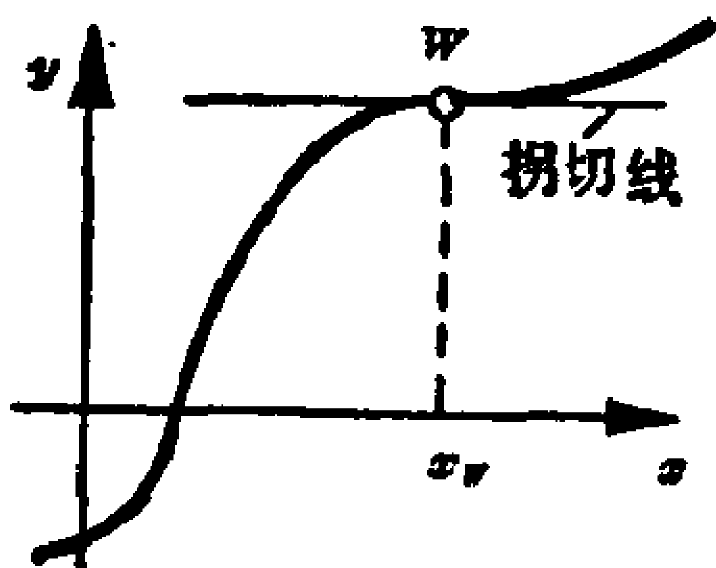


图 6.4-3　具有水平拐点的函数图形

将一阶导数 $f'(x)$ 看作一个函数 $\varphi(x)$，可以应用极值准则。因而在点 x_w 上 $f'(x)$ 为局部极大值或极小值的充分条件是 $\varphi'(x_w)=f''(x_w)=0$ 与 $\varphi''(x_w)=f'''(x_w)<0$ 或 $f'''(x_w)>0$。如果 $f'''(x_w)=0$，那末上面最后一个定理成立，因为 $f(x)$ 的奇数阶导数就是 $\varphi(x)$ 的偶数阶导数。

函数 $y=f(x)$ 在 $f''(\xi)=0$ 的点 ξ 有一个拐点，如果第一个不为零的导数 $f^{(n)}(\xi)$ $(n>2)$ 是奇数阶导数。

【例1】　函数 $y=f(x)=0.1(x^4-2x^3-12x^2+8x+20)$ 有导数

$$y'=0.1(4x^3-6x^2-24x+8),\quad y''=1.2x^2-1.2x-2.4$$

与 $y'''=2.4x-1.2$。由 $y''=0$，即 $x^2-x-2=0$ 得到

$$x_1=-1 \text{ 与 } x_2=+2。$$

因为

$$f'''(x_1)=-3.6\neq 0$$

与

$$f'''(x_2)=+3.6\neq 0,$$

所以

$$x_1=-1 \text{ 与 } x_2=+2$$

是拐点的横坐标（见图 6.4-4）。相应的纵坐标是 $f(x_1)=+0.3$ 与 $f(x_2)=-1.2$。

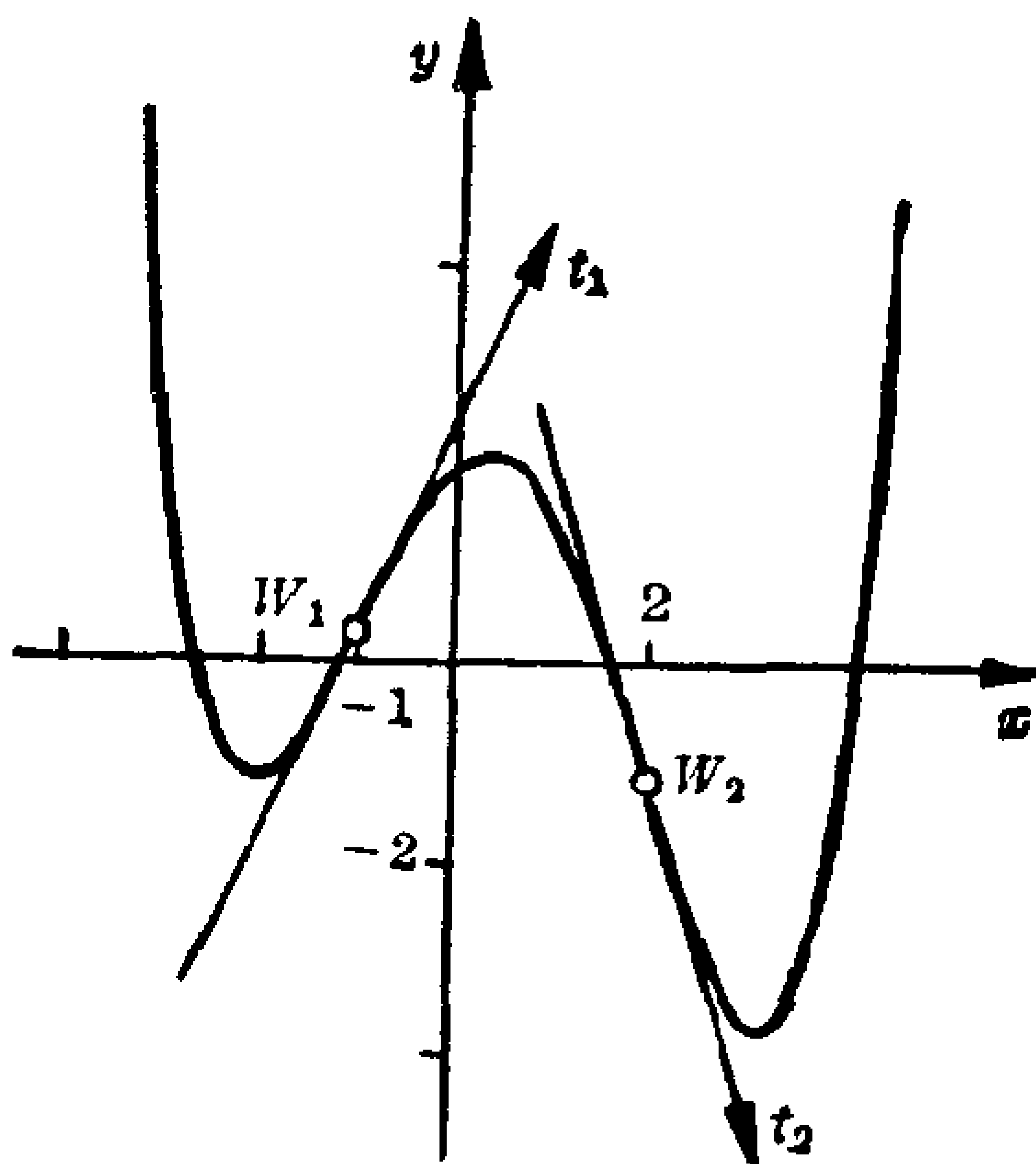


图 6.4-4　函数 $f(x)=(x^4-2x^3-12x^2+8x+20)/10$ 图形的拐点 W_1, W_2 与拐切线 t_1, t_2

在拐点 $W_1(-1,\ +0.3)$ 与 $W_2(+2,\ -1.2)$ 上的拐切线 t_1 与 t_2 有斜率 $f'(x_1)=+2.2$ 与 $f'(x_2)=-3.2$，因此对于 t_1 有方程

$$(y-0.3)=2.2(x+1)\quad\text{或}\quad y=2.2x+2.5$$

以及对于 t_2 有 $(y+1.2)=-3.2(x-2)$ 或 $y=-3.2x+5.2$。

【例 2】 函数 $y=f(x)=(x^2-4)/x$ 没有拐点，因为 $f''(x)=0$ 是存在拐点的必要条件，但 $y''=-8/x^3$ 对于 x 的任何有限值不可能为零。

应用 如果成功地将变量 f 表达成为变量 x 的连续可微函数，那末就可以算出 x 的那一个值使变量 f 取到极值。由给定的条件可以确定这个值是局部极大值还是极小值。

然而，在应用中通常要求找到绝对极值。如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续且在开区间 $a<x<b$ 内可微，那末它的绝对极小(或极大)值或者是最小的局部极小值(最大的局部极大值)，或者是边界值 $f(a)$ 或 $f(b)$ 中的一个。

【例 1】 一块边长为 a 的正方形纸板，从它的角上剪掉四个正方形，再将所得的矩形折叠起来构成一个盒子(见图 6.4-5)。所去掉的四个相等正方形可将纸盒粘在一起。为使纸盒容积 V 达到尽可能地大，这些小正方形应当多大？

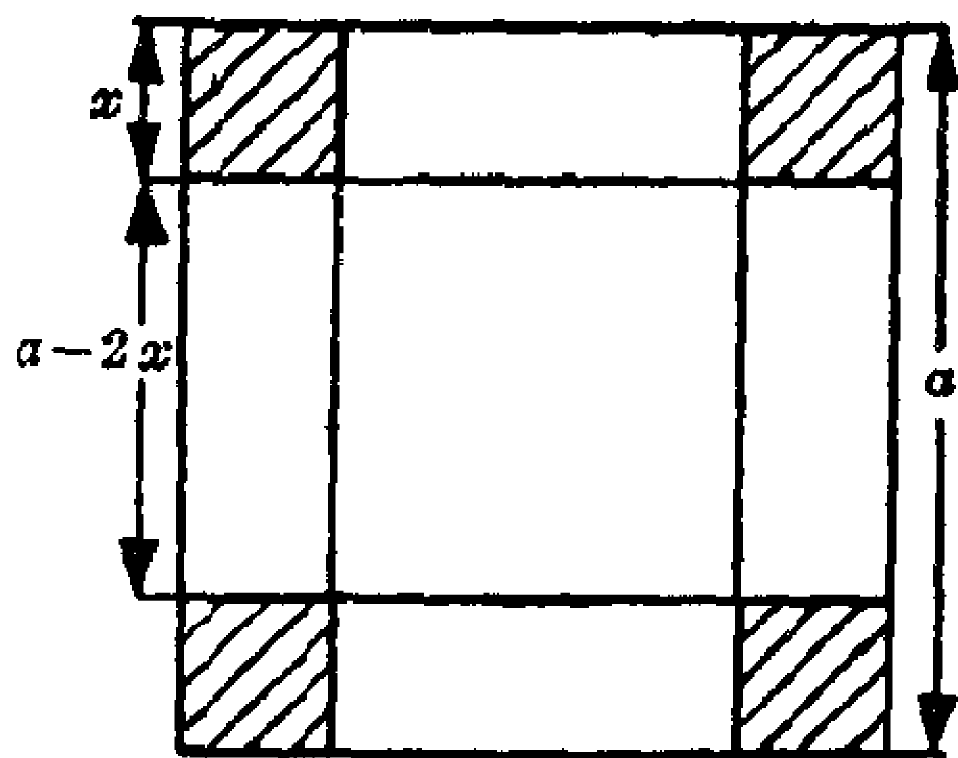


图 6.4-5 用正方形做成最大容积的盒子

根据公式，纸盒的容积 V 为

$$V=y=f(x)=x(a-2x)^2=4x^3-4ax^2+a^2x_{\circ}$$

这个函数仅当 $y'=12x^2-8ax+a^2=0$，即 $x^2-2ax/3+a^2/12=0$ 时才可能有极值；于是，$x_1=a/6$，因为对于 $x_2=a/2$ 来说，纸板将被剪光。由 $y''=24x-8a$ 得出 $f''(x_1)=-4a<0$，于是 $x_1=a/6$ 是局部极大值的横坐标值。这也是绝对极大值，所以应当剪去边长 a 的 $\frac{1}{6}$。

【例 2】 对于给定的容积 V，圆柱形罐头应当有怎样的尺寸才能使所需的薄铁皮尽可能少？——一个正圆柱是由它的底圆半径 r 与它的高 h 所确定的。应当将它的表面积 S 表示为一元函数。在 $S=2\pi r^2+2\pi rh$ 中第二个变量可利用已知的附加条件 $V=\pi r^2h$ 消去。由 $h=V/(\pi r^2)$ 得到

$$S=y=f(r)=2\pi r^2+2V\cdot(1/r),$$

$$y'=4\pi r-2V/r^2,\quad y''=4\pi+4V/r^3_{\circ}$$

只有当 $4\pi r_1=2V/r_1^2$ 或 $r_1=(V/2\pi)^{1/3}$ 时才可能出现局部极值。

因为 $f''(r_1)=12\pi>0$，所以表面积在点 r_1 有局部极小值；进而这是

绝对极小值。圆柱的高 h_1 为 $h_1=V/(\pi r_1^2)=2r_1$。

如果用一个给定值来代 V，譬如说 $V=50$ 立方英寸，那末得到 $r_1\approx 2''$ 以及 $h_1\approx 4''$。在具有相同容积的所有圆柱形罐头中，直径 $2r_1$ 等于其高 h_1 的罐头的表面积最小。

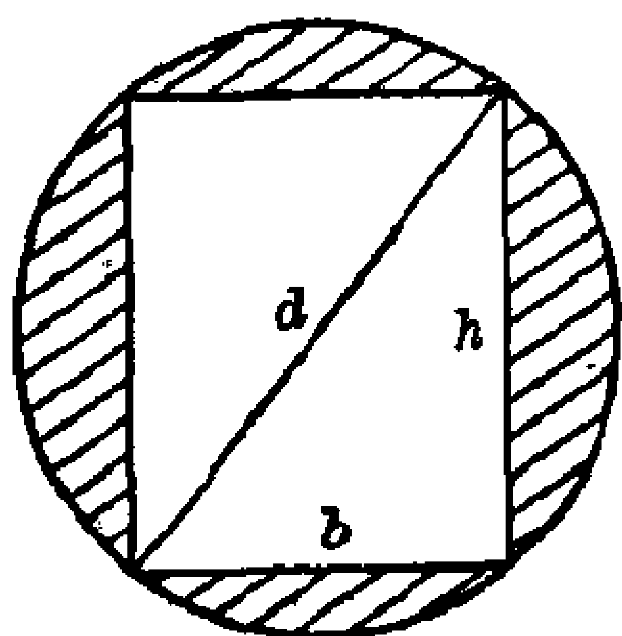


图 6.4-6　圆木锯成梁的横断面

【例 3】　将一根圆木锯成具有矩形横断面的梁，假定圆木的横断面为直径 d 的一个圆（见图 6.4-6）。如果梁的负载量 T 与宽度 b 及高 h 的平方成比例：$T=cbh^2$（c 是常数），则应当取怎样的尺寸能使 T 达到最大？ 根据毕达哥拉斯定理产生附加条件 $h^2=d^2-b^2$，因此得到 T 为一元函数 $T=f(b)=cd^2b-cb^3$。于是，

$$f'(b)=cd^2-3cb^2,\quad f''(b)=-6cb。$$

只有当 $f'(b_1)=0=cd^2-3cb_1^2$ 亦即 $b_1=(d/3)\sqrt{3}$ 时，才可能出现局部极值。因为 $f''(b_1)=-2cd\sqrt{3}<0$，这个极值是最大负载量。最后，由 $h^2=d^2-b^2$ 得 $h=(d/3)\sqrt{6}$。比率 $h/b=\sqrt{2}/1$ 与圆木的直径无关。

用 a 与 b 记矩形的边长，用 P 记它的周长而它的面积记为 A，那末下面的表证明两个定理的正确性：

在具有给定周长的所有矩形中，正方形有最大的面积。

在具有给定面积的所有矩形中，正方形有最小的周长。

已知	$P=2(a+b)$	$b=P/2-a$	$A=ab$	$b=A/a$
要求	$A=ab=f(a)$ $=Pa/2-a^2$		$P=2(a+b)=f(a)$ $=2(a+A/a)$	
一阶导数	$f'(a_1)=P/2-2a_1$ $=0$	$a=P/4$	$f'(a_1)=2-2A/a_1^2$ $=0$	$a_1=\sqrt{A}$
二阶导数	$f''(a_1)=-2<0$	最大值	$f'(a_1)=+4/\sqrt{A}$ >0	最小值
解	$b_1=P/4=a_1$	正方形	$b_1=\sqrt{A}=a_1$	正方形

【例 4】　半径为 R 的圆铁皮割去一个扇形，余下部分弯起来形成一个圆锥状漏斗（见图 6.4-7）。应当取多大的圆心角 ε 使漏斗有最大的容量？

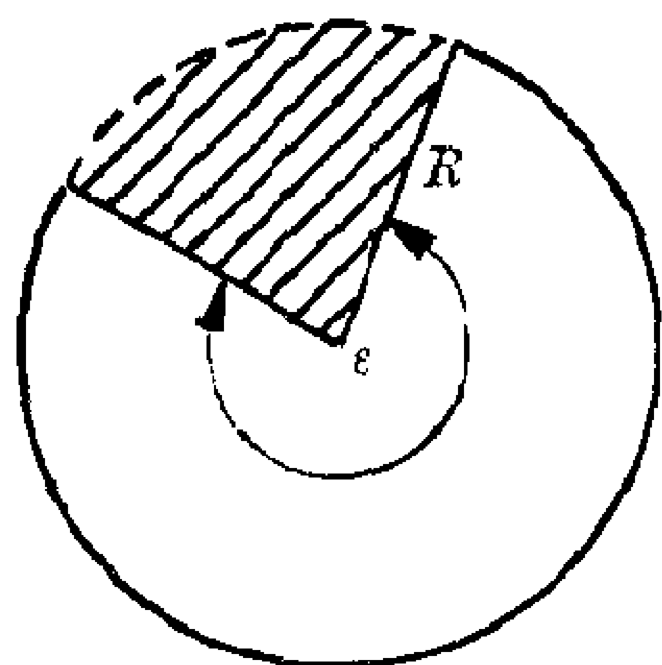
由锥体的容积公式 $V=(\pi/3)r^2h$ 以及附加条件 $r^2=R^2-h^2$，给出方程 $V=f(h)=(\pi/3)(R^2h-h^3)$。作为极值，

$$f'(h_1)=\pi(R^2-3h_1^2)/3=0; \qquad h_1=(R/3)\sqrt{3},$$

$$f''(h)=-2\pi h, \qquad f''(h_1)=-(2/3)\pi R\sqrt{3}<0。$$

于是 h_1 给出一个极大值，由附加条件得 $r_1=(R/3)\sqrt{6}$。在弯铁皮时长为 $b=\hat{\varepsilon}R$ 的圆弧变成底圆的圆周 $2\pi r$。由 $R\hat{\varepsilon}=2\pi r_1$ 得出

$$\hat{\varepsilon}=(2/3)\pi\sqrt{6} \quad 或 \quad \varepsilon\approx 294°。$$



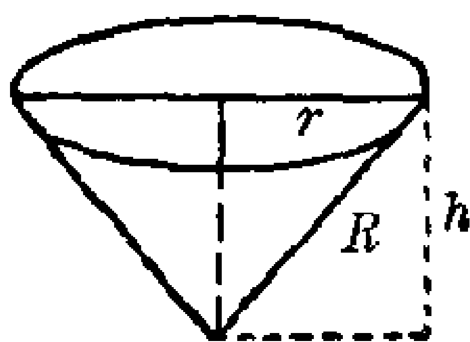


图 6.4-7 由扇形制成的漏斗

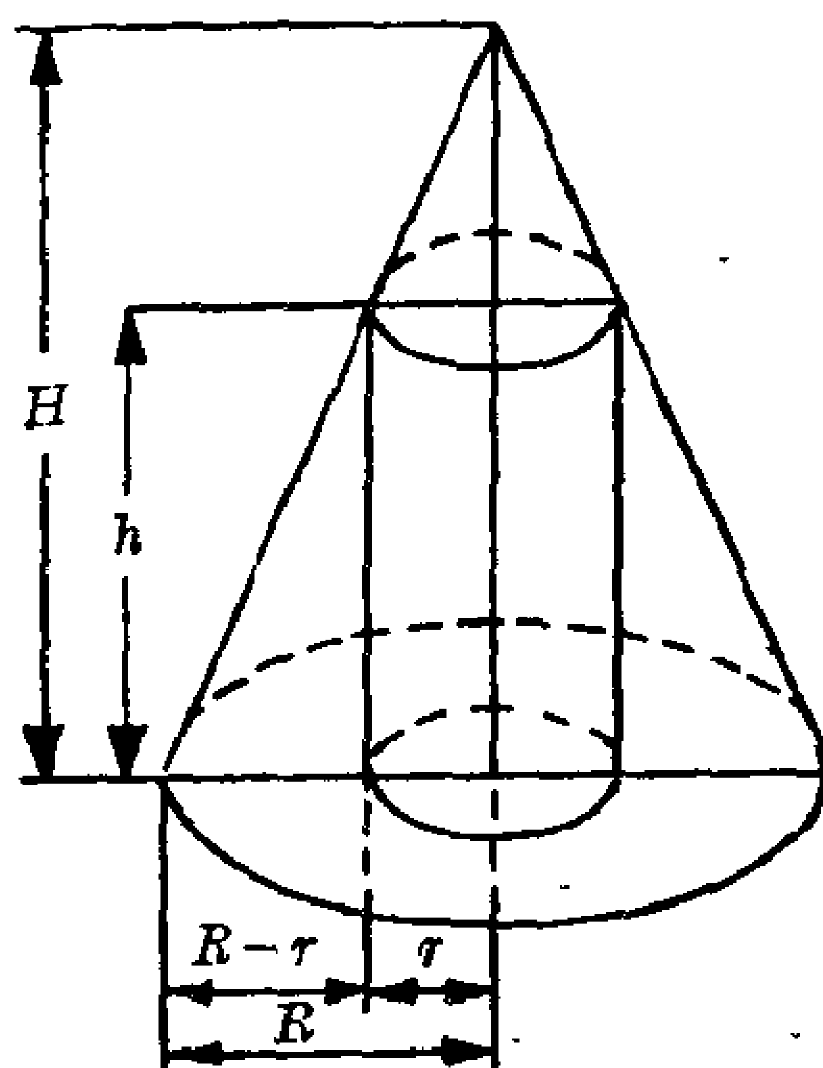


图 6.4-8 正圆锥的内接圆柱

【例 5】 在内接于半径为 R 高为 H 的正圆锥的所有圆柱中，求具有最大体积的圆柱(见图 6.4-8)。

圆柱的体积 V 为 $V=\pi r^2h$。在这种情况下附加条件从截距定理得出: $h/(R-r)=H/R$, $h=(H/R)(R-r)$。因此

$$V=f(r)=\pi(H/R)(Rr^2-r^3);\ f'(r_1)=\pi(H/R)(2Rr_1-3r_1^2)=0$$

给出 $r_1=2R/3$，因为解 $r_2=0$ 对应于体积 $V=0$。又因为

$$f''(r_1)=\pi(H/R)(2R-6r_1)=-2\pi H<0,$$

所以当 $r=r_1$ 时，体积为极大值。

下面的物理学问题导致**斯内尔(Snell)折射定律**。平面 E_1 是两种介质 MI 与 MII 的公共界面，在这两种介质中，物体或过程的传播速度是不同的，在 MI 中为 v_1 而在 MII 中为 v_2。在怎样的条件下，从 MI 中的点 A_1 运动到 MII 中的 A_2 所需的时间最少(见图 6.4-9)?

显然这个运动是在过 A_1 和 A_2 且垂直于 E_1 的平面 E_2 内进行。如果 L_1 和 L_2 分别是从 A_1 和 A_2 到两个平面 E_1 与 E_2 的交线的垂足，

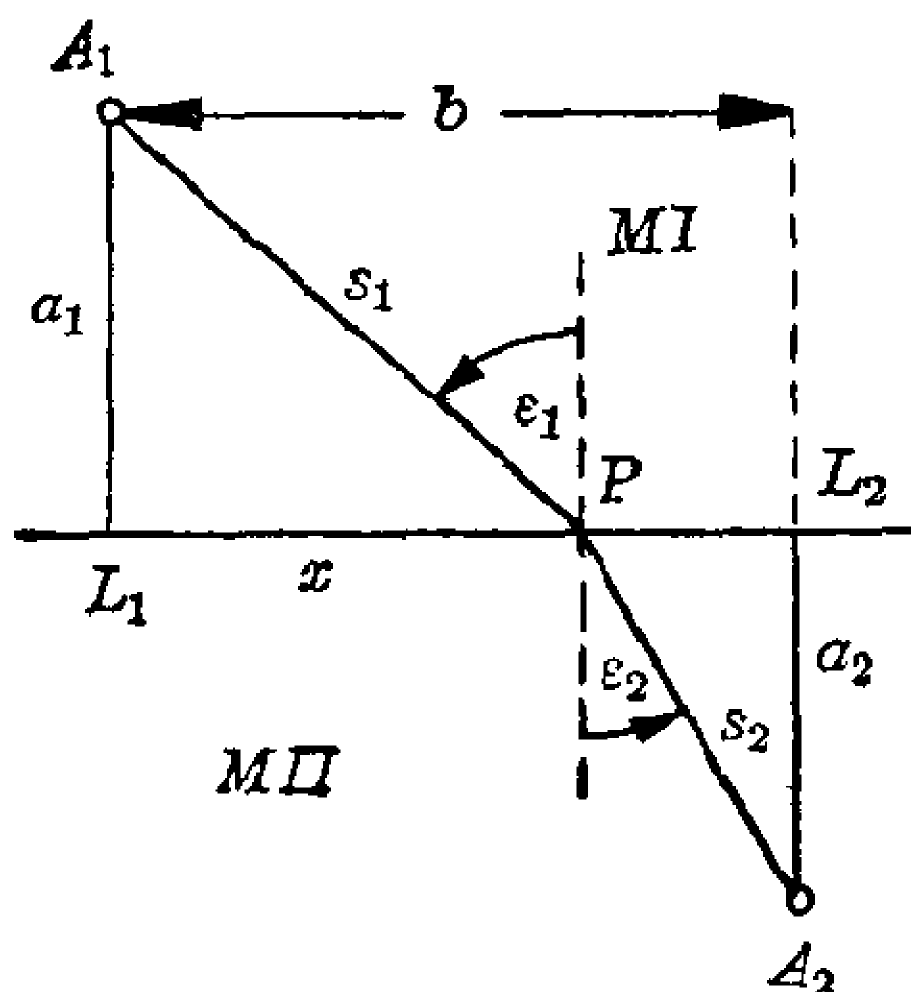


图 6.4-9　斯内尔折射定律

$$|A_1L_1|=a_1 \quad \text{和} \quad |A_2L_2|=a_2,$$

又如果 $|L_1L_2|=b$，那末点 A_1 与 A_2 的位置是固定的。如果运动的路径与边界线交于 P，其中 $|L_1P|=x$，那末从 A_1 到 P 的路径长度 s_1 为

$$s_1=\sqrt{a_1^2+x^2},$$

而

$$|PA_2|=s_2=\sqrt{a_2^2+(b-x)^2}。$$

运行整个路径 A_1PA_2 所需的时间 t 是个别时间 $t_1=s_1/v_1$ 与 $t_2=s_2/v_2$ 的和。这就给出函数 $t(x)$，进而得到极值条件：

$$t=t(x)=t_1+t_2=(1/v_1)\cdot\sqrt{a_1^2+x^2}+(1/v_2)\cdot\sqrt{a_2^2+(b-x)^2},$$

$$t'(x)=(1/v_1)\cdot x/\sqrt{a_1^2+x^2}-(1/v_2)(b-x)/\sqrt{a_2^2+(b-x)^2}$$

$$=0=x_1/(v_1s_1)-(b-x)/(v_2s_2)。$$

几何上这意味着 $\sin\varepsilon_1/\sin\varepsilon_2=v_1/v_2$，因为

$$x/s_1=\sin\varepsilon_1 \quad \text{和} \quad (b-x)/s_2=\sin\varepsilon_2。$$

【例 6】 如果刹车产生 $b=2.2$ 英尺/秒^2 的均匀减速度并且刹车距离不能超过 $s_1=3000$(英尺)，那末这部快车能有多大的最大速度？

将刹车距离 s_1 代到匀减速运动的距离时间方程 $s=vt-(b/2)t^2$ 中，给出刹车时间 t_1 为最大速度 v 的函数。在刹车时间 t_1 之后，速度 $s'=v-bt$ 必须为零。在两个公式中 v 表示刚刹车时的速度，因此是最大速度。从方程 $3000=vt_1^2-1.1t_1^2$ 与 $0=v-2.2t_1$ 中消去 t_1 给出

$$v=\sqrt{2bs_1}=10\cdot\sqrt{132}\approx 115 \text{ 英尺/秒。}$$

因而这部快车的速度不能超过 $v\approx$ 每小时 78 英里。

【例 7】 从水塔 W 到大楼 H 铺设一条自来水管道（见图 6.4-10）。另外，与这管道隔开一段距离的建筑物 S 靠一条附属管道供给自来水。S 离管道距 1 英里而从 S 到这管线的垂足与大楼 H 相距 2 英里。从 H 到水塔的距离是 6 英里。水管每英里的价格如下：主要管道 30 元，减载管道 22 元，附属管道 12 元。所有管道都以直线铺设。为了使铺设的费用尽

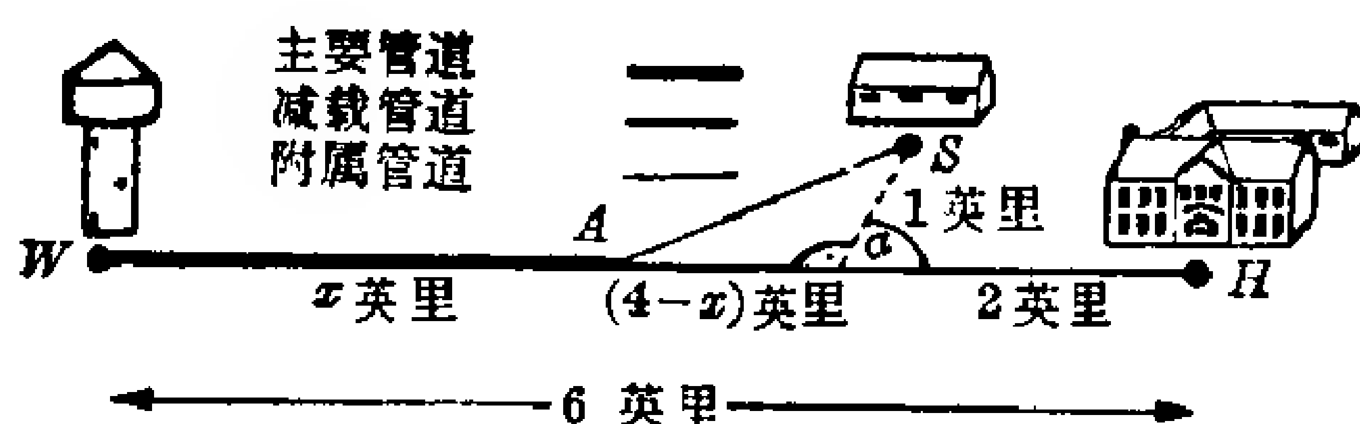


图 6.4-10 自来水管道铺设草图

可能小,应当在与水塔相隔多少距离的地方从主要管道分叉出附属管道?

引进变量 x 作为水塔 W 与分叉点 A 之间的距离; 附属管道的长度 $|AS|$ 为 $|AS|=\sqrt{1+(4-x)^2}$。全部费用 C 则结算如下:

$$C=30x+22(6-x)+12\sqrt{1+(4-x)^2}。$$

现在必须计算函数 $C=f(x)=132+8x+12\sqrt{17-8x+x^2}$ 的极值。

$$f'(x)=8+(12x-48)/\sqrt{17-8x+x^2};$$

因此由必要条件 $f'(x)=0$ 导致二次方程 $x^2-8x+76/5=0$ 有解 $x_{1,2}=4\pm(2/5)\sqrt{5}$。 值 $x=4+(2/5)\sqrt{5}$ 不满足根号内的方程。二阶导数

$$f''(x)=12/(17-8x+x^2)^{3/2}$$

对于 x_2 来说大于零,因此表明这里是局部极小值同时也是绝对极小值。因而应当在距水塔 3.11 英里的地方从主要管道分叉出附属管道。

多元函数的极值

函数 $y=f(\xi_1, \cdots, \xi_k)$的 k 个变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_k$ 可以看作 k 维欧几里得空间中有序的 k 实数组 $\boldsymbol{x}=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)$(见 **II.** 第 27 章)。称元素 $\boldsymbol{x}$ 落在元素 $\boldsymbol{x}_m=(\xi_1^{(m)}, \cdots, \xi_k^{(m)})$的邻域内,如果可找出正数 h_i,使各个变量 $\xi_i(i=1,2,\cdots,k)$落在区间 $\xi_i^{(m)}-h_i<\xi_i<\xi_i^{(m)}+h_i$ 内。在每一个 k 数组 $\boldsymbol{x}$ 唯一地对应于函数值 $f(\boldsymbol{x})=y$,而且只有当在 $\boldsymbol{x}_m$ 的邻域内不同于 $\boldsymbol{x}_m$ 的所有元素,其纵坐标值 $f(\boldsymbol{x})$小于 $f(\boldsymbol{x}_m)$时,在点 $\boldsymbol{x}_m$ 才会出现这函数 $f(\boldsymbol{x})=y$ 的局部极大值。类似地,$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}_m)$必须在局部极小值点的邻域内成立。

局部极值的必要条件 对于两元函数,令 $\xi_1=x, \xi_2=y$ 以及 $f(x, y)=z$。函数的图形为三维空间内的一个曲面,从而局部极值的条件有一种直观的含义: $f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{x}_m)$意味着在极大值点 $\boldsymbol{P}_{\max}=(x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})$的邻域内曲面上的其他所有点位于过这一点的水平面之下。类似地,$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}_m)$意味着在点 $\boldsymbol{P}_{\min}=(x_{\min}, y_{\min}, z_{\min})$ 的邻域内曲面的所有点位

于水平面之上。所谓水平面就是切平面，是由两条切线 $z_x=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 与 $z_y=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 所张成的(见 II.6.3-函数的偏导数)，只有当 $z_x=0$ 与 $z_y=0$ 时切平面才平行于 x, y 平面。

> (x_m, y_m) 为局部极值，仅当 $\frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x}=0$ 并且 $\frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y}=0$ 时才可能。

这个条件是必要的；然而由*鞍点*(见图 6.4-1)表明，它不是充分的。虽然，在那里两条切线是水平的，但是鞍点的邻域无论取得怎样小，总可在该邻域内找到曲面的两个点在鞍点切平面的对面。

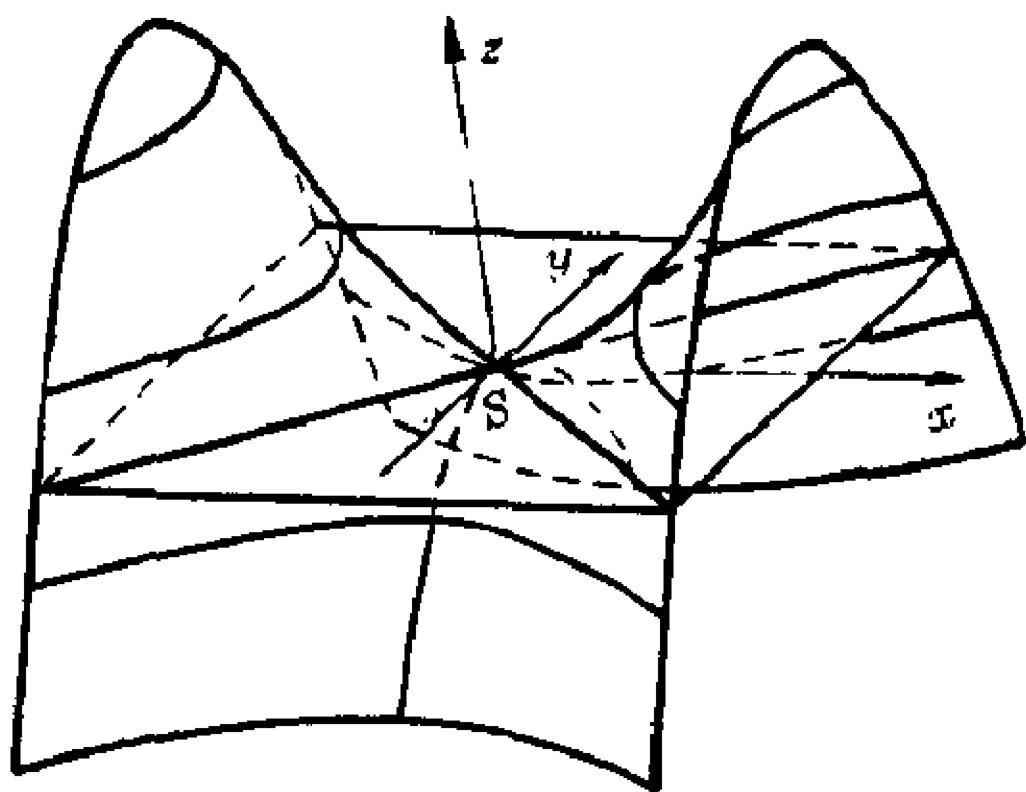


图 6.4-11 点 S 为鞍点

已经得到的这个必要条件可以推广到 k 元可微函数。

函数 $y=f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)=f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_m$ 有局部极值，只有在 $\boldsymbol{x}_m$ 的每个一阶偏导数都为零才可能。

局部极值的充分条件 如果应用泰勒定理将函数 $z=f(x,y)$ 在局部极值点 (x_m, y_m) 的邻域 $x_m-h_1<x<x_m+h_1$, $y_m-h_2<y<y_m+h_2$ 内展开，再截去 $n=1$ 项后面的展开，那末因为 $f_x=0$ 与 $f_y=0$，所以得到：

$$\begin{aligned}2!\Delta&=2![f(x_m+h_1, y_m+h_2)-f(x_m, y_m)]\\&=h_1^2 f_{xx}(x_m+\vartheta_1 h_1, y_m+\vartheta_2 h_2)+2h_1h_2 f_{xy}(x_m+\vartheta_1 h_1, y_m\\&\quad+\vartheta_2 h_2)+h_2^2 f_{yy}(x_m+\vartheta_1 h_1, y_m+\vartheta_2 h_2),\\&\qquad 0<\vartheta_1, \vartheta_2<1。\end{aligned}$$

如果二阶导数 f_{xx}, f_{xy} 与 f_{yy} 是连续函数，倘若 h_1 和 h_2 选取得充分小，那末它们在点 (x_m+h_1, y_m+h_2) 处有与在 (x_m, y_m) 处相同的符号。特别地，如果 $f_{xx}\neq 0$，那末差 Δ 可表达成下面的形式：

$$\begin{aligned}2!\Delta&=h_1^2 f_{xx}+2h_1h_2 f_{xy}+h_2^2 f_{yy}\\&=(1/f_{xx})[(h_1 f_{xx}+h_2 f_{xy})^2+h_2^2(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)]。\end{aligned}$$

方括弧中除了平方项之外还出现 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)$。如果它是正的，那末方

括弧内是正的；Δ不等于零且与 f_{xx} 同号。于是，当 $f_{xx}<0$ 时，纵坐标差 Δ在点(x_m, y_m)的邻域内总是负的，从而函数有局部极大值；而对于 $f_{xx}>0$，它有局部极小值。由$(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)>0$ 也得出在所讨论的邻域内 f_{yy} 与 f_{xx} 同号。

如果在点(x_m, y_m)，$f_x=0$，$f_y=0$ 并且$(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)>0$，那末 $f(x,y)$ 在这一点有局部极值；当 $f_{xx}<0$ 时它是极大值，当 $f_{xx}>0$ 时是极小值。

可以证明，当$(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)<0$ 时不会出现极值。例如，在鞍点 f_{xx} 和 f_{yy} 有不同的符号。然而，当$(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)=0$ 时是否出现极值就不能下结论。

当函数 $y=f(x)$的一阶和二阶偏导数记为

$$p_i=\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)\ \text{和}\ p_{ij}=\frac{\partial^2 y}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

时，如果这里所示的行列式，其一切偶数阶子式是正的，而奇数阶的子式符号与 p_{11} 的符号一致，那末函数 $y=f(x)$在点 x_m 有局部极值；当 $p_{11}<0$ 时局部极值是极大值，当 $p_{11}>0$ 时是极小值。

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}$$

带有从属条件的极大与极小 在许多应用问题中要确定多元函数的极值，其中的变量并不是相互独立的，而是通过从属条件联系起来。这样的问题常常可借助于从属条件用消去法减少变量的数目来解。上面有些极值问题正是按这个步骤来解的。这意味着给予某个变量比起其他的变量来有优先权，不过并不总能证明这种优先权。下面将对二元函数直观地导出对所有变量给予同等重要的处理方法，即拉格朗日待定乘数法。

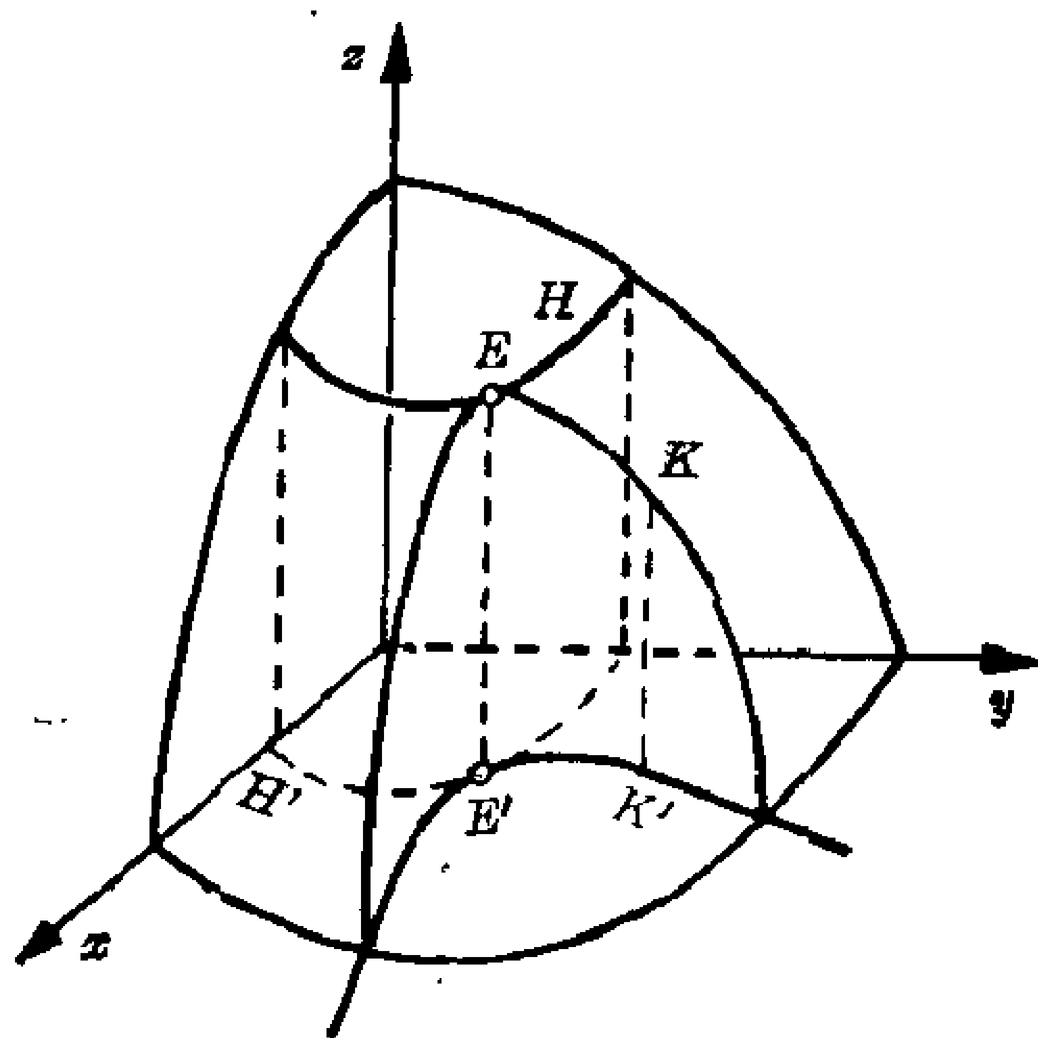


图 6.4-12 带有从属条件的局部极值

函数 $z=f(x, y)$ 的两个变量 x

和 y 用从属条件 $\varphi(x,y)=0$ 联系起来。函数 $z=f(x,y)$ 在空间表示一个曲面，而给定从属条件 $\varphi(x,y)=0$ 的方程在 x，y 平面定义一条曲线 K'（见图 6.4-12）。在计算极值时感兴趣的仅仅是函数 $z=f(x,y)$ 的那些满足从属条件的值 x，y，亦即在曲面 $z=f(x,y)$ 上曲线 K 的点，它们在 x，y 平面上的投影恰好是曲线 K'。于是，考虑到从属条件 $\varphi(x,y)=0$，确定函数 $z=f(x,y)$ 的局部极值问题，意味着求空间曲线 K 的局部极值。为了这个目的，考虑曲线簇 $c=f(x,y)$，其中 $c=$ 常数。有一条等高线 H 会与空间曲线 K 相切于一点 E；E 就是一个极值点。这条等高线 H 在 x，y 平面上的投影 H' 与曲线 K' 相切于点 E'。因此由 $\varphi(x,y)=0$ 和 $f(x,y)-c=0$ 定义的函数在点 E' 应当有相同的导数。隐式微分法给出 $f_x/f_y=\varphi_x/\varphi_y$。由此得出一方面 f_x 与 φ_x，另一方面 f_y 与 φ_y 成比例。引进比例常数 $(-\lambda)$-**拉格朗日乘数**，得到两个方程 $f_x=-\lambda\varphi_x$ 与 $f_y=-\lambda\varphi_y$，或者 $f_x+\lambda\varphi_x=0$ 与 $f_y+\lambda\varphi_y=0$，然而这些方程的左边相当于函数 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$ 的偏导数。所有这些就导致了**拉格朗日乘数法**：

为了确定函数 $z=f(x,y)$ 及从属条件 $\varphi(x,y)=0$ 的局部极值，用待定乘数 λ 形成辅助函数 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，进而求出这个函数的一阶偏导数。由方程组 $F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0$，$F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0$，$\varphi(x,y)=0$，计算可能极值点的坐标以及乘数 λ。

这个规则确实给出一个计算可能局部极值点的极好方法。要确定一个可能极值点是否真的出现极值以及哪一种极值，通常是一项复杂的研究。而在具体的例子中，根据问题的形成常常是清楚的，确信所期望的是极大值还是极小值。

【例】 在给定斜边为 c 的所有直角三角形中，要求找出面积最大的直角三角形。用 x 和 y 记直角边，$A=f(x,y)=xy/2$ 应为极大。因为这是直角三角形，所以成立从属条件 $x^2+y^2=c^2$ 或 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-c^2=0$。于是构成辅助函数 $F(x,y)=xy/2+\lambda(x^2+y^2-c^2)$。由方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y/2+2\lambda x=0 \to \lambda=-y/(4x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x/2+2\lambda y=0 \to x^2=y^2,$$

$$\varphi(x,y)=x^2+y^2-c^2=0\to x^2=c^2/2$$

得到 $x=y=c/\sqrt{2}$。因此等腰直角三角形是一个可能解，进而可以证明

其面积是绝对极大值。

类似地，待定乘数法可以拓广到确定有若干从属条件的 n 元函数极值的问题。

6.5 对平面曲线的应用

借助于微分可以确定由函数所给定的曲线上的某些重要点；特别地可以判定什么时候出现奇点。渐屈线和渐伸线的性质起因于曲率概念的明朗化。

由显函数定义的曲线讨论

要研究函数 $y=f(x)$，其定义域为 $D(f)$。如果 $D(f)$ 没有显式给出，那末就认为它由使解析表达式 $f(x)$ 有意义的所有实数 x 组成。如果定义域一侧或者两侧延伸至无限，那末当 $|x|$ 为很大值时函数的性态可以借助于对 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的极限过程来研究。因而也称此为**函数在无穷远处的性态**。对于有理函数这已在 I.第 5 章讨论过了。由方程 $y=f(x)$ 分别令 $x=0$ 或 $y=0$ 得到**与坐标轴的交点**坐标。为从方程 $f(x)=0$ 确定函数的**零点**，即它的曲线与 x 轴的交点的横坐标值，如有必要可应用逼近方法。对于有理函数可应用斯图谟定理(见 I. 第 5 章-零点)来找出零点所在的区间。

函数在其**间断点**邻域内的性态，利用极限来考察，进而确定间断的类型，例如，极点、不定点、跳跃间断或振荡等。

最后，用微分的方法来检验函数的**极值点和拐点**。如果为此目的确定函数的一阶导数和二阶导数的零点，那末对于两次连续可微函数还知道一阶导数保持定号的区间以及二阶导数不变号的区间。由此找到函数**单调减少，单调增加**，凸的或凹的区间。

曲线举例 下面就一些有代表性的曲线例子给出讨论结果。特别地，y_{0i} 是与 y 轴交点的纵坐标；x_{0i} 是零点；x_{mi} 是极值点的横坐标；x_{wi} 是拐点的横坐标；M_i 是极大值；m_i 是极小值；W_i 是拐点。

【例 1】 函数 $y=f(x)=(x/300)(x^2-45)(x^2-10)$ 对所有 x 有定义(见图 6.5-1)。它的导数是

$$y'=f'(x)=(1/60)(x^2-30)(x^2-3);$$

$$y''=f''(x)=(x/30)(2x^2-33);$$

$$y'''=f'''(x)=x^2/5-11/10。$$

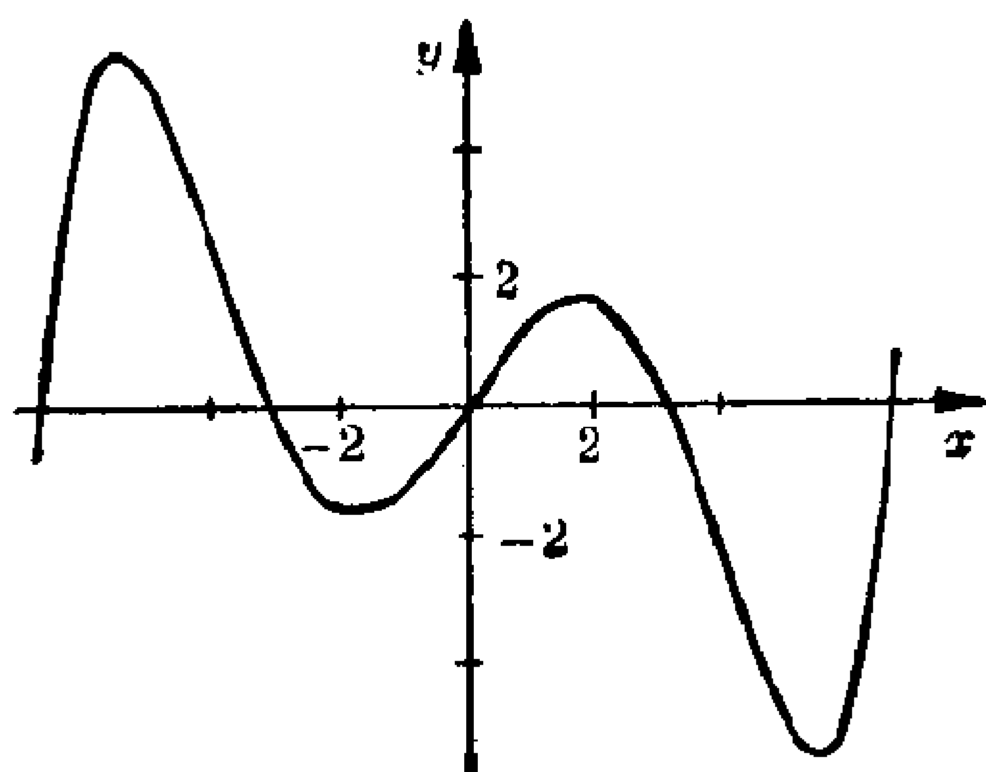


图 6.5-1　函数$y=(x/300)(x^2-45)(x^2-10)$图形

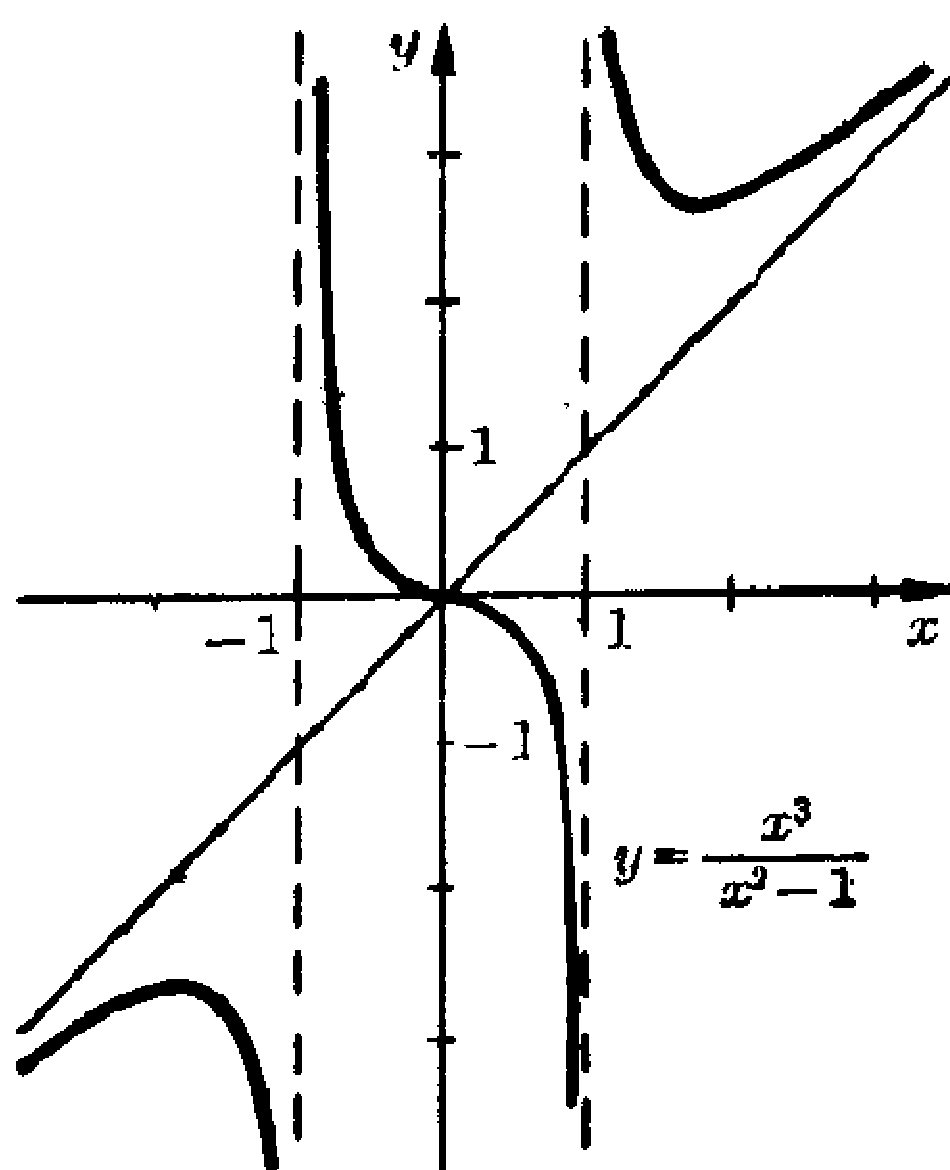


图 6.5-2　函数$y=x^3/(x^2-1)$图形

在无穷远处的性态: 当 $x\to\pm\infty$ 时, $f(x)\to\pm\infty$。与坐标轴的交点:

$$y_0=0;\qquad x_{01}=0;\qquad x_{02}=-3\sqrt{5}\approx-6.71;$$
$$x_{03}=+3\sqrt{5}\approx+6.71;\qquad x_{04}=+\sqrt{10}\approx3.16;$$
$$x_{05}=-\sqrt{10}\approx-3.16。$$

局部极值: $f'(x_m)=0\to x_{m1}=-\sqrt{30};\quad x_{m2}=-\sqrt{3};$

$$x_{m3}=+\sqrt{3};\qquad x_{m4}=+\sqrt{30};$$
$$M_1\equiv(-5.48,\ 5.48);\qquad M_2\equiv(1.73,\ 1.7);$$
$$m_1\equiv(-1.73,\ -1.7);\qquad m_2\equiv(5.48,\ -5.48)。$$

拐点: $f''(x_w)=0\to x_{w1}=-4.06;\quad x_{w2}=0;\quad x_{w3}=+4.06;$

$$W_1\equiv(-4.06,\ 2.58);\qquad W_2\equiv(0,\ 0);$$
$$W_3\equiv(4.06,\ -2.58)。$$

【例 2】　函数 $y=f(x)=x^3/(x^2-1)$(见图 6.5-2) 对除了值 $x=\pm1$ 以外的所有 x 有定义, 因为当 $x=\pm1$ 时分母为零。它的导数是

$$y'=f'(x)=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2};\qquad y''=f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3};$$

$$y'''=f'''(x)=\frac{-6(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4};$$

在无穷远处的性态: 当 $x\to\pm\infty$ 时, $\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}\to\pm\infty$。

渐近线 $y=x$(见 I. 第 5 章)。

与轴相交：$y_0=0$；$x_0=0$。

间断性：$x_1=1$ 与 $x_2=-1$ 为极点，有垂直渐近线。

局部极值：$f'(x_m)=0\to x_{m1}=-\sqrt{3}$；$x_{m2}=+\sqrt{3}$；$x_{m3}=0=x_w$；$M\equiv(-1.73,\ -2.6)$；$m\equiv(1.73,\ 2.6)$。

拐点：$f''(x_w)=0\to x=0$，$W\equiv(0,\ 0)$。因为 $f'(x_w)=0$，所以这是一个水平拐点。

【例 3】 函数 $y=f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ 仅在区间 $-3\leqslant x\leqslant+3$ 上有定义(见图 6.5-3)。它的导数是

$$y'=f'(x)=\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}};\quad y^2=\frac{x(2x^2-27)}{\sqrt{(9-x^2)^3}};$$

$$y'''=f'''(x)=\frac{-243}{\sqrt{(9-x^2)^5}}。$$

与轴相交：$y_0=0$；$x_{01}=0$；$x_{02}=3$；$x_{03}=-3$。

局部极值：$f'(x_m)=0\to x_{m1}=-(3/2)\sqrt{2}$；$x_{m2}=+(3/2)\sqrt{2}$；$m\equiv(-2.12,\ -4.5)$；$M\equiv(2.12,\ 4.5)$。

拐点：$f''(x_w)=0\to x_{w1}=0$；$x_{w2}=+(3/2)\sqrt{6}$；$x_{w3}=-(3/2)\sqrt{6}$；x_{w2} 和 x_{w3} 在定义域之外。$W_1=(0,\ 0)$。

这个曲线关于 x 轴的镜象是由函数 $y=-x\sqrt{9-x^2}$ 所定义的曲线。这两个函数都由代数方程 $x^4-9x^2+y^2=0$ 所定义。$P(0,\ 0)$ 作为一个二重点，是奇点。

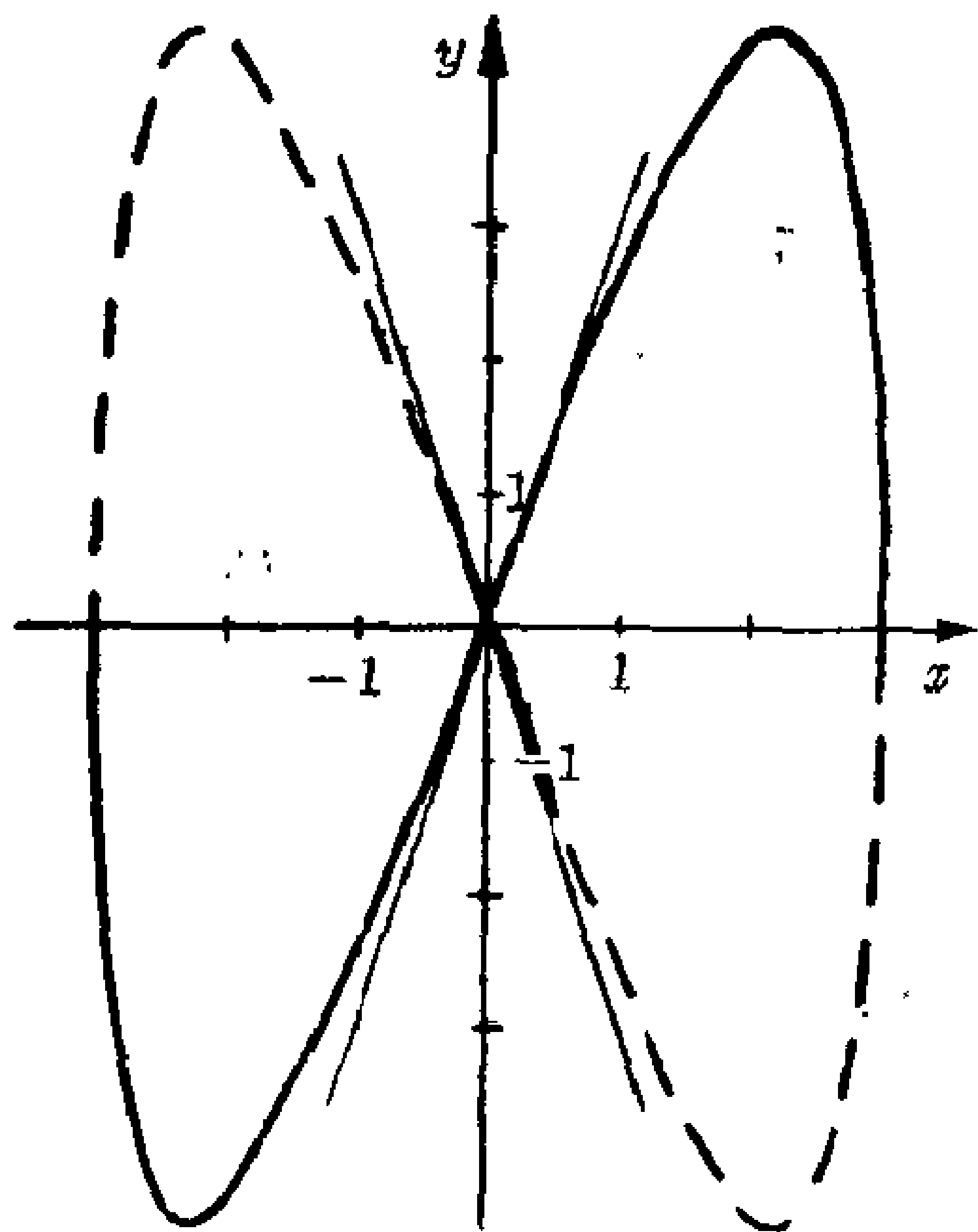


图 6.5-3 由方程$x^4-9x^2+y^2=0$定义的曲线讨论

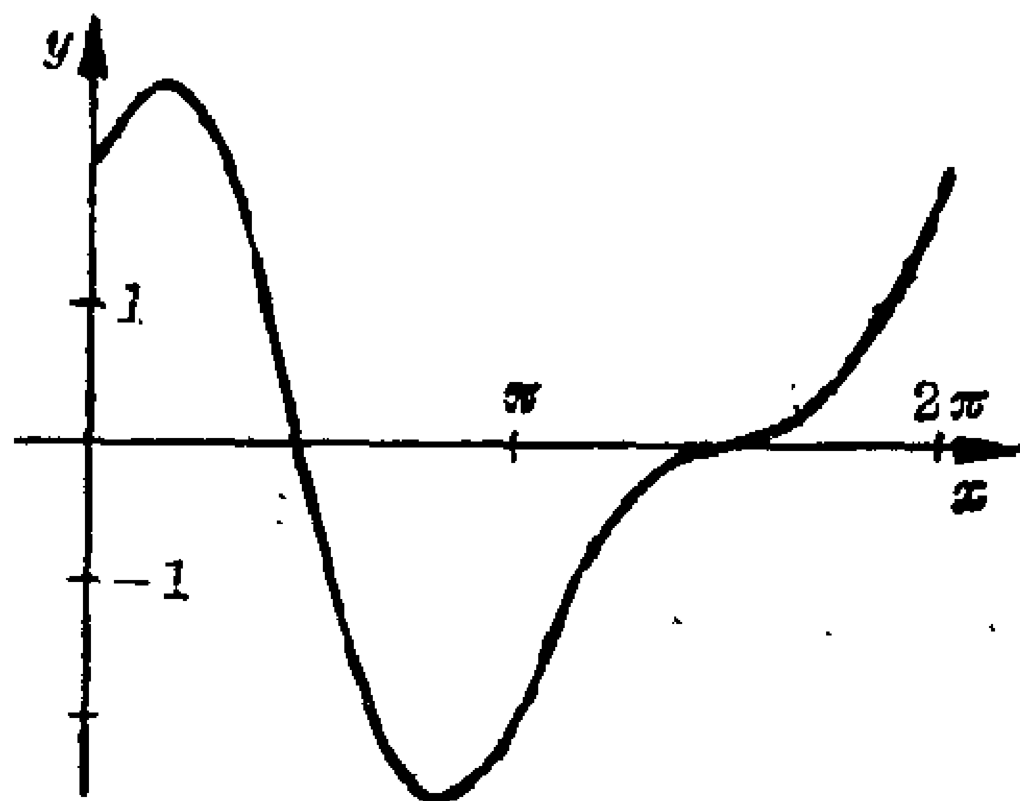


图 6.5-4 函数 $y=\sin 2x+2\cos x$ 图形

【例4】 函数 $y=f(x)=\sin 2x+2\cos x$ 对所有的 x 有定义；由于它的周期性，将限于在区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 进行研究(见图 6.5-4)。它的导数是

$$y'=f'(x)=2\cos 2x-2\sin x;$$

$$y''=f''(x)=-4\sin 2x-2\cos x;$$

$$y'''=f'''(x)=-8\cos 2x+2\sin x。$$

与轴相交：$y_0=2$; $x_{01}=\pi/2\approx 1.57$, $x_{02}=3\pi/2\approx 4.71$。

局部极值：$f'(x_m)=0\rightarrow x_{m1}=\pi/6$; $x_{m2}=5\pi/6$; $x_{m3}=3\pi/2=x_{w3}$。$M\equiv(0.52,\ 2.6)$; $m\equiv(2.62,\ -2.6)$。

拐点：$f''(x_w)=0\rightarrow x_{w1}=\pi/2$; $x_{w2}\approx 3.39$; $x_{w3}=3\pi/2$; $x_{w4}\approx 6.03$; $W_1\equiv(1.57,\ 0)$; $W_2\equiv(3.39,\ -1.45)$; $W_3\equiv(4.71,\ 0)$，因为 $f'(x_{w3})=0$，所以这是一个水平拐点；$W_4\equiv(6.03,\ 1.45)$。

奇点

考察奇点可通过探讨在这些点上可能有的切线方向来进行。如果曲线方程用隐式 $f(x,\ y)=0$ 给定，而且如果 φ 是切线与 $+x$ 轴之间的夹角，那末

$$y'=\tan\varphi=\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}=-f_x/f_y。$$

平行于 x 轴的切线就由 $f_x=0$ 来刻划，而垂直于 x 轴($\varphi=\pi/2$)的切线则用 $f_y=0$ 来描述。然而，如果这两个偏导数都取值为零，那它就会是一个奇点。

代数曲线的奇点　在奇点 $(x_s,\ y_s)$(设它是一个零点)的邻域 $x_s-h_1<x<x_s+h_1$, $y_s-h_2<y<y_s+h_2$ 内，因为 $f(x_s,\ y_s)=0$, $f_x(x_s,\ y_s)=0$ 和 $f_y(x_s,\ y_s)=0$，带有余项 R_3 的泰勒展开为如下形式：

$$f(x_s+h_1,\ y_s+h_2)=1/2(h_1^2f_{xx}+2h_1h_2f_{xy}+h_2^2f_{yy})+R_3。$$

如果 $h_1=\Delta x$ 和 $h_2=\Delta y$ 趋于零，那末 (R_3/h_1^2) 也是一个零序列，因为 R_3 包含的是 h_1 和 h_2 的三次及更高次幂。

如果三个偏导数不全为零，那末 $y=\tan\varphi$ 的值可由二次方程 $f_{xx}+2y'f_{xy}+y'^2f_{yy}=0$ 来确定。如果 $f_{yy}\neq 0$，那末这个二次方程解的数目取决于 $\Delta=f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}$ 的值。当 $\Delta>0$ 时，存在两条相异切线；曲线有一个**二重点**，曲线的两支在这一点相交。当 $\Delta=0$ 时，存在两条重合切线；曲线的两支有一条公切线并在**互切点**或者**尖点**彼此切触。在**寻常尖点**，曲线的两支位于切线的两旁；在**偏斜尖点**，它们位于同一旁。当 $\Delta<0$ 时没有

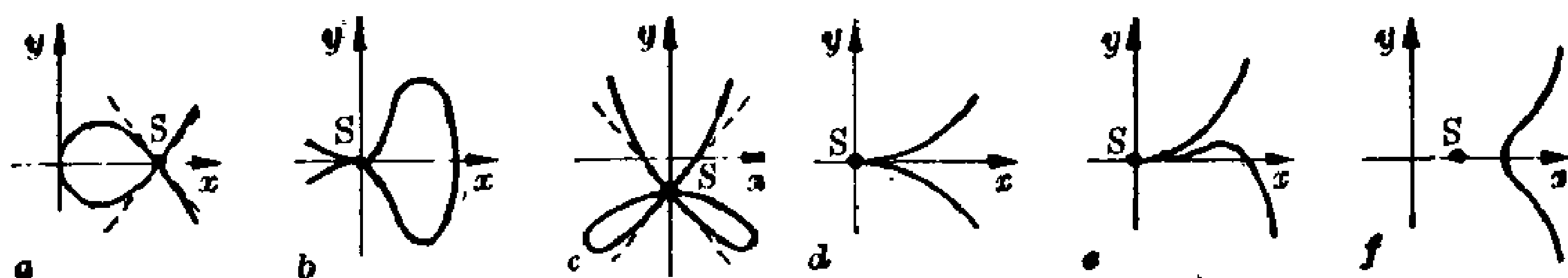


图 6.5-5 代数曲线的奇点

a) 二重点, b) 互切点, c) 三重点, d) 寻常尖点,
e) 偏斜尖点, f) 孤立点

实的切线,从而曲线有一个孤立点(见图 6.5-5)。如果 $f_{yy}=0$, 那末一条切线有斜率 $y'=-(1/2)f_{xx}/f_{xy}$,而第二条切线平行于 y 轴。类似地考虑 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 即可这也是一个二重点。偶而也有几个奇性联合出现的情况。三重点就是这样的一个点,一共有三条切线。

二重点的例子,笛卡尔叶形线: 由方程 $f(x, y)=x^3+y^3-3axy=0$ 得出偏导数 $f_x=3x^2-3ay$, $f_y=3y^2-3ax$ 和 $f_{xx}=6x$, $f_{xy}=-3a$, $f_{yy}=6y$。方程 $f_x=0$ 和 $f_y=0$ 有两个解 $x_1=0$, $y_1=0$ 和 $x_2=a, y_2=a$。只有(x_1, y_1)才满足方程 $f=0$。

对于 $x_1=0$, $y_1=0$: $f_{xx}=0$, $f_{xy}=-3a$, $f_{yy}=0$, 于是 $\Delta=9a^2>0$。奇点(x_1, y_1)是一个二重点。因为 $f_{yy}=0$, 所以切线方向是由 $y'=\infty$ 与 $y'=-(1/2)f_{xx}/f_{xy}=0$ 所给定的。切线与坐标轴重合。导数有值

$$\frac{dy}{dx}=-f_x/f_y=-(x^2-ay)/(y^2-ax)。$$

当 $f_x=0$ 但 $f_y\neq0$ 时有一条平行于 x 轴的切线 t_x; 当 $f_y=0$ 但 $f_x\neq0$ 时有一条平行于 y 轴的切线 t_y。计算给出: $f_y=0$, $f_x\neq0$: $y^2=ax\to y^6/a^3+y^3-3y^2=0$ 或者 $y^6=2y^3a^3$; 按 $y\neq0\to y_3=a\sqrt[3]{2}\approx1.26a$ 和 $x_3=a\sqrt[3]{4}\approx1.59a$。类似地,对于 $f_x=0$, $f_y\neq0$, 有

$$x_4=a\sqrt[3]{2}\approx1.26a$$

和 $$y_4=a\sqrt[3]{4}\approx1.59a。$$

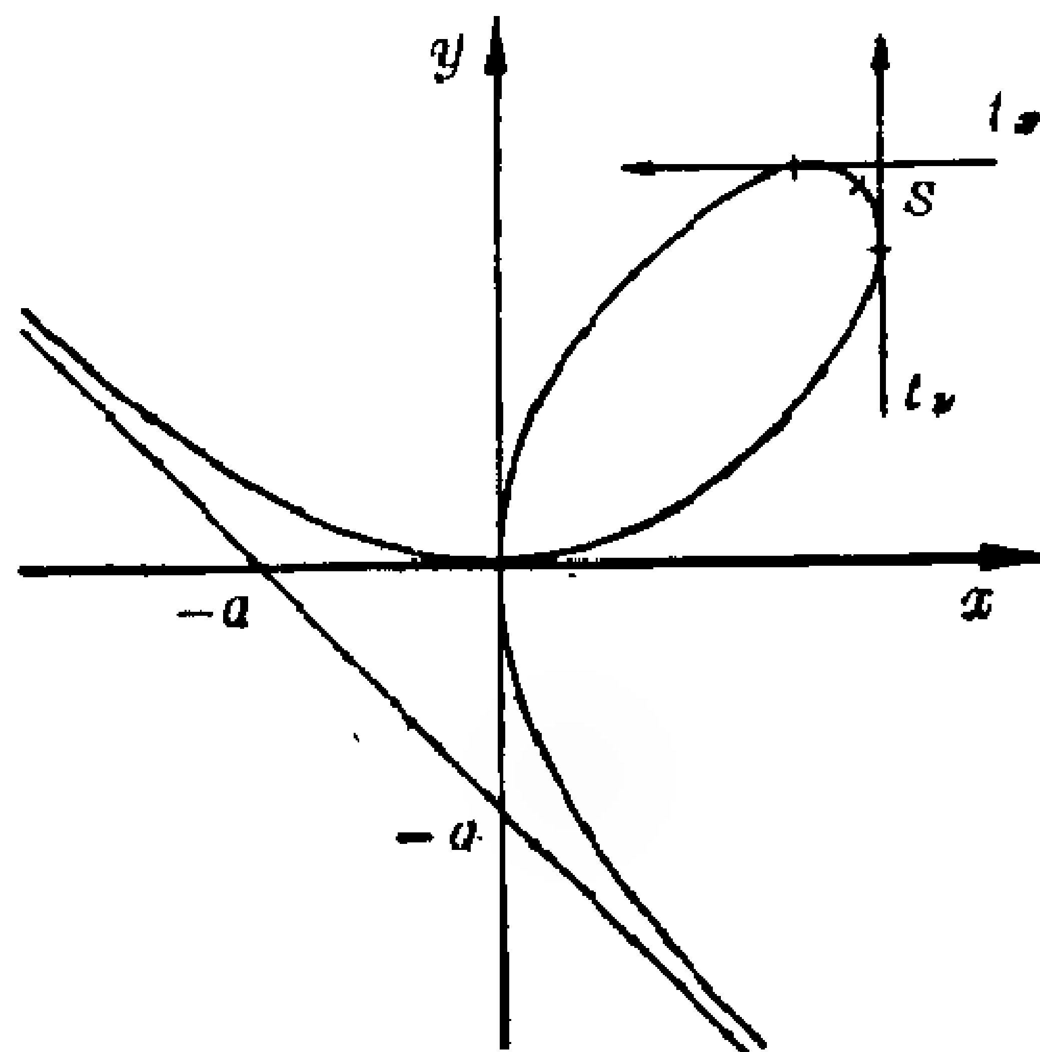


图 6.5-6 笛卡尔叶形线

在方程 $f(x, y)=0$ 中代入

$y=mx$，得到 $x^3(1+m^3)-3amx^2=0$ 或 $1+m^3-3am/x=0$。当 $x\to\pm\infty$ 时，给出 $1+m^3=0$ 或 $m=-1$。因此笛卡尔叶形线（见图 6.5-6）有一条斜率为 $m=-1$ 的渐近线。如果它的方程是 $y=-x+c$，那末在方程 $f(x, y)=0$ 中通过代入 y 而得到 c 的值：

$$x^3+(c-x)^3-3ax(c-x)=0 \quad 或 \quad 3x^2(a+c)-3x(c^2+ac)^3+c^3=0。$$

因此令 $x\to\pm\infty$ 有 $a+c=0$ 或 $c=-a$。渐近线方程是 $y=-x-a$。

曲率，渐屈线和渐伸线

曲率　在讨论拐点的时候曲率概念用来描述拐点前与拐点后函数 $y=f(x)$ 曲线的不同走向。那里已经证实，曲线的同一个性质也可用曲线的相继两条切线的方向角 τ 的变分来描述。因为很显然，对于方向角的给定变分 $\Delta\tau$ 所需要的弧长增量 Δs 越大，曲率 $\varkappa$ 就越小，所以后者就定义成此角作为弧长 s 的函数的变化率（见图 6.5-7, 8）：

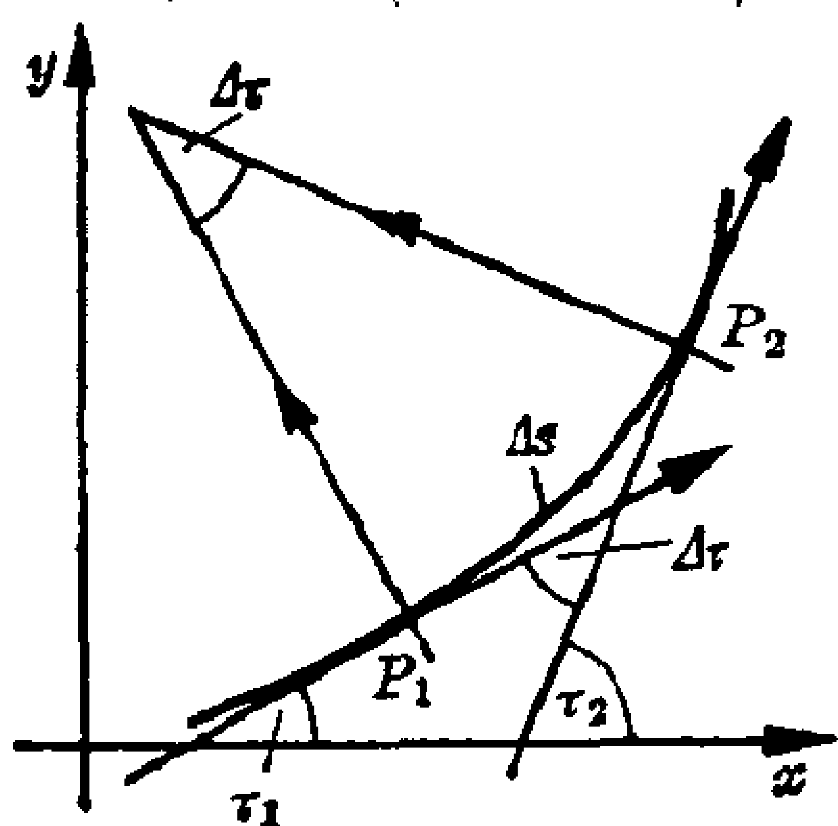


图 6.5-7　较小左曲的平面曲线的曲率

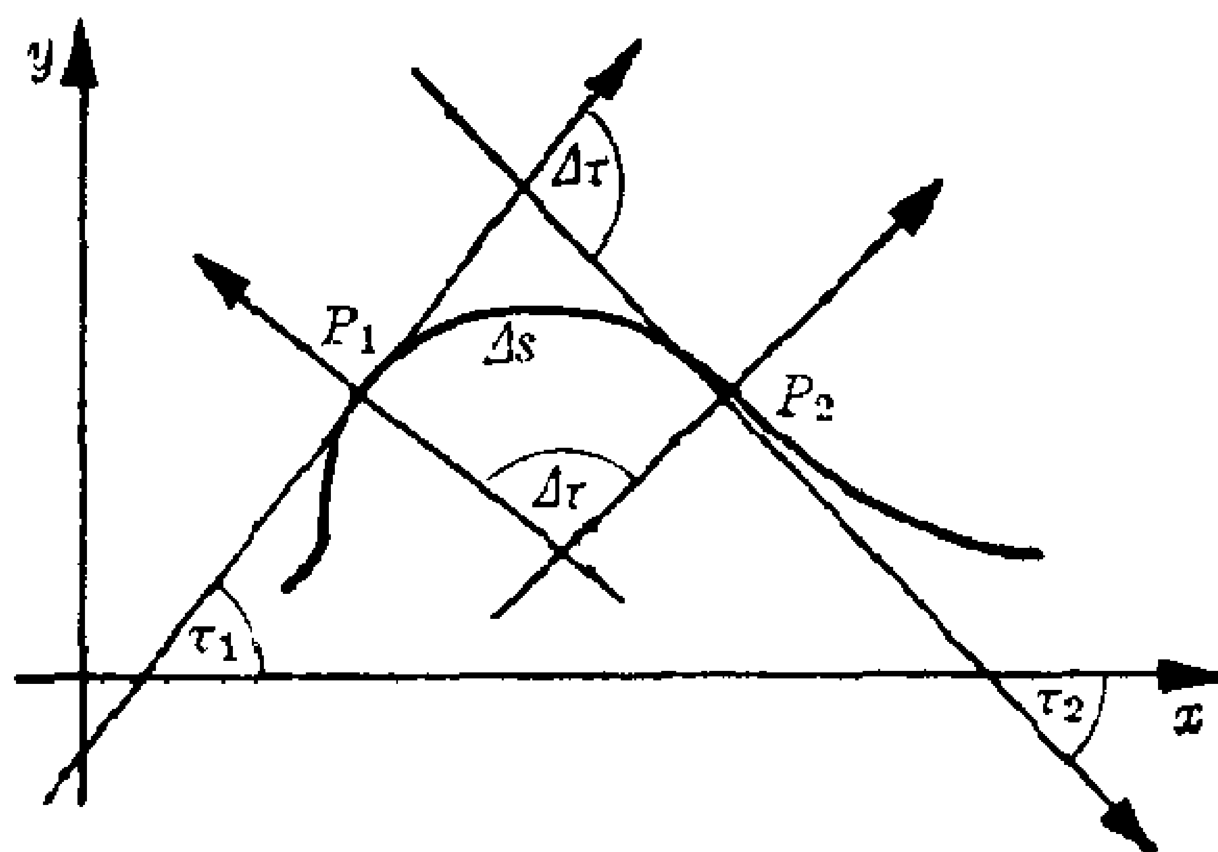


图 6.5-8　较大右曲的平面曲线的曲率

$$\varkappa=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{d\tau}{ds}。$$

而角 τ 定义为 $\tau=\arctan y'$；根据链式法则得到

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{d\tau}{dx}\Big/\frac{ds}{dx}=y''/(1+y'^2)\cdot[1/\sqrt{1+y'^2}]=y''/(1+y'^2)^{3/2}=\varkappa。$$

如果 x 和 y 看作单参数函数并且用一个点来表示关于这个参数的微分，那末 $\tau=\arctan(\dot{y}/\dot{x})$，$\varkappa=(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})/(\dot{x}+\dot{y}^2)^{3/2}$。曲率也可用极坐标 $x=r\cos\vartheta$，$y=r\sin\vartheta$ 来表示。得到

$$\dot{x}=\cos\vartheta\dot{r}-r\sin\vartheta\dot{\vartheta};\ \dot{y}=\sin\vartheta\dot{r}+r\cos\vartheta\dot{\vartheta}$$

和

$$\ddot{x}=\ddot{r}\cos\vartheta-2\dot{r}\sin\vartheta\dot{\vartheta}-r\cos\vartheta\dot{\vartheta}^2-r\sin\vartheta\ddot{\vartheta},$$

$$\ddot{y}=\ddot{r}\sin\vartheta+2\dot{r}\cos\vartheta\dot{\vartheta}-r\sin\vartheta\dot{\vartheta}^2+r\cos\vartheta\ddot{\vartheta}。$$

因此
$$\varkappa=(2\dot{r}^2\dot{\vartheta}+r\dot{r}\ddot{\vartheta}-r\ddot{r}\dot{\vartheta}+r^2\dot{\vartheta}^3)/(\dot{r}^2+r^2\dot{\vartheta}^2)^{3/2}$$
$$=(2r'^2-rr''+r^2)/(r'^2+r^2)^{3/2},$$

这里
$$r'=\frac{dr}{d\vartheta}=\frac{\dot{r}}{\dot{\vartheta}} \quad 和 \quad r''=\frac{dr'}{dt}\cdot\frac{dt}{d\vartheta}=\frac{\ddot{r}\dot{\vartheta}-\dot{r}\ddot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}^3}。$$

从这些公式中的第一个公式得出曲率与 y'' 同号。于是，如果当曲线沿横坐标增加的方向运行时导数增加，那末二阶导数 y'' 是正的从而 $\varkappa$ 也是正的；从纵坐标非常大的一点 P 来看，这曲线呈现为凹的。以这样方式弯曲的路线为*左曲*。如果从 P 看来曲线呈现为凸的，或类似地如果弯曲的路线为*右曲*，那末导数不断减少，从而 y'' 和 $\varkappa$ 是*负*的。

曲率圆 圆是具有常曲率的一条曲线；由参数表示 $x=\rho\cos t$, $y=\rho\sin t$ 得到 $\varkappa=1/\rho$。这个结果相当于如下的直观性质，即*曲率半径* ρ 越小，圆的曲率就越大(见图 6.5-9)。按照下述规则对函数 $y=f(x)$ 曲线的每一个点(x, y)指定一个曲率圆 $y=g(x)$：两条曲线通过同一个*点*，$f(x)=g(x)$，具有*相同的切线*，$f'(x)=g'(x)$，并有*相同的曲率*，所以 $f''(x)=g''(x)$。在点 (x, y) 切线 t 有向。如果它与 $+x$ 轴构成夹角 α，与 $+y$ 轴成角 $\beta=\pi/2-\alpha$，那末它的方向余弦是

$$\cos\alpha=\dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \quad 和 \quad \cos\beta=\sin\alpha=\dot{y}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}。$$

法线 n 的正方向是从切线旋转 $+\pi/2$ 而得的那个方向。因为 $\bar{\alpha}=\alpha+\pi/2$，所以它的方向余弦是

$$\cos\bar{\alpha}=-\dot{y}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \quad 和 \quad \cos\bar{\beta}=\dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}。$$

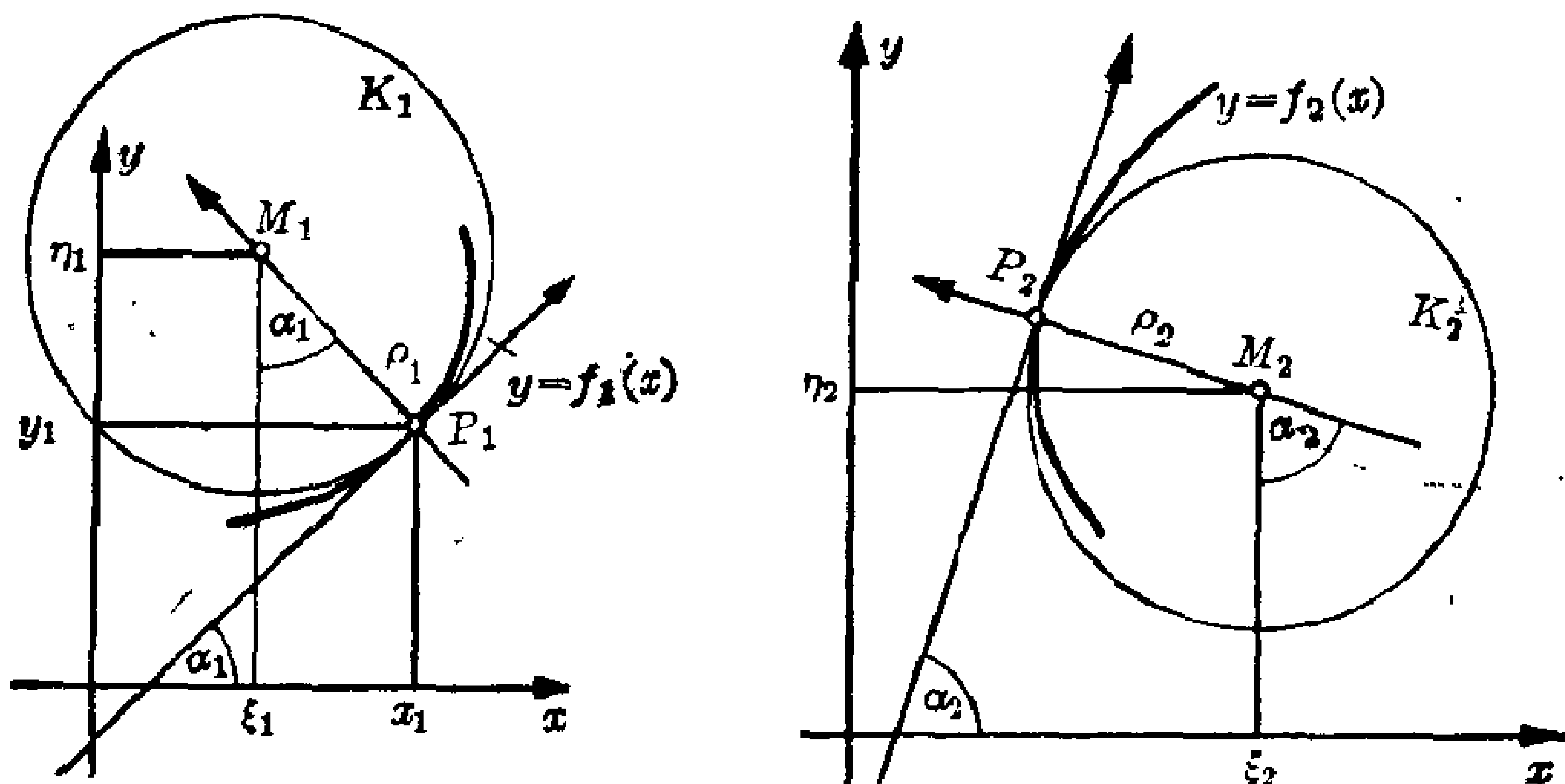


图 6.5-9 曲率圆 K，曲率半径 ρ 和曲率中心 M；$\rho_1>0$, $\rho_2<0$

如此选定方向为的是使对于正曲率，正法线指向内，即向着曲率中心，而对于负的 $\varkappa$ 它指向外，即远离曲率中心。于是在法线上按照它的符号标出曲率半径 $\rho=1/\varkappa$。曲率中心的坐标 ξ, η 是(见图 6.5-10)：

$$\xi=x+\rho\cos\bar{\alpha}=x-\rho\dot{y}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{x}^2},$$

$$\eta=y+\rho\cos\bar{\beta}=y+\rho\dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}。$$

曲　率　半　径	$\rho=1/\varkappa$

通过代入 $\rho=1/\varkappa$ 得到 ξ 和 η 的方程。

函数	$y=f(x)$	$x=x(t), y=y(t)$	$r=f(\vartheta)$
曲率	$\varkappa=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$	$\varkappa=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$	$\varkappa=\dfrac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$
曲率	$\xi=x-\dfrac{1+y'^2}{y''}\cdot y'$	$\xi=x-\dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\cdot\dot{y}$	$\xi=r\cos\vartheta-\dfrac{(r^2+r'^2)(r\cos\vartheta+r'\sin\vartheta)}{r^2+2r'^2-rr''}$
中心	$\eta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\cdot x'$	$\eta=y+\dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\cdot\dot{x}$	$\eta=r\sin\vartheta-\dfrac{(r^2+r'^2)(r\sin\vartheta-r'\cos\vartheta)}{r^2+2r'^2-rr''}$

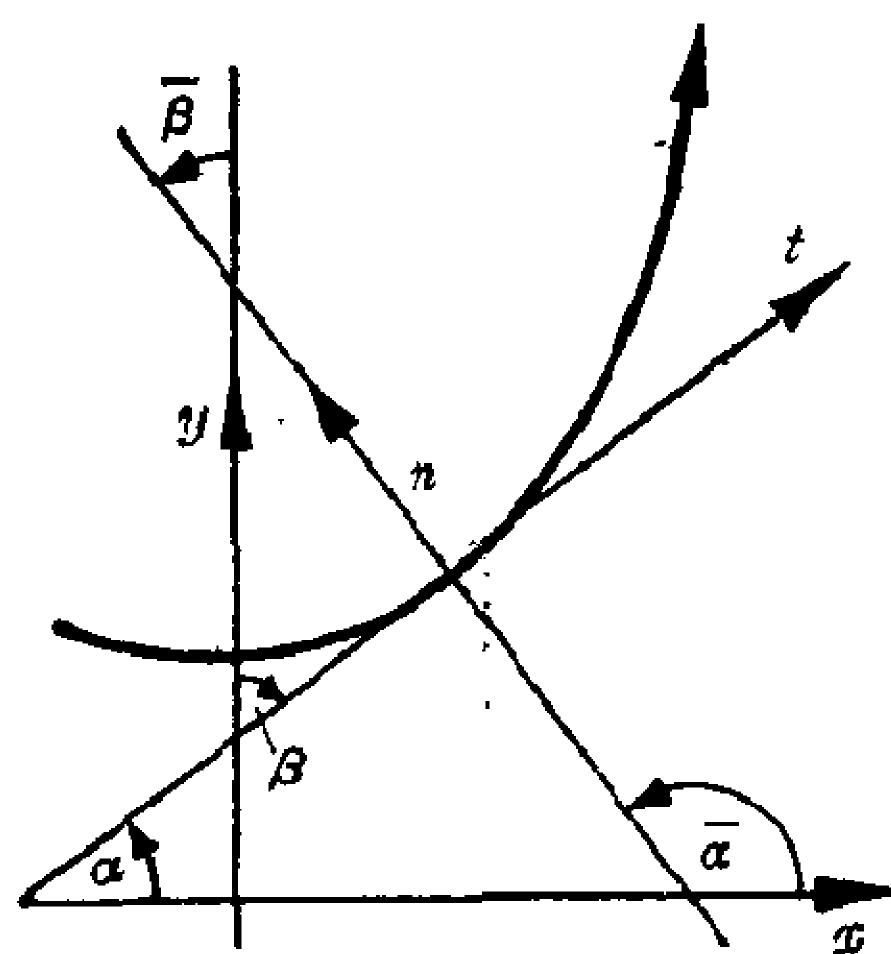


图 6.5-10　切线 t 和法线 n 的方向余弦

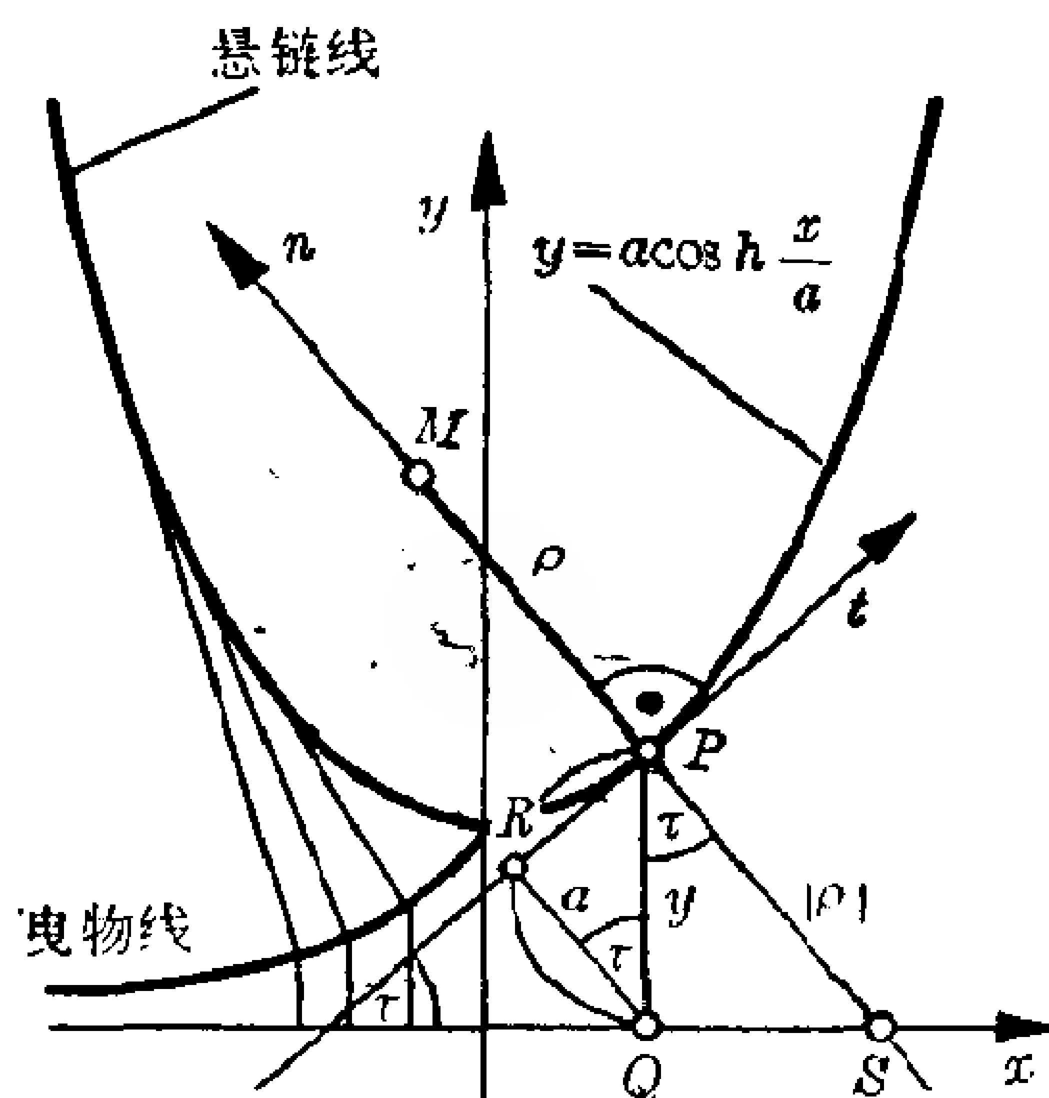


图 6.5-11　悬链线的曲率中心

悬链线 把一根完全柔软的重线从两个点悬挂起来，在平衡状态下就成悬链线的形状。它是曳物线的渐屈线，是函数 $y=(a/2)(e^{x/a}+e^{-x/a})=a\cosh(x/a)$ 的图形，导数为 $y'=\sinh(x/a)$ 和 $y''=(1/a)\cosh(x/a)$。因为 $1+\sinh^2(x/a)=\cosh^2(x/a)$，所以代入得到曲率半径 $\rho=a\cosh^2(x/a)=y^2/a$ 和曲率中心的坐标 $\xi=x-a\sinh(x/a)=x-ay'$ 与 $\eta=2a\cosh(x/a)=2y$（见图 6.5–11）。

切线 t 和曲率中心的作图。 因为过 P 和 R 的直线与 x 轴之间的夹角 τ，有 $\tan\tau=|RP|/|RQ|=\sqrt{y^2-a^2}/a=\sinh(x/a)=y'$，所以将纵坐标 $|PQ|$ 为直径的圆与以 Q 为中心 a 为半径的圆相交于点 R，它一定在 P 点的切线上。在 P 点垂直于 t 即法线 n，它与 x 轴相交于点 S。由 $\cos\tau=(a/y)=y/|PS|$ 得出 $|PS|=y^2/a=|\rho|$。按照曲率的符号，从 P 起在法线正的一边或负的一边标出 $|\rho|$。因为 $\frac{d}{dx}(a^2\sinh(x/a))=a\cosh(x/a)$，所以给出 x 轴与悬链线之间的面积 $A=a^2\sinh(x/a)$。从最低点 $(0, a)$ 起量的弧长 l 为 $l_1=a\sinh(x/a)$。

渐屈线 如果函数 $y=f(x)$ 有一阶和二阶连续导数，那末曲率中心的坐标 ξ, η 是连续函数。由它们定义的曲线就称做渐屈线。

平面曲线的渐屈线是其曲率中心的轨迹。

渐屈线也可作为法线的包络作图；于是原曲线的法线是其渐屈线的切线（见图 6.5–12）。因为原曲线的曲率中心位于渐屈线上，所以曲率中心坐标的公式同时给出了渐屈线的参数表示。只需把 ξ 和 η 看作流动坐标。

渐伸线 渐伸线是一种展开曲线。想象用一根不可伸缩的线紧贴在

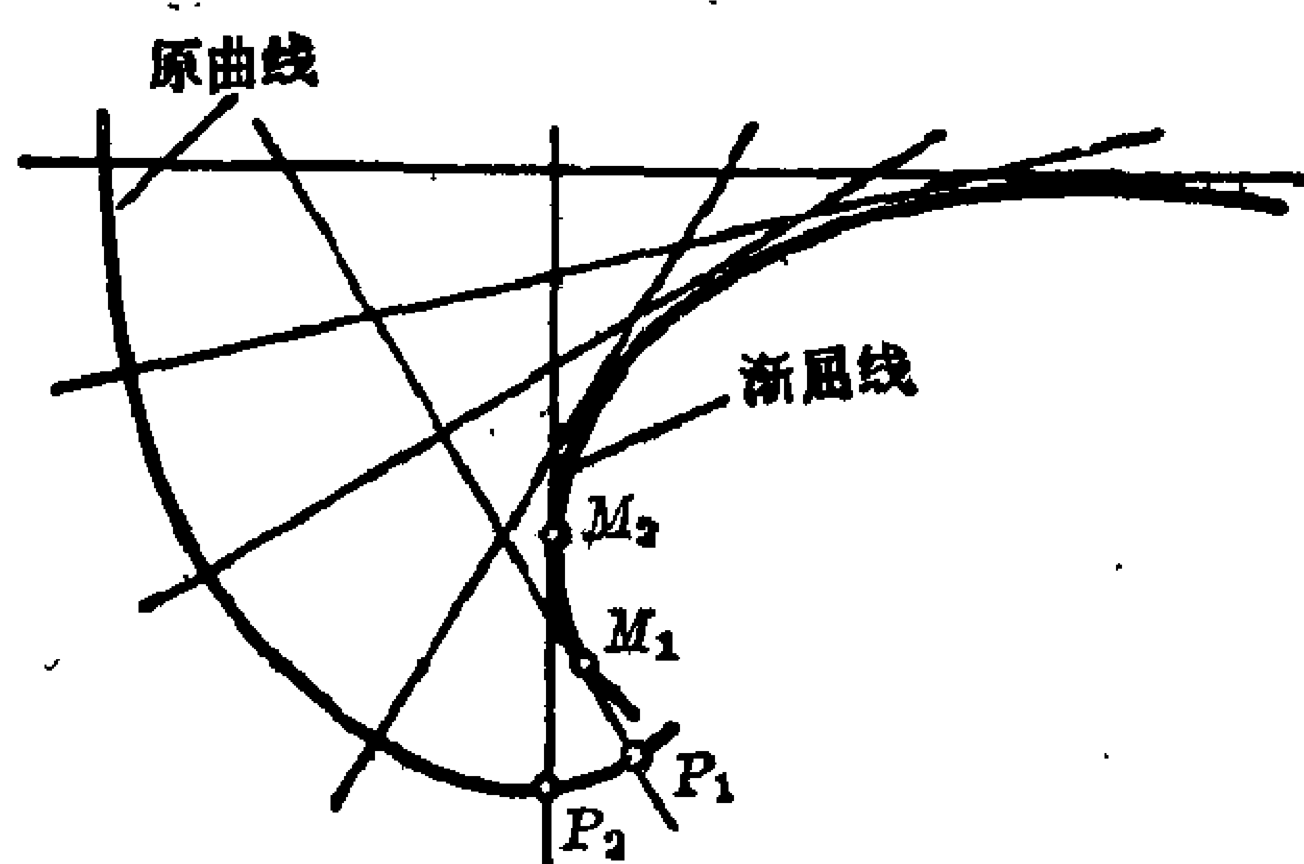


图 6.5-12 渐屈线

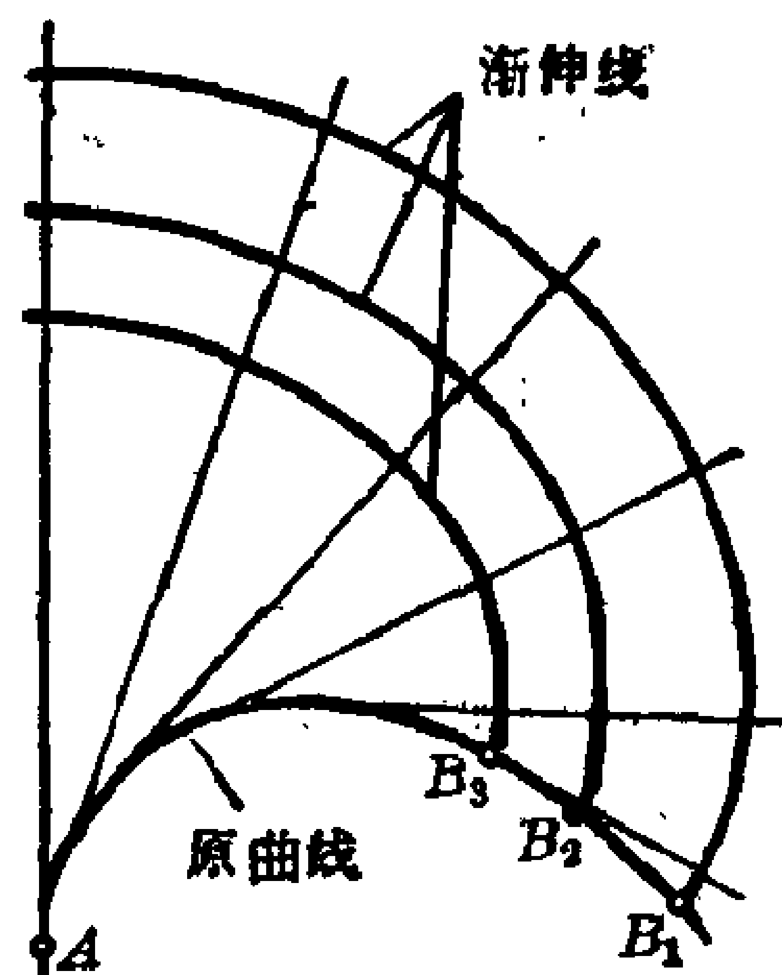


图 6.5–13 平面曲线的渐伸线族

一条曲线上(图 6.5–13)。将这根线缚在曲线的一个点 A 上。如果接着考虑这根线的一个点 B_1，并将这紧贴着的线从曲线上解开，那末点 B_1 描绘一条新的曲线，即原曲线的一条渐伸线。因为每一个点 B 都描绘这样一条渐伸线，所以整个渐伸线族都属于给定的曲线。又因为这根线在解开的时候总是拉紧的，所以它的解开部分又总是原曲线的一条切线。点 B 关于切线的瞬时点描绘无限小圆弧作为渐伸线的弧长元素；然而这又意味着这根线的解开部分总是渐伸线的法线。于是，原曲线的切线与渐伸线相交成直角。由此产生如下的定理：

平面曲线的渐伸线是原曲线切线的正交轨迹(与曲线相交成直角)。

每一条曲线是它各条渐伸线的渐屈线。

每一条曲线是它的渐屈线的一条渐伸线。

【例】 在机械设计中圆的渐伸线作为渐伸线齿轮齿形的轮廓线而得到应用(见图 6.5–14)。由图示可将渐伸线一个点 P 的坐标写为 $\xi=x+s\sin t$ 和 $\eta=y-s\cos t$。由圆的参数表示 $x=r\cos t$; $y=r\sin t$ 和解开的圆弧长公式 $s=rt$ 得到圆的渐伸线的参数表示

$$\xi=r(\cos t+t\sin t);\quad \eta=r(\sin t-t\cos t)。$$

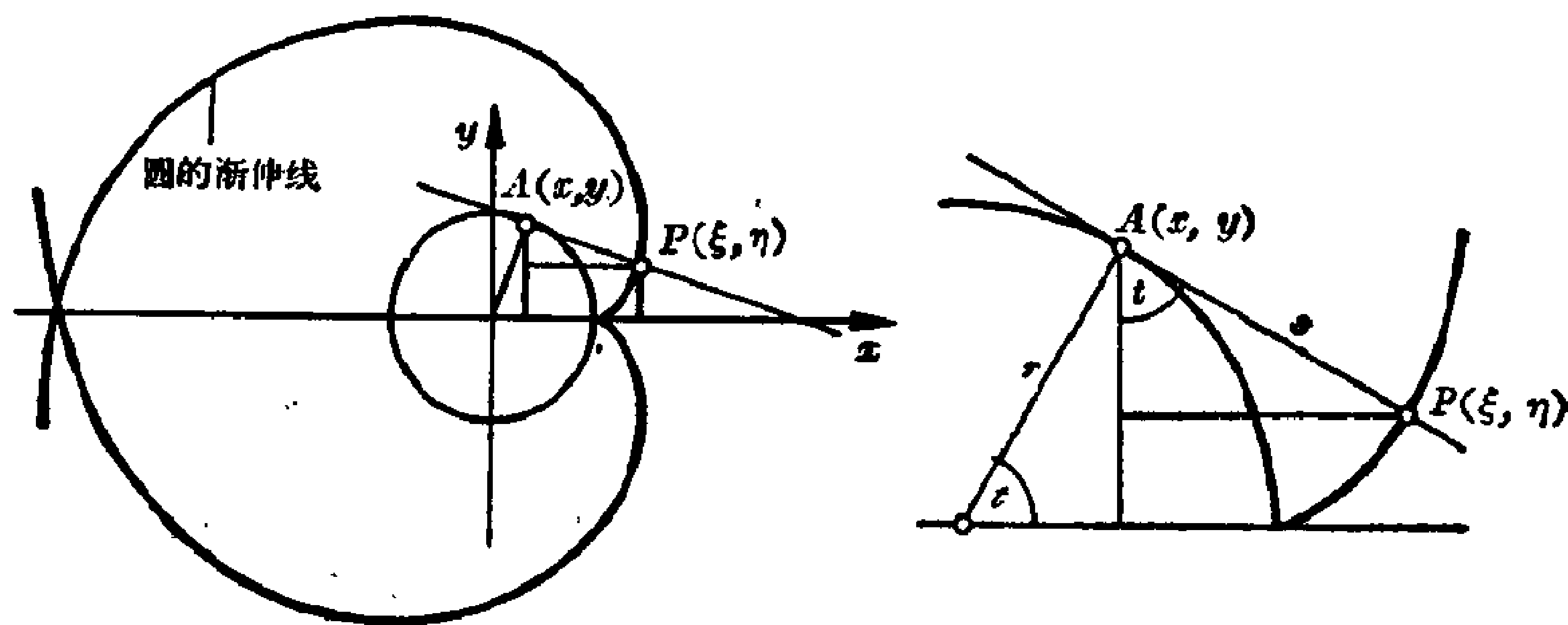


图 6.5–14　圆的渐伸线

特殊曲线

在前一段讨论二重点和曲率中心的时候已附带叙述了笛卡尔叶形线和悬链线最重要的一些性质。下面给出其他一些曲线的性质。

卡西尼卵形线　卡西尼(Cassini)卵形线定义为所有点 P 的轨迹，这些点 P 与两个固定点 F_1 和 F_2 的距离 $r_1=|F_1P|$ 与 $r_2=|F_2P|$ 的乘积有常数值 a^2。如果这两个点 F_1 和 F_2 位于笛卡尔坐标系 x 轴上，与原点相距 $+e$ 和 $-e$，那末 $r_1^2=(x-e)^2+y^2$; $r_2^2=(x+e)^2+y^2$; $r_1^2r_2^2=a^4$ 或

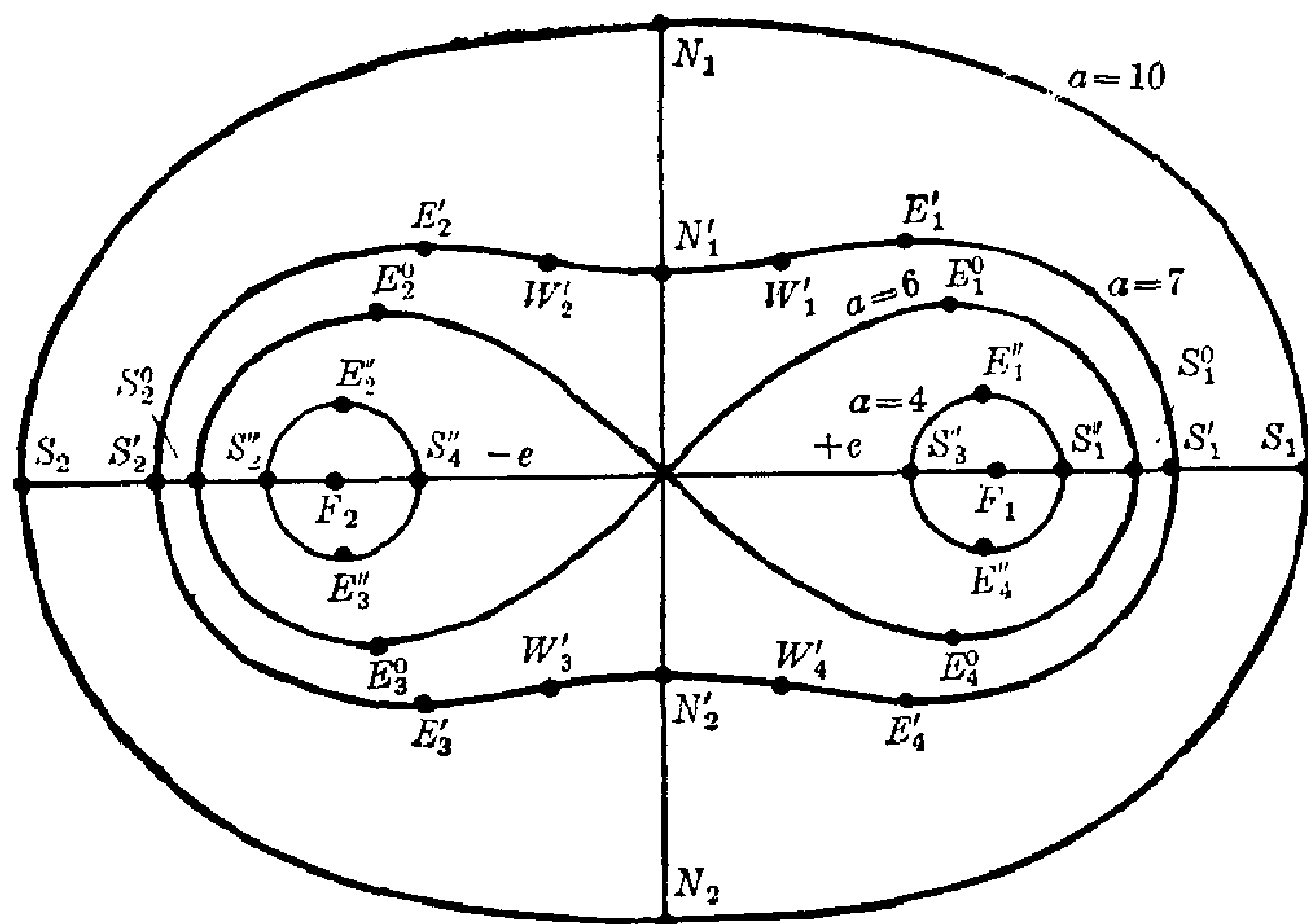


图 6.5-15 当 $e=6$, $a=10$, 7, 6 和 4 时
卡西尼卵形线; $e=a=6$ 即双纽线

$$(x^4+y^2)^2-2e^2(x^2-y^2)=a^4-e^4,\ r^4-2e^2r^2\cos 2\vartheta=a^4-e^4,$$
$$r^2=e^2\cos 2\vartheta\pm\sqrt{e^4\cos^2 2\vartheta+a^4-e^4}\ 。$$

按照两个常数 a 和 e 的比率得到不同形状的卡西尼卵形线(见图 6.5-15)。在下面的考察中用与 x 轴的交点 S_1, S_2, S_3, S_4, 与 y 轴的交点 N_1, N_2, 用极值点 E_1, E_2, E_3, E_4 以及用拐点 W_1, W_2, W_3, W_4 来表征它们。

1. $a>e\sqrt{2}$, 曲线就象椭圆。S_1, $S_2\equiv(\pm\sqrt{a^2+e^2},\ 0)$; N_1, $N_2\equiv(0,\ \pm\sqrt{a^2-e^2})$。当 $a=e\sqrt{2}$ 时曲线还象椭圆, S_1, $S_2\equiv(e\pm\sqrt{3},0)$; N_1, $N_2\equiv(0,\ \pm e)$, 但在 N_1 和 N_2 曲率为零。

2. $e<a<e\sqrt{2}$, 凹入卵形线。

$$S_1',\ S_2'\equiv(\pm\sqrt{a^2+e^2},\ 0);\quad N_1',\ N_2'\equiv(0,\ \pm\sqrt{a^2-e^2});$$
$$E_1',\ E_2',\ E_3',\ E_4'\equiv(\pm(1/2e)\sqrt{4e^4-a^4},\ \pm(a^2/2e));$$
$$W_1',\ W_2',\ W_3',\ W_4'\equiv(\pm\sqrt{(v-u)/2},\ \pm\sqrt{(u+v)/2}),$$

这里 $u=(a^4-e^4)/(3e^2)$ 和 $v=\sqrt{(a^4-e^4)/3}$。

3. $a<e$, 两个分离的卵形线。

$$S_1'',\ S_2''\equiv(\pm\sqrt{a^2+e^2},\ 0);\quad S_3'',\ S_4''\equiv(\pm\sqrt{e^2-a^2},\ 0);$$
$$E_1'',\ E_2'',\ E_3'',\ E_4''=(\pm(1/2e)\sqrt{4e^4-a^4},\ \pm(a^2/2e))。$$

4. $a=e$，双纽线。作为双纽线方程得到$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$或$r^2=2a^2\cos 2\vartheta$，$r=a\sqrt{2\cos 2\vartheta}$。于是给出参数表示为

$$x=a\cos\vartheta\sqrt{2\cos 2\vartheta},\qquad y=a\sin\vartheta\sqrt{2\cos 2\vartheta}。$$

由$\dfrac{dx}{d\vartheta}=-2a\cdot\sin 3\vartheta/\sqrt{2\cos 2\vartheta}$和$\dfrac{dy}{d\vartheta}=2a\cdot\cos 3\vartheta/\sqrt{2\cos 2\vartheta}$，得出$y'=\dfrac{dy}{dx}=-\cot 3\vartheta$。于是，当$3\vartheta=\pi/2$，$3\pi/2$，$5\pi/2$或者$\vartheta=\pi/6$，$\pi/2$，$5\pi/6$时可能出现极值。极值是

$$x_{1,2}=\pm(a/2)\sqrt{3},\qquad y_{1,2}=\pm a/2,\qquad r_{1,2}=a。$$

点(0, 0)是二重点。在(0, 0)的偏导数值是

$$f_x=4(x^3+xy^2-a^2x)=0;\qquad f_y=4(x^2y+y^3+a^2y)=0;$$

$$f_{xx}=4(3x^2+y^2-a^2)=-4a^2;\quad f_{xy}=8xy=0;$$

$$f_{yy}=4(x^2+3y^2+a^2)=4a^2;\qquad \Delta=+16a^4。$$

由$-a^2+y'^2a^2=0$推得$y'=+1$，所以$y=\pm x$是在点(0, 0)的切线。与x轴的交点是S_1^0，$S_2^0=(\pm a\sqrt{2},\ 0)$。由

$$A=\frac{1}{2}\int r^2(\vartheta)d\vartheta=a^2\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\cos 2\vartheta\,d\vartheta=\frac{a^2}{2}\sin 2\vartheta\Big|_{-\pi/4}^{+\pi/4}=a^2$$

给出一个环形的面积。

旋轮线　在力学上，旋轮线是作为点P的轨迹出现的，这个点P固定在半径为r的圆与中心M相距a处，而这个圆沿着一直线作无滑动的滚动，这时点P的轨迹就是一条旋轮线。如果让圆沿着笛卡尔坐标系的x轴滚动，其中横坐标从P处在最低点的位置量起，再用φ记旋转角，那末铺开的弧$|OB|=r\varphi$比P的横坐标大$a\sin\varphi$，r比P的纵坐标大$a\cos\varphi$(见图6.5-16)：

$$x=r\varphi-a\sin\varphi;\quad y=r-a\cos\varphi。$$

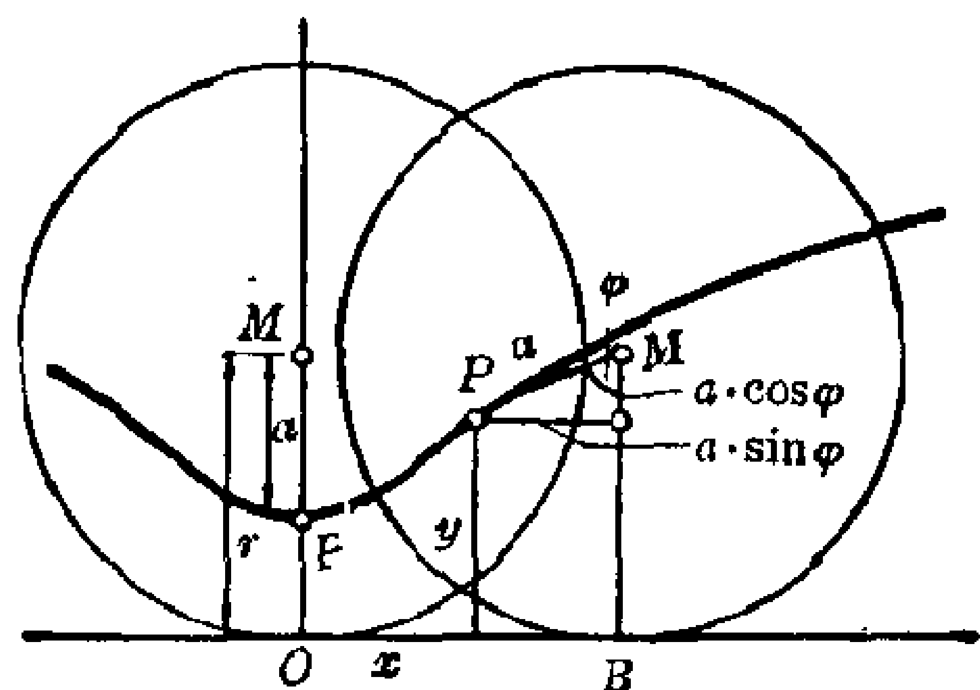


图6.5-16　旋轮线方程的导出

按照比率a/r分为内缩的$(a<r)$、外伸的$(a>r)$和常用的旋轮线$(a=r)$(见图6.5-17)。

内缩旋轮线当$\varphi=0, 2\pi, 4\pi, \cdots$时有极小值$y_m=r-a$；外伸旋轮线对于$x$的对应值有两点的横坐标相同。一点有极小值$y_m=r-a$。另一点的$\varphi$值由三角方程$r\varphi=a\sin\varphi$给定。常

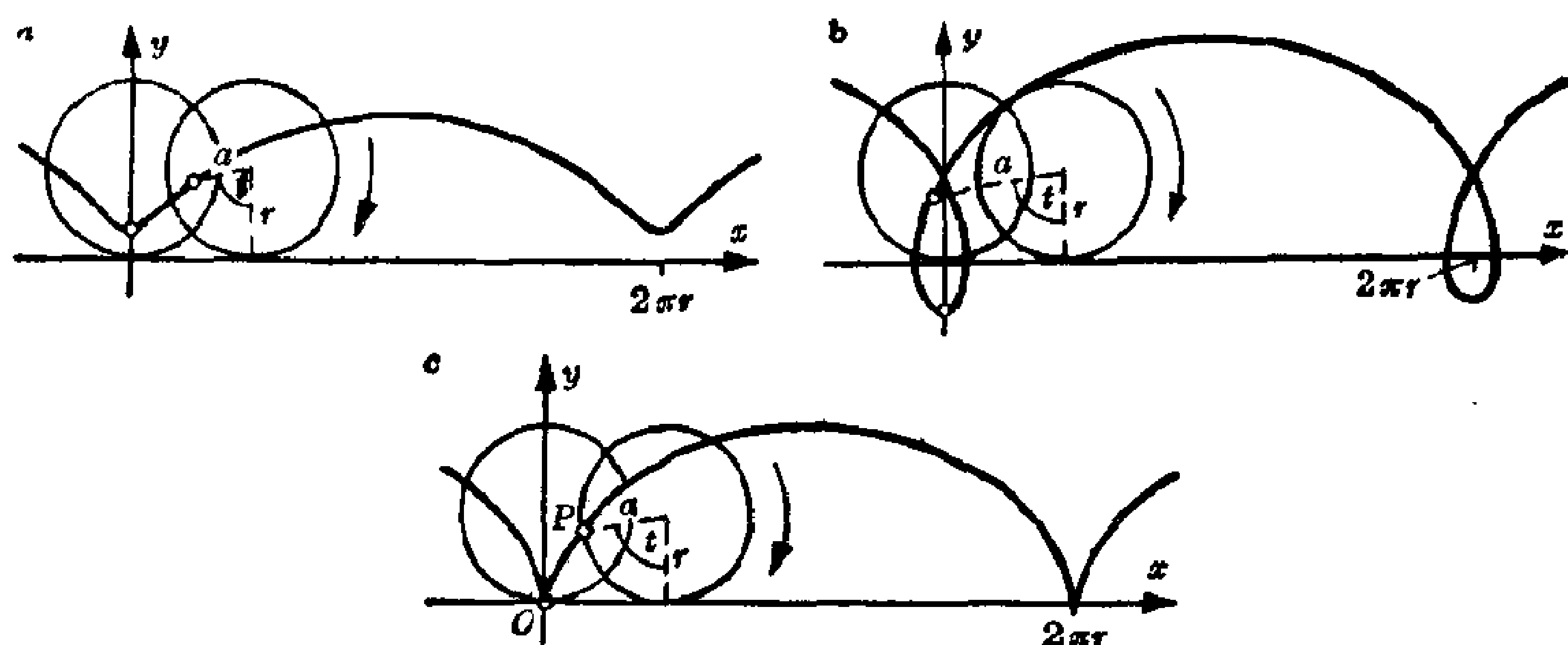


图 6.5-17 内缩、外伸和常用的旋轮线

用的旋轮线在这些地方有尖点。它的弧长元素是 $ds=2r\sin\varphi/2\,d\varphi$，于是完整的旋轮线拱形的长 s 是 $s=\int_{\varphi=0}^{2\pi}ds=8r$。在这个完整的拱形下的面积是

$$A=\int_{\varphi=0}^{2\pi}y\,dx=r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=2\pi r^2+0+\pi r^2=3\pi r^2,$$

因此等于滚动圆的面积三倍。

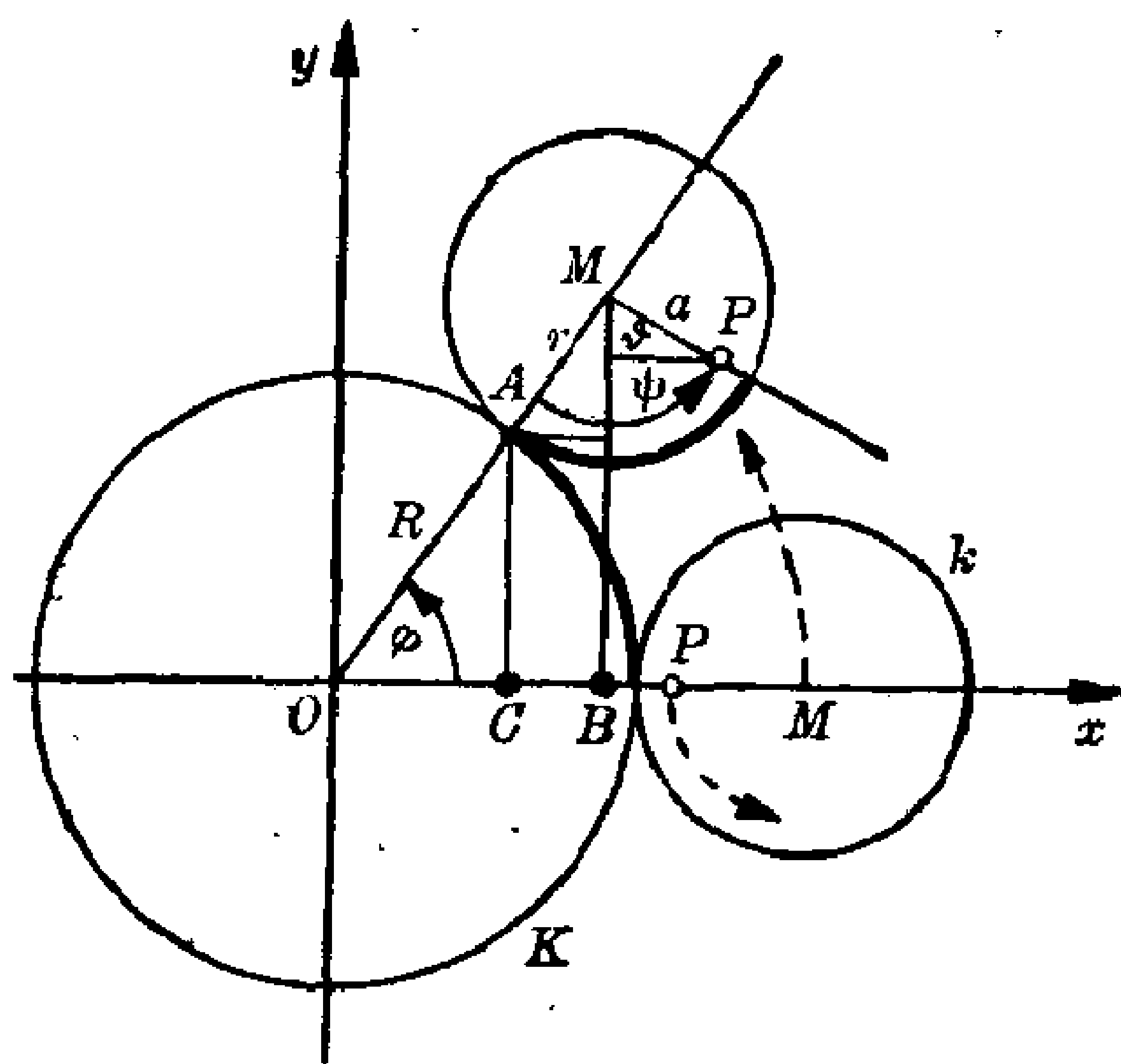


图 6.5-18 圆外旋轮线方程的导出

圆外旋轮线 圆外旋轮线在力学上作为点 P 的轨迹出现，这个点 P 固定在半径为 r 的圆 k 上，而这个圆 k 沿着半径为 R 的固定圆 K 的外侧滚动，这时点 P 的轨迹就是一条圆外旋轮线（见图 6.5-18）。按照点 P 与圆 k 的中心 M 距离 a，分为内缩的 $(a<r)$、外伸的 $(a>r)$ 和常用的圆外旋轮线 $(a=r)$。如果半径 $|OM|=R+r$ 转过一个角 φ，那末圆 k 转过一个角 ψ，这里 $\varphi R=\psi r$。从 M 到 x 轴的垂线 MB 从 ψ 切去角 $(\pi/2-\varphi)$，余下的角 ϑ 是 $\vartheta=\psi+\varphi-\pi/2=[(R+r)/r]\cdot\varphi-\pi/2$。给出 P 点的坐标为

$$x=(R+r)\cos\varphi-a\cos[\varphi\cdot(R+r)/r];$$
$$y=(R+r)\sin\varphi-a\sin[\varphi(R+r)/r]。$$

相应于关于直线的旋轮线种种曲线，关于固定圆 K 圆周的圆外旋轮线的

种种曲线也有尖点、环形或无二重点的极小值点。如果圆 K 的圆周 $2\pi R$ 是圆 k 的圆周 $2\pi r$ 的整数倍，那末曲线有 R/r 个拱形。如果 R/r 是一个有理数 p/q，那末因为 $qR=pr$，所以绕 K 盘旋 q 次之后 P 的位置重复。常用的圆外旋轮线**一拱的长度** l(见图 6.5-19)是 $l=8r(R+r)/R$; 圆 K 的圆周与一拱间的面积A是 $A=\pi(r^2/R)(3R+2r)$。

心脏线　当 $r=R$ 时得到心脏线，参数表示为 $x=R(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)$; $y=R(2\sin\varphi-\sin 2\varphi)$(见图 6.5-20)。消去 φ 得到代数方程

$$(x^2+y^2-R^2)=4R^2[(x-R)^2+y^2]。$$

曲线长 l 是 $l=8R$，它的面积是 $A=6\pi R^2$，即固定圆 K 面积的六倍。

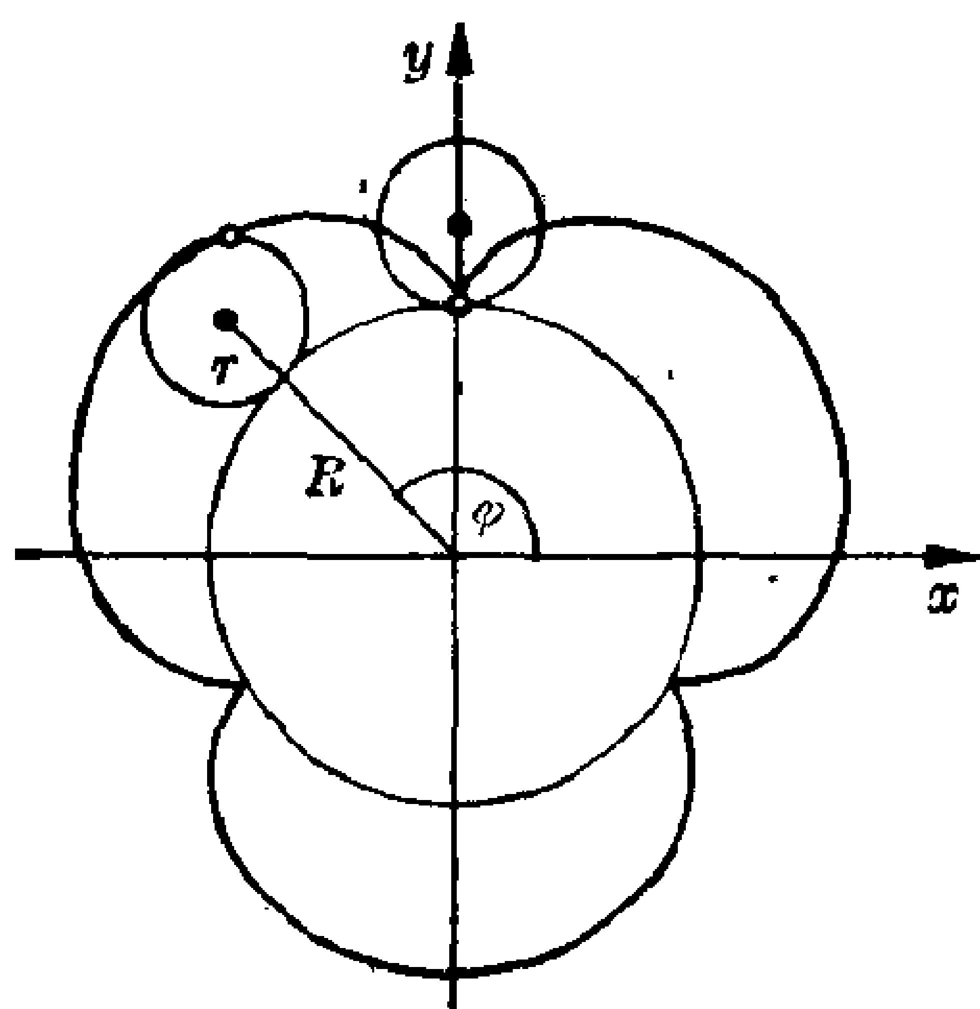


图 6.5-19　常用的圆外旋轮线; $R/r=3$

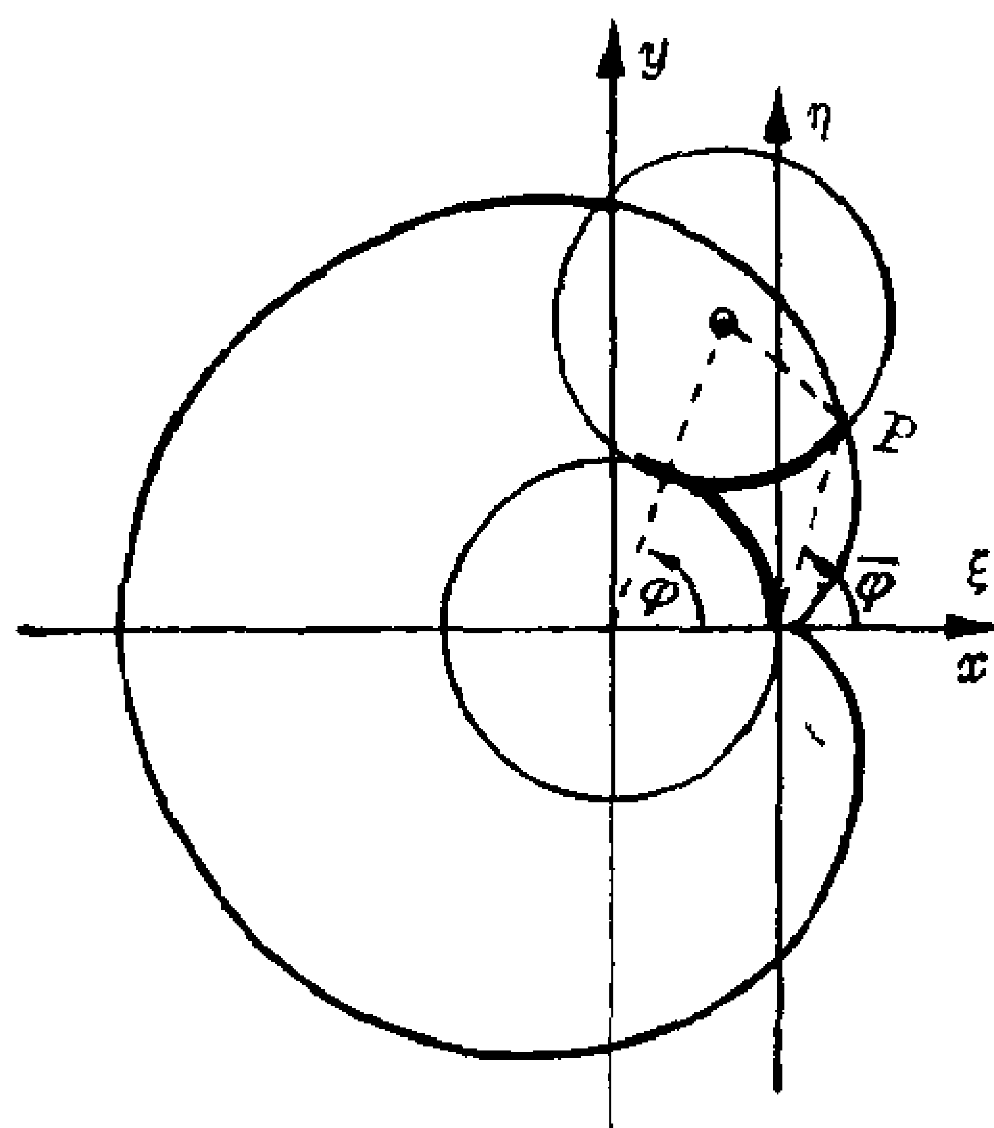


图 6.5-20　心脏线

在 ξ, η 坐标系中，心脏线方程变得特别简单: $\xi=x-R$, $\eta=y$，于是 $\xi=2R\cos\varphi(1-\cos\varphi)$, $\eta=2R\sin\varphi(1-\cos\varphi)$。采用极坐标 r, ϑ，其中 $r=2R(1-\cos\varphi)$从而 $\cos\vartheta=\xi/r=\cos\varphi$ 和 $\sin\vartheta=\eta/r=\sin\varphi$，心脏线的极坐标方程是 $r=2R(1-\cos\vartheta)$。

圆内旋轮线　相对于圆外旋轮线，当圆 k 沿着固定圆 K 的内侧滚动时，在力学上就出现一条圆内旋轮线。可以将动圆 k 想象为关于切线旋转。线段 r 和 a 连同旋转角 ψ 一起改变它们的符号。参数表示取如下形式:

$$x=(R-r)\cos\varphi+a\cos[\varphi(R-r)/r];$$
$$y=(R-r)\sin\varphi-a\sin[\varphi(R-r)/r]。$$

在内缩的圆内旋轮线中 $a<r$，在外伸的圆内旋轮线中（见图 6.5-21)

$a>r$，而在常用的圆内旋轮线中 $a=r$。相应的曲线有圆化的尖点（相对于固定圆的极小值）、环形或尖点。

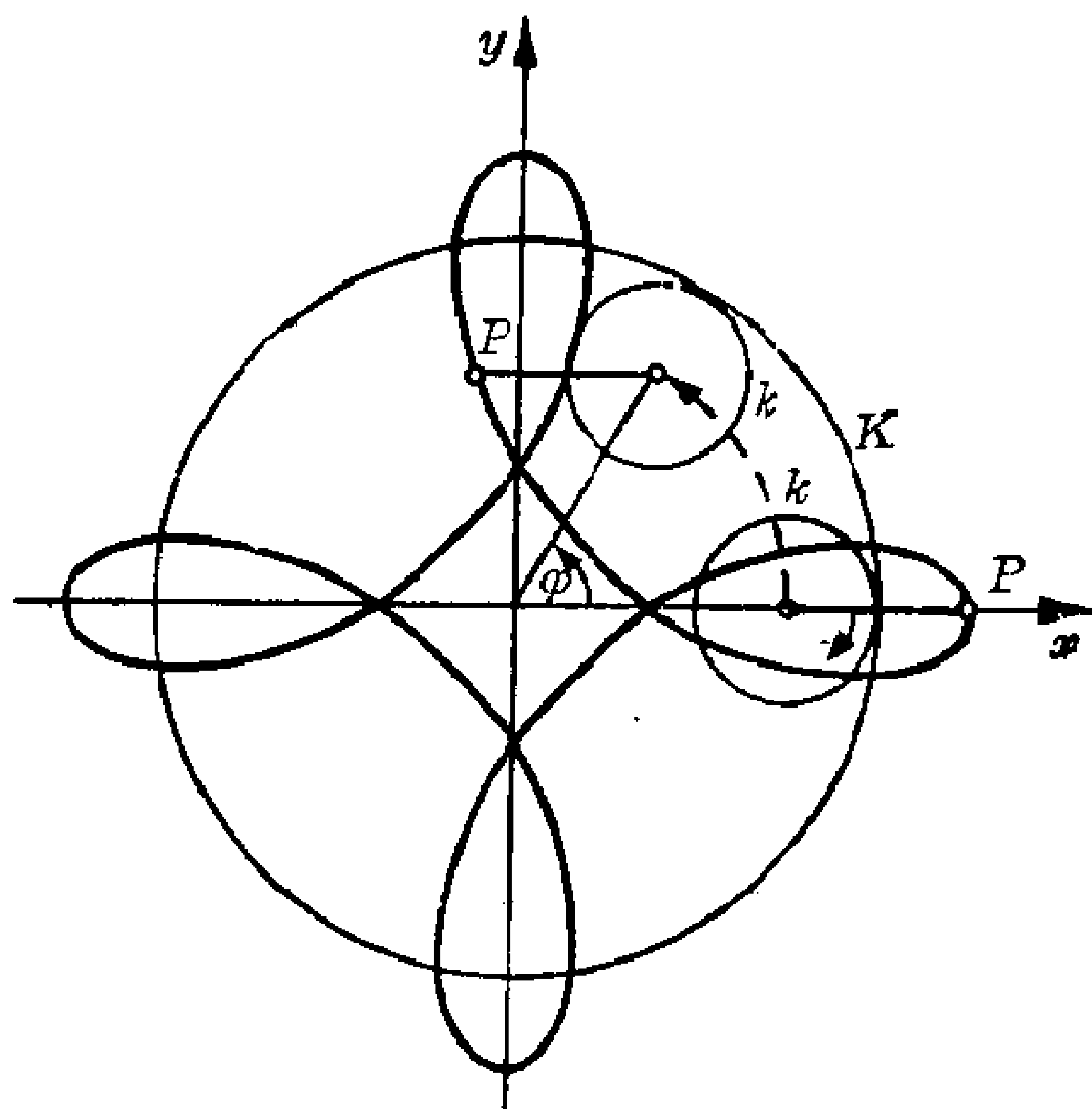


图 6.5-21 外伸的圆内旋轮线

圆内旋轮线的形状取决于比率 R/r。如果它是一个整数，那末动圆绕固定圆旋转一圈之后曲线闭合起来。如果它不是整数，而是有理数，$R/r=m/n$（m 和 n 没有公共因子），那末绕 n 圈之后曲线才闭合起来。至于比率 R/r 为无理数时，曲线不闭合。如果 R/r 是一个整数，那末常用的圆内旋轮线有长 $l=8(R-r)$，而在一个完整的拱形与固定圆 K 间的面积 A 是

$$A=\pi(r^2/R)\cdot(3R-2r)。$$

星形线或星状曲线是当 $4r=R$ 时的常用的圆内旋轮线，因此它的参数表示是 $x=4r\cos^3\varphi=R\cos^3\varphi$, $y=4r\sin^3\varphi=R\sin^3\varphi$，因为

$$\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi \quad 和 \quad \cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi。$$

在笛卡尔坐标系中得到方程 $x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}$（见图 6.5-22）。

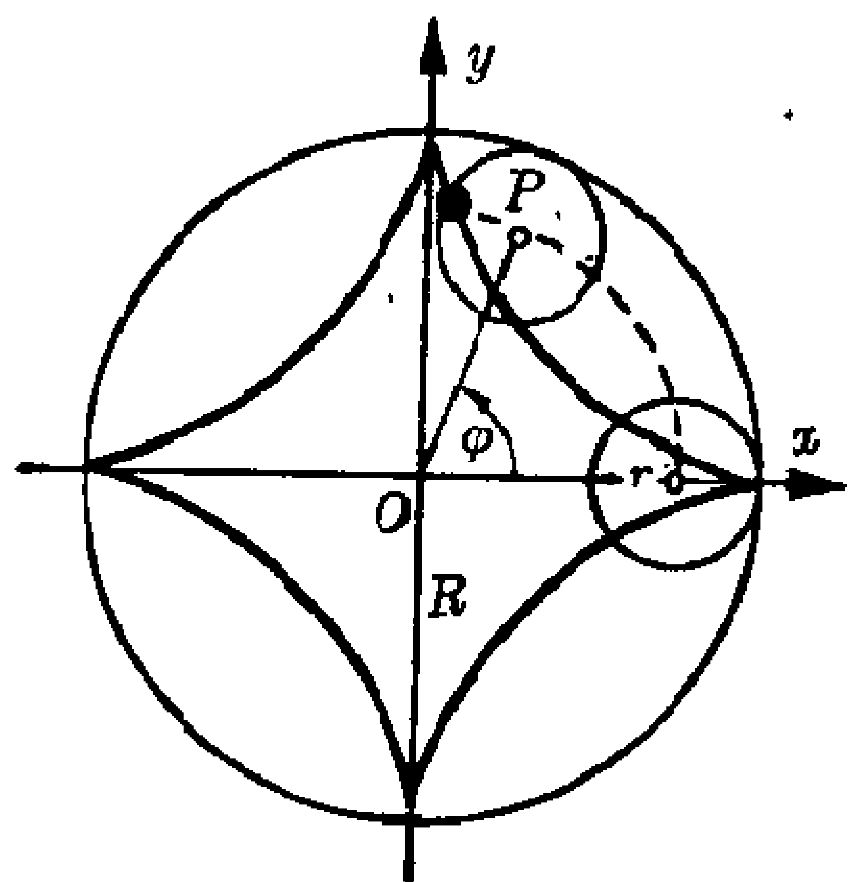


图 6.5-22 星形线

曳物线 一根长为 a 的不可伸缩的线的一个端点 P 有重物，如果此线的另一端点 K 沿着 x 轴移动，那末重点 P 描绘一条曳物线（见图 6.5-23）。于是，这根线顺着曲线的切线方向伸张，所以

$$\frac{dy}{dx}=\mp y/\sqrt{a^2-y^2}。$$

积分之给出方程

$$x=a\ln|[a\pm\sqrt{a^2-y^2}]/y|\mp\sqrt{a^2-y^2}$$
$$=\cosh^{-1}(a/y)\mp\sqrt{a^2-y^2}。$$

点 A 是一个尖点。从 A 量起弧长 l 是 $l=a\ln(a/y)$。

蔓叶线 令一个圆分别与两条相距 a 的平行线切触。过一个切点 O

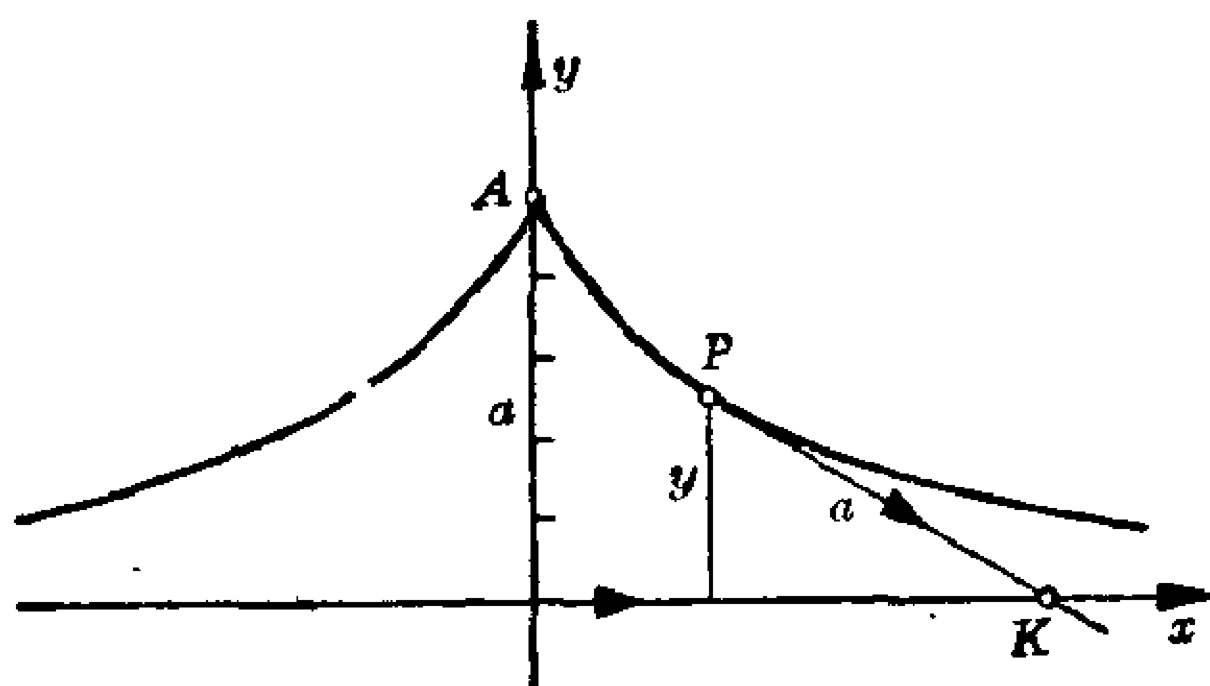


图 6.5-23　曳物线，$a=5$

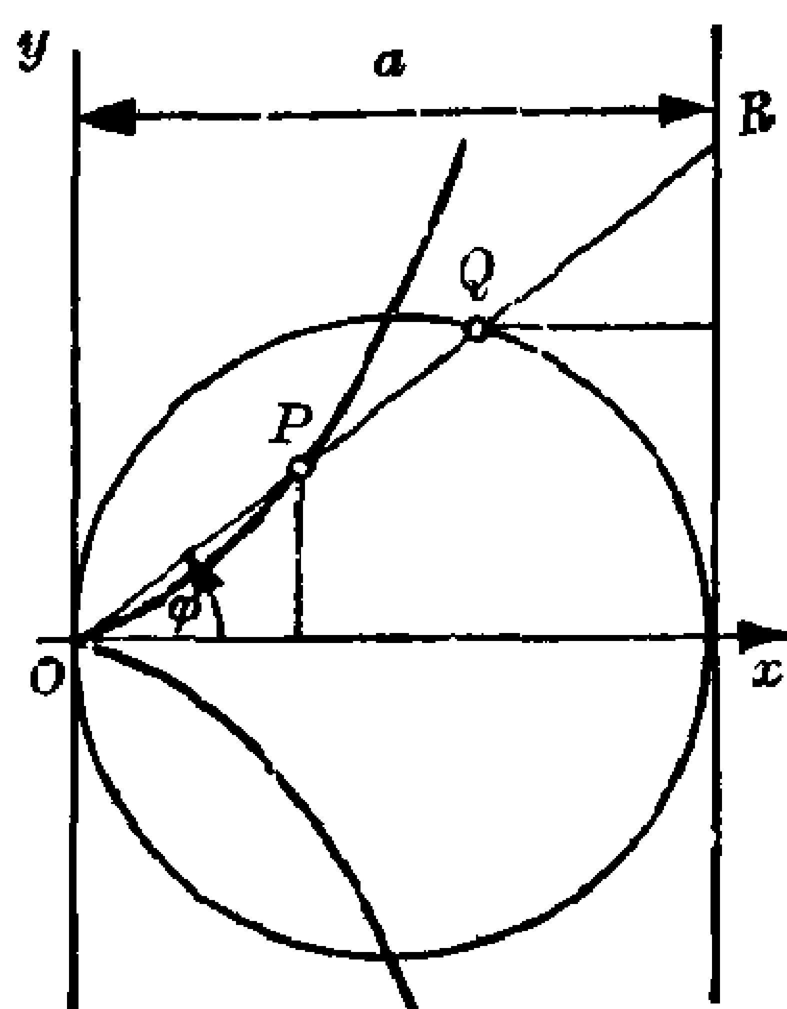


图 6.5-24　蔓叶线

的割线上，圆和另一条平行线截得线段 $|QR|$。然后在割线上作出点 P，使得 $|OP|=|QR|$。蔓叶线就是在过 O 的各条割线上以这样的方式构造的所有点 P 的几何轨迹(见图 6.5-24)。图中引进笛卡尔坐标系，割线与 x 轴的夹角为 φ；用 $m=\tan\varphi$ 作为参数。点 R 有坐标 $x_1=a$ 和 $y_1=am$；由

$$(x-r)^2+m^2x^2=r^2$$

得到 Q 的坐标为

$$x_2=a/(1+m^2),\ y_2-am/(1+m^2)。$$

于是，P 的坐标给出为

$$x=x_1-x_2=am^2/(1+m^2),$$

$$y=y_1-y_2=am^3/(1+m^2)。$$

借助于 $m^2=x/(a-x)$ 和 $1+m^2=a/(a-x)$，可以消去参数，得到

$$y^2=x^3/(a-x)。$$

在极坐标中，此为

$$r^2=x^2+y^2=a^2m^4/(1+m^2)$$

或　　$r=a\sin^2\varphi/\cos\varphi$。

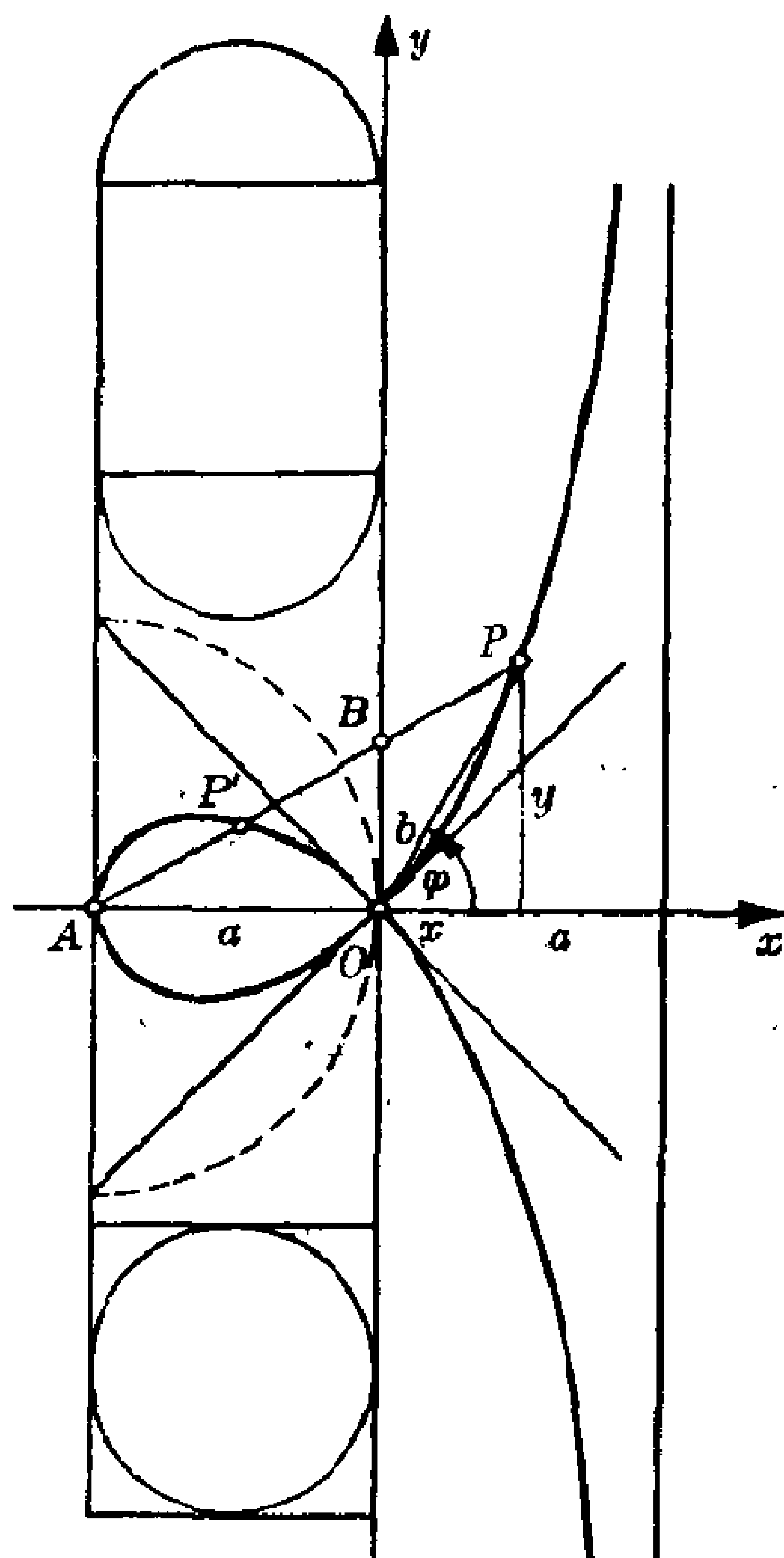


图 6 5-25　环索线

点 O 是一个尖点而平行线 $x=a$ 是蔓叶线的渐近线。这曲线与渐近线之间的面积是 $A=3\pi a^2/4$，因此是所给

的半径为 $a/2$ 的圆面积三倍。

环索线 在一个笛卡尔坐标系中，点 $A(-a, 0)$是直线束的顶点。如果线束的一条直线与 y 轴相交于点 $B(0, b)$，那末这条直线上的点 P 和 P' 就是环索线的两个点，这里$|BP|=|BP'|=|OB|$（见图 6.5-25）。由直线方程 $y=(b/a)x+b$ 和距离条件 $(y-b)^2+x^2=b^2$ 消去 b；由 $b=ya/(a+x)$得到 $y^2/x^2=(a+x)/(a-x)$。由此得出

$$|AP'|=(a-x)\sqrt{1+b^2/a^2},\quad |AP|=(a+x)\sqrt{1+b^2/a^2},$$

又因为 $OB\perp AO$，所以正割一正切定理给出$|AP|\cdot|AP'|=a^2$。在半径倒数的变换下环索线的一对点彼此相通。如果 φ 是 $+x$ 轴与直线 OP 之间的夹角，那末用 $m=\tan\varphi=y/x$ 作为参数。环索线方程给出

$$m^2=(a+x)/(a-x) \quad 或 \quad x=a\cdot(m^2-1)/(m^2+1),$$

$$y=am\cdot(m^2-1)/(m^2+1)。$$

而极坐标方程得出:

$$r^2=x^2+y^2=a^2\cdot(m^2-1)^2/(m^2+1) \quad 或 \quad r=-a\cos 2\varphi/\cos\varphi。$$

点(0, 0)是二重点，有切线 $y=\pm x$。直线 $x=a$ 是一条渐近线。环形的一半面积是 $A'=a^2-\pi a^2/4$，曲线与渐近线之间的一半面积是 $A=a^2+\pi a^2/4$。

直线的蚌线 笛卡尔坐标系内过原点 O 的直线与平行于 y 轴的直线 $x=a$ 相交于点 Q。在 OP 上的两点 P 和 P'，它们分别在 Q 的两旁且与 Q

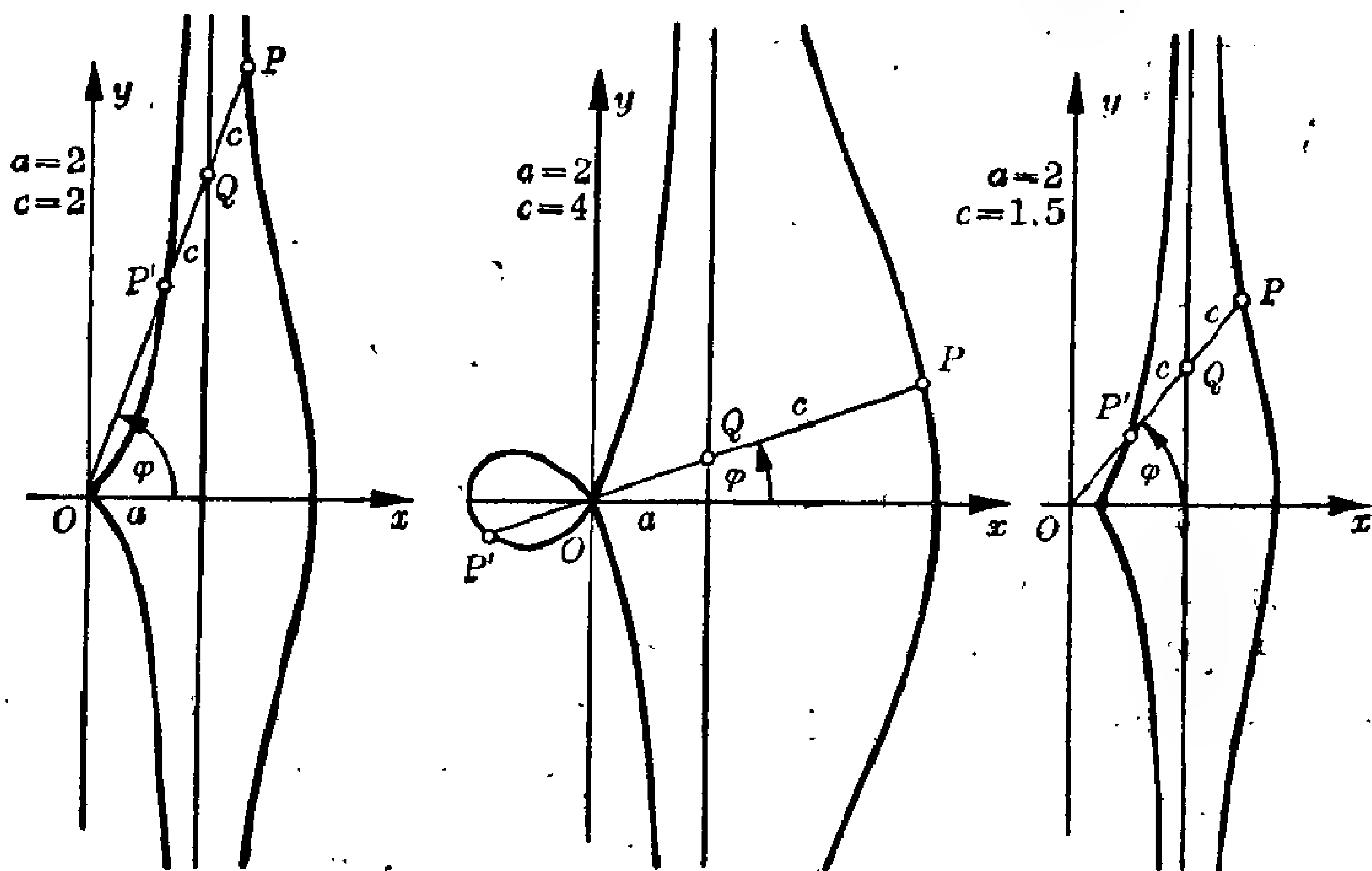


图 6.5-26 蚌线: a) $a=2$, $c=2$; b) $a=2$, $c=4$; c) $a=2$, $c=1.5$

相距一个常数值 c，这两个点就是蚌线上的点。蚌线由以这种方式确定的所有点对 P 和 P' 组成。

蚌线的形状取决于线段 a 和 c 的比率(见图 6.5-26)。当 $c=a$ 时，O 是一个尖点；当 $c>a$ 时它是一个二重点。平行线 $x=a$ 总是两个分支的渐近线。如果 φ 是直线 OP 与 x 轴之间的夹角，那末直线 OP 与平行线的交点 Q 距 O 为 $r_Q=a/\cos\varphi$。因此曲线的极坐标方程是 $r=a/\cos\varphi\pm c$。由此推得 $x=r\cos\varphi=a\pm c\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi=a\tan\varphi\pm c\sin\varphi$。消去三角函数，得到一个 4 次代数方程：由

$$(x-a)^2=c^2\cos^2\varphi \text{ 和 } (x^2+y^2)=a^2/\cos^2\varphi\pm 2ac/\cos\varphi+c^2$$

得出 $(x-a)^2(x^2+y^2)=c^2(a\pm c\cos\varphi)^2=c^2x^2$。

螺线　螺线这个术语表示这样一些曲线，其矢径 r 是极角 φ 的单值函数 $r=f(\varphi)$，这里 φ 为从 0，或从 $-\infty$ 到 $+\infty$，而 $r(\varphi)$ 与 $r(\varphi+2\pi)$ 不同。例如，$r=a\varphi$ 或 $r=ae^{k\varphi}$。

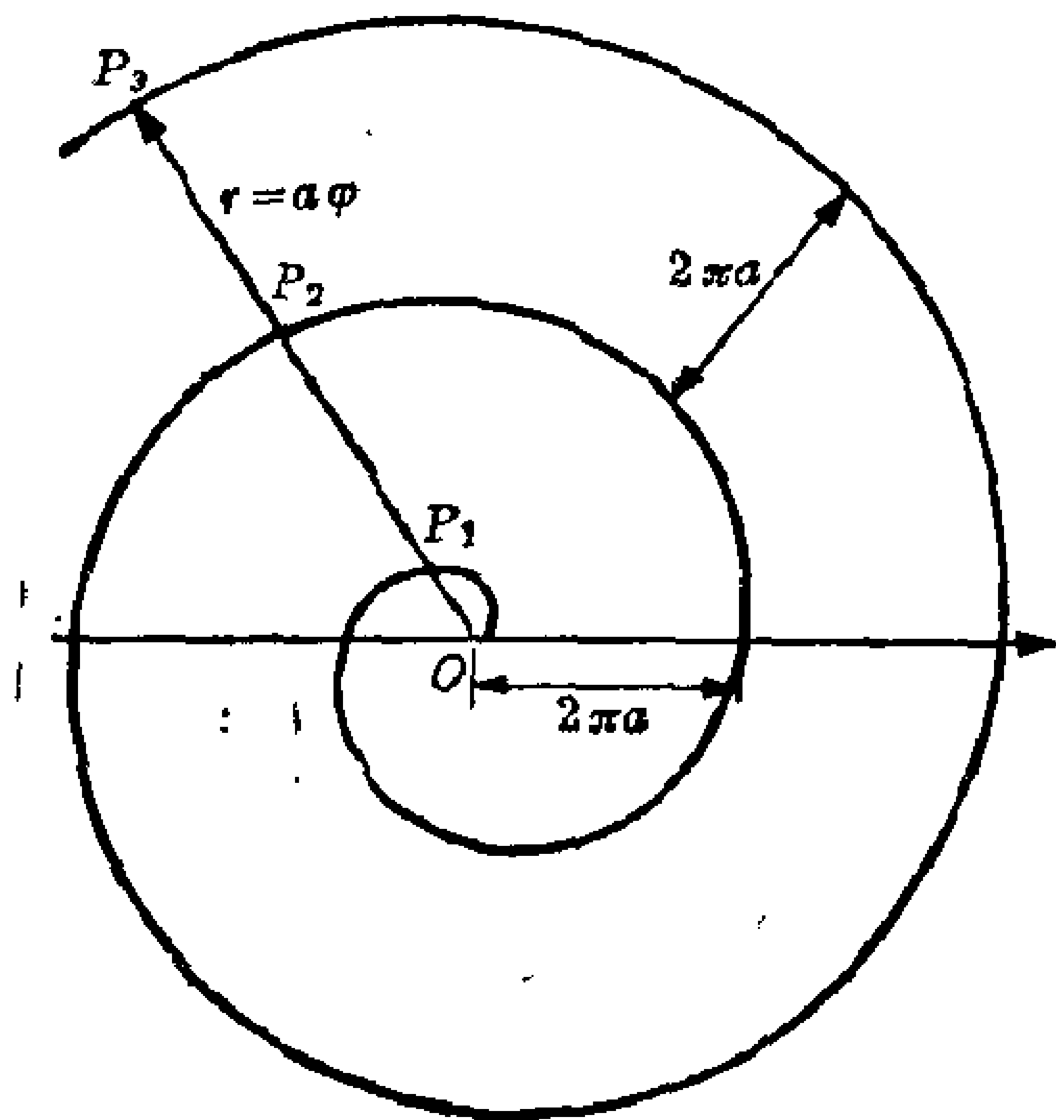


图 6.5-27　阿基米德螺线，$a=2$

阿基米德螺线　在极坐标中这条螺线(见图 6.5-27)具有方程 $r=a\varphi$。同一个矢径上的点 P_1, P_2, …分别隔开一个常距离 $2\pi a$，因为 $r_2=a(\varphi+2\pi)=a\varphi+2\pi a=r_1+2\pi a$。弧长元素 ds 有值

$$ds=a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi;$$

因而弧长为

$$s=a\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi=(a/2)\left(\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2}+\sinh^{-1}\varphi_1\right)。$$

对于大的 φ_1 值，有近似式 $s\approx(a/2)\varphi_1^2$。两个矢径 $r_1=a\varphi_1$ 和 $r_2=a\varphi_2$ 之间的扇形面积是 $A=(a^2/6)(\varphi_2^3-\varphi_1^3)$。

对数螺线　在极坐标中，这条螺线具有方程 $r=ae^{k\varphi}$, $k>0$。对于 φ 的负值而言，曲线随着递减的矢径而绕着极点 O 卷拢，越来越靠近它：这是一个渐近点。极坐标下函数的微分表明：过极点 O 的每一条直线以相同的角 $\tau_0=\operatorname{arc}\cot k$ 与对数螺线相交(见图 6.5-28)，从而在这些交点的切线彼此平行。此外还证明

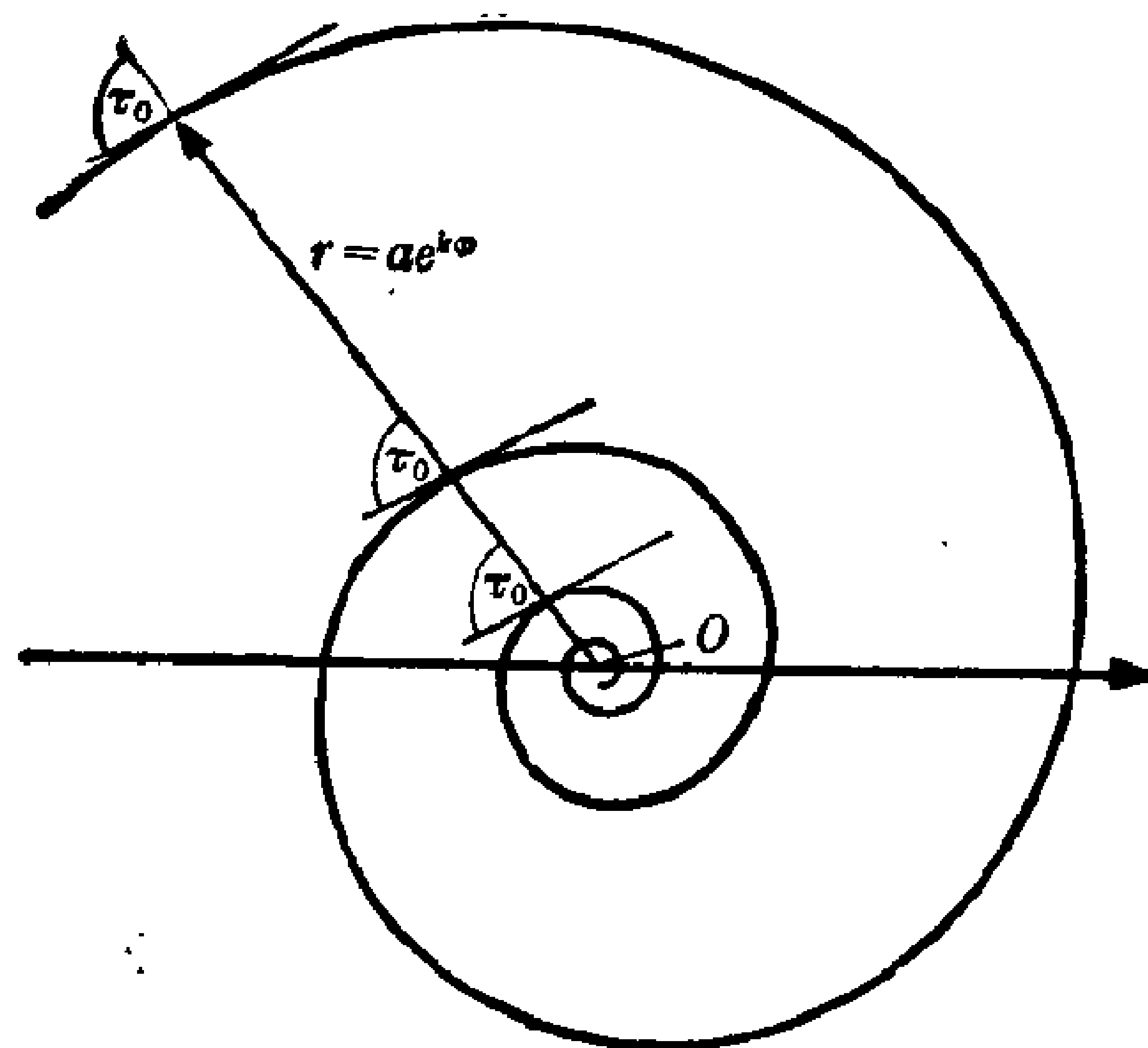


图 6.5-28 对数螺线

$$\frac{dr}{d\varphi}=r'=r/\tan\tau=rk \quad 或 \quad d\varphi=\frac{dr}{rk}.$$

利用在 **II**. 第 7 章导出的一个关系，弧长 s 可以计算：

$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi=\sqrt{r^2+r^2k^2}\,d\varphi$$

$$=r\sqrt{1+k^2}\,d\varphi=(1/k)\sqrt{1+k^2}\,dr,$$

或者

$$s=(1/k)\sqrt{1+k^2}\,(r_2-r_1).$$

第7章 积 分 学

微分学的任务是研究函数导数的性质，它给出一种极限表示，例如，在函数的图形上一点的切线斜率。在一点的这个导数值仅仅取决于在任意小的一个邻域内函数的值，亦即仅仅依赖于函数的*局部性质*。严格地定义和计算由闭曲线所围的区域的面积，或者严格地定义和计算由闭曲面所围的区域的体积的问题，导致一种完全不同类型的极限过程的讨论，它们就是所谓*积分学*的研究对象(积分这个词的原意是整体的意思)。当给定的平面或立体区域由可用初等方法计算其面积或体积的区域越来越紧密地逼近时，就引出这样的极限过程。如果说*切线问题*归于一种局部性质的话，那末*面积或体积问题*要求有关边界曲线或曲面的整体知识。

7.1 定积分

阿基米德(公元前 287～212 年)早已成功地证明抛物线弓形 ASB 的面积是三角形 ABC 面积的(4/3)倍(见图 7.1-1)。因为古希腊数学家是用几何方法来计算面积的，它们的目标在将给定的区域转换成为面积

相等的一个正方形，所以称做*求积问题*，而17世纪的*穷竭法*是指所要求面积或体积的区域可被一系列已知其面积或体积的区域穷尽。借助于区域分成较小部分的适当分解，开普勒(1571～1630年)得到了酒桶的容积公式，卡瓦列利(Cavalieri, 1598～1647年)提出了比较原理用来判定位于平行平面之间的两个物体什么时候具有相同的体积(见I. 第8章)。法国的笛卡尔(1596～1656年)、费尔马(1601～1665年)和帕斯卡(Pascal, 1623～1662年)、瑞士的居尔丁(Guldin, 1577～1643年)，英国的沃利斯(Wallis, 1616～1703年)等人有进一步的研究。在这些初步工作的基础上，莱布尼茨(1646～1716年)和牛顿(1643～1727年)几乎同时独立地为计算面积和体积创造了一种十分灵巧的演算方法。他们还发现，尽管切线问题和求积问题所包含的是不同的极限过程，但它们之间存在一种紧密的联系。如果将定积分看作积分上限的函数，那末它的导数等于被积函数。积分的标准记号，归于莱布尼茨，它符合微积分基本定理这个众所周知的重要事实。

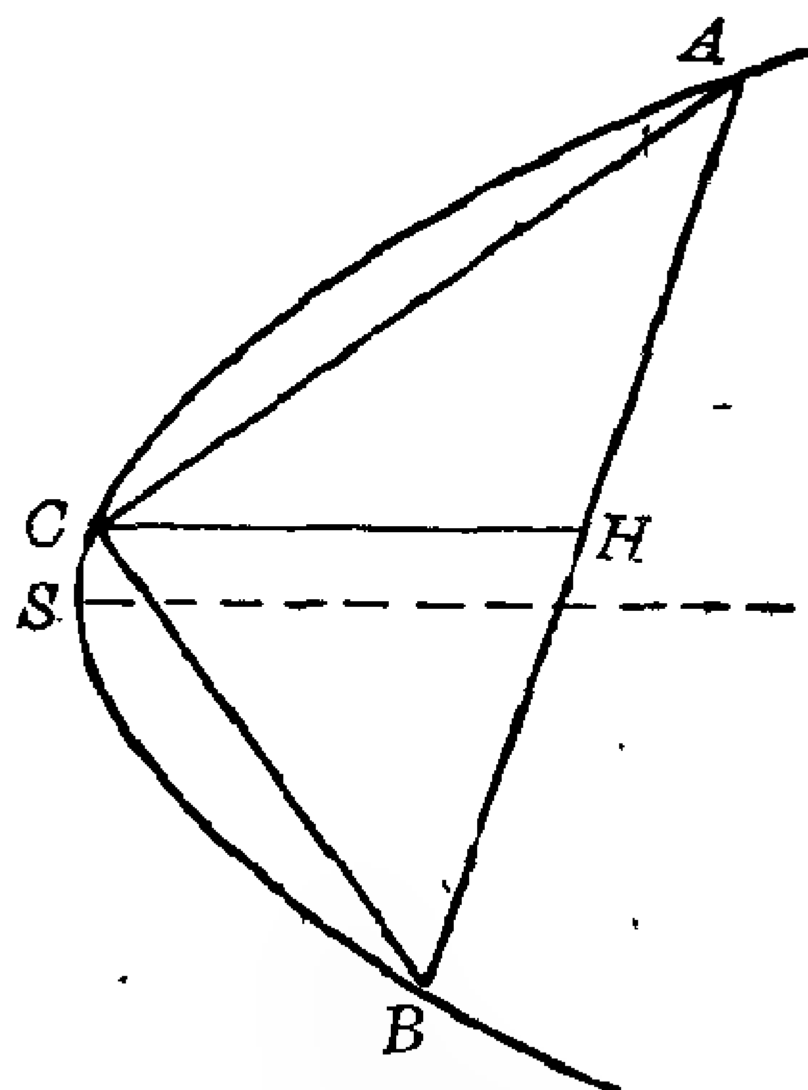


图7.1-1 抛物线弓形的求积

与计算面积问题并列着的第二个问题，是找一个函数，它在一定区间中的导数等于另一个给定的函数。积分学发展了处理这些似乎各不相同的问题和研究积分性质的一般方法。积分学和微分学一起构成了整个高等分析的基础，并且是现代科学技术不可缺少的工具。

求积问题启示一种直观的定义方法，将定积分定义为由函数 $y=f(x)$ 在纵坐标 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一段曲线，横坐标轴从 $x=a$ 到 $x=b$ 的部分以及两条直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围的区域面积 F_a^b(见图7.1-2)。这里假定曲线是某个连续函数的图形，并且它的所有纵坐标是正的(即曲线位于 x 轴的上方)。

面积 F_a^b 可以用一系列适当的图形从下和从上来逼近，例如用*阶梯多边形*逼近，它们或者被包含在给定的区域内，或者包含给定的区域(见图7.1-3)。这些面积作为矩形面积的和可以用初等运算得到。直观上很清楚，随着步长缩小，对 F_a^b 的逼近将改善，所以由内接的和外接的阶梯多边形面积形成的序列将趋于公共的极限。将这个极限定义为面积 F_a^b，这个

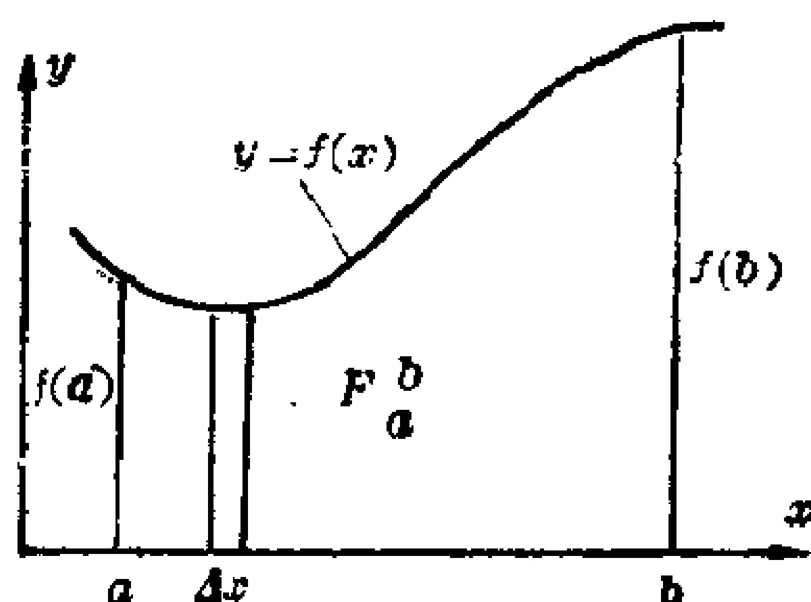


图 7.1-2　在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间，曲线 $y=f(x)$ 以下的面积

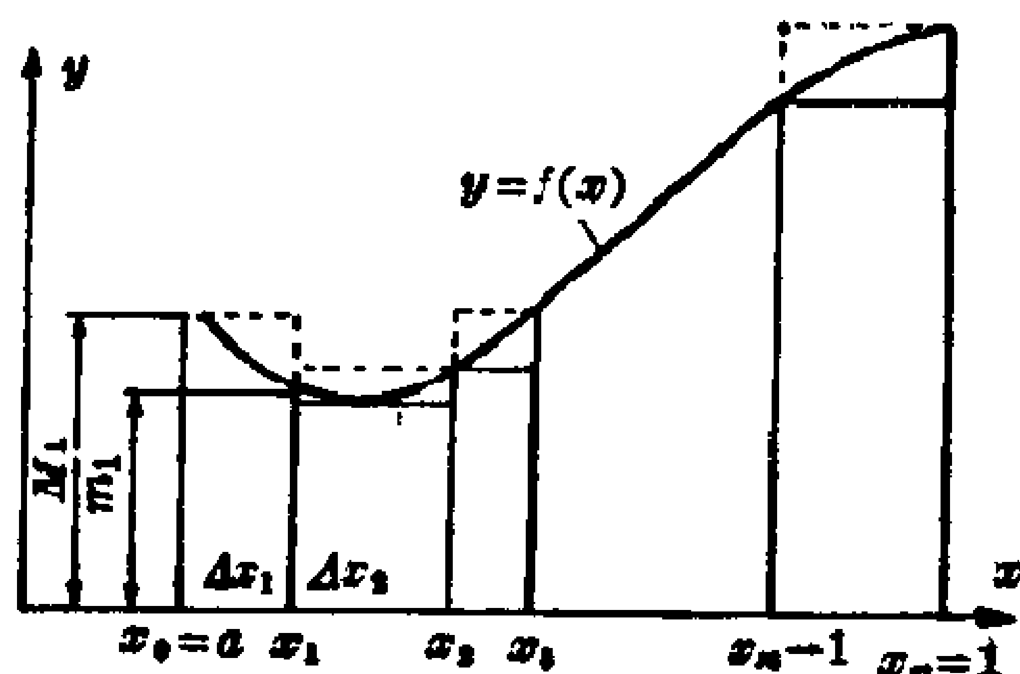


图 7.1-3　上和与下和

极限(假定它存在)记为 $\int_a^b f(x)dx$ (读成: $f(x)$ 从 a 到 b 的积分)，称做定积分。

定积分作为一个极限

上和与下和的极限　将从 a 到 b 的区间划分成 n 个子区间 Δx_i, $i=1, \cdots, n$, 例如划分成 n 个相等区间 Δx, 使 $n\Delta x=b-a$; 为了简单起见，区间和它的长度都记为 Δx。任意两个相邻分点的纵坐标围成宽为 Δx 的一条狭带。如果在第 i 个区间中作为高选取最小的纵坐标 m_i 和最大的纵坐标 M_i, 再将这条狭带的面积与相应矩形的面积 $m_i\Delta x$, $M_i\Delta x$ 作比较，那末和 $\sum m_i\Delta x$ 比所要求的面积小，而和 $\sum M_i\Delta x$ 比所要求的面积大。它们就称做上和与下和(见图 7.1-3)。如果由再分子区间来加细分法，那末新的最小纵坐标将至少和原先的 m_i 一样大，新的最大纵坐标不会大于原先的 M_i。于是下和增大但依然小于 F_a^b; 上和减少但依然大于 F_a^b。下和成为一个单调增加的有界序列，上和成为一个单调减少的有界序列，因此两者都有极限。如果这些极限等同，即若 $\Delta x\to 0$ 从而 $n\to\infty$ 时，它们的差列 $\sum(M_i-m_i)\Delta x$ 趋于零，则(仅当此时)积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在。对于连续函数这总是可能的。

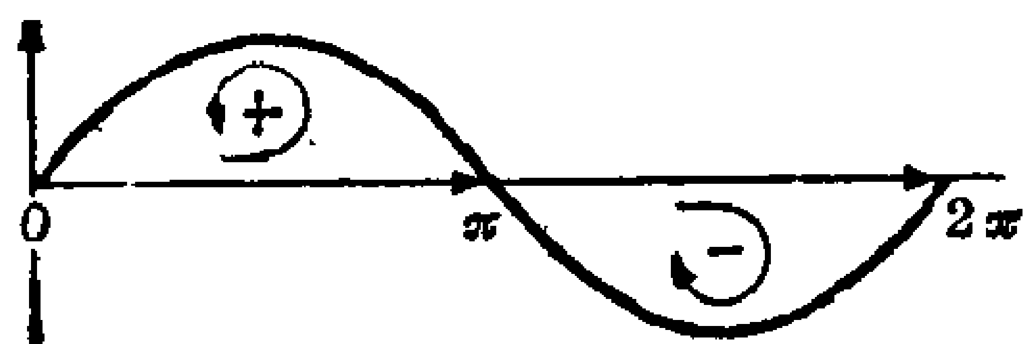


图 7.1-4　作为面积，积分 $I=\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=0$

原先假定曲线位于 x 轴的上方，或者函数只有正值，这种假定并不是必要的。在 x 轴下方的曲线部分，其有向面积取负值，因为在和式的相应

部分中纵坐标是负的，而区间 Δx_i 仍是正的。根据从 0 到 2π 正弦函数的积分例子，图 7.1-4 所示面积可能有值为零。随着 x 增加的方向沿 x 轴走，正的面积位于左边而负的面积位于右边——这与平面几何中的有向面积定义相一致。

定积分的解析定义 定积分作为面积的几何意义不讲也行。设 $f(x)$ 是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的有界函数；由分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将这个区间划分成长为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 的 n 个子区间 $(i=1, 2, \cdots, n)$。因为有界函数在一个区间中不一定有最大值或最小值，所以用 G_i，即函数在这个子区间的最小上界（上确界）构成上和，用 g_i，即最大下界（下确界）构成下和。如果当 $n\to\infty$ 时，随着最大区间长度 Δx_i 趋于零，差 $\Sigma(G_i-g_i)\Delta x_i$ 趋于零，那末上和与下和两者趋于同一个极限。于是，每一个序列 $F_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 其中 ξ_i 是子区间 Δx_i 的任意一点，也趋于这个极限。

如果和 $F_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在 $\lim\limits_{n\to\infty;\ \Delta x_i\to 0} F_n=\mathrm{I}$，并且它与分点 x_i 和中间点 ξ_i 的选取无关，那末称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积而这个极限 I 就称做 $f(x)$ 从 $x=a$ 到 $x=b$ 的定积分 $\int_a^b f(x)dx$。

这个积分概念可追溯到 B. 黎曼 (Bernhard Riemann, 1826～1866 年)，勒贝格 (Lebesgue) 积分是这个概念的一种现代拓广。函数 $f(x)$ 称为*被积函数*，而 x 称为*积分变元*；a 和 b 是*积分下限*和*上限*。给定的被积函数 f，其积分值 I 并不依赖于积分变元的所给名称。

在界限 $x=a$ 和 $x=b$ 之间 $f(x)$ 的定积分	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$

如果被积函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续，那末积分一定存在。 **每一个连续函数可积。**

如果函数在区间 $[a, b]$ 上有有限个不连续点，但有界，那末所有这些论证仍然正确（见图 7.1-6）。

$[a, b]$ 上每一个只有有限个不连续点的有界函数可积。

更复杂的函数，例如在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上，对有理的 x 取值为 1，对无理的 x 取值为 0 的函数将在测度论中讨论（见 **II.** 第 22 章）。

【例】 为了计算在 $x=0$ 和 $x=a$ 之间，抛物线 $y=x^2$ 下的面积，将区间$[0, a]$划分成长为 $h=a/n$ 的 n 等份(见图 7.1-5)。子区间的 n 个左端点是 $x_0=0$, $x_1=h$, $\cdots$, $x_{n-1}=(n-1)h$, n 个右端点是 $x_1=h$, $x_2=2h$, $\cdots$, $x_n=nh=a$。因为在$[0, a]$上函数 $y=x^2$ 是单调增加，所以下和 $\underline{F}_n$ 与上和 $\overline{F}_n$ 为

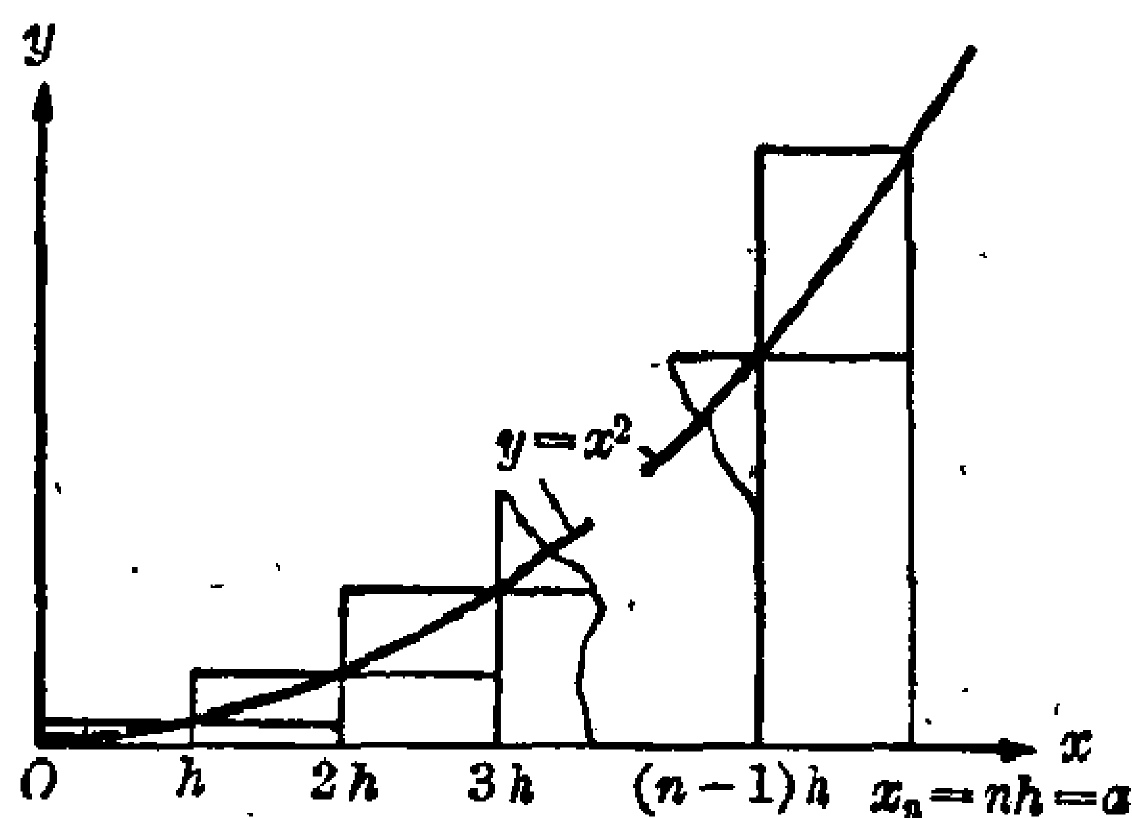


图 7.1-5　抛物线 $y=x^2$ 下的面积

$$\underline{F}_n=0+1^2h^2\cdot h+2^2h^2\cdot h+\cdots+(n-1)^2h^2\cdot h$$
$$=h^3\cdot[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$$
$$=h^3\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\underline{F}_n=\frac{1}{6}a^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$\overline{F}_n=1^2h^2\cdot h+2^2h^2h+\cdots+n^2h^2h=h^3[1^2+2^2+\cdots+n^2]$$
$$=h^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\overline{F}_n=\frac{1}{6}a^3\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时这两个序列有相同的极限

$$F=\frac{1}{3}a^3,$$

所以在 $x=0$ 和 $x=a$ 之间抛物线下的面积是 $1/3a^3$。当 $a=b$ 及 $F=72$ 时，下面的表说明上和与下和是怎样随着 n 变化的。

n	h	$\underline{F}_n$	$\overline{F}_n$
6	1	55	91
12	1/2	$63\,^1/_4$	$81\,^1/_4$
24	1/4	$67\,^9/_{16}$	$76\,^9/_{16}$
48	1/8	$69\,^{49}/_{64}$	$74\,^{17}/_{64}$
96	1/16	$70\,^{225}/_{256}$	$73\,^{33}/_{256}$

定积分的性质

如果交换积分限的位置，那就改变了积分的方向；作为有向线段，因子 Δx_i 改变符号，从而和 $F_n=\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i$ 以及积分全都变号，因为纵坐标 $f(\xi_i)$ 并不改变它们的符号。为了保持下面的公式，当 $a=b$ 时定义 $\int_a^a f(x)\,dx=0$。

交换积分限则积分的符号改变。

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

积分和　如果 $f(x)$ 在从 $x=a$ 到 $x=b$ 的区间上可积，并且如果 c 落在这个区间内，那末可以将 c 取作每个分法中的一个分点，这样，任意一个和 $\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i$ 就能分成两个和，一个为从 a 到 c 区间上的和，另一个为从 c 到 b 区间上的和。因为和的极限等于极限的和，所以定积分可以写为两个积分的和。根据极限的定理：

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

两个可积函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 和的积分等于各别函数积分的和。

利用被积函数的零点作为分点，可将积分区间割开，从而分离出有符号面积的正负基值。例如：

$$I=\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi+\int_{\pi}^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=2-2=0。$$

对于具有有限个跳跃间断点的被积函数来说，也必须将积分区域在间断点割开（见图 7.1-6）。不过一定得注意被积函数变成无限的积分叉点；例如，积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ 没有意义，因为积分区间包含 $x=0$，而在那里被积函数是无限大。这种情况将在反常积分一节详细讨论。

带有常数因子的函数的积分　如果被积函数是一个乘积 $cf(x)$，其中 c 是常数，那末 $\Sigma cf(\xi_i)\Delta x_i=c\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i$。这样 c 作为一个因子出现在积分外面。

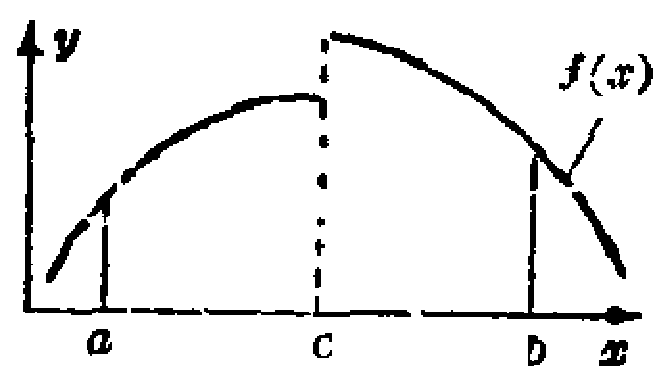


图 7.1-6　不连续函数的积分

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

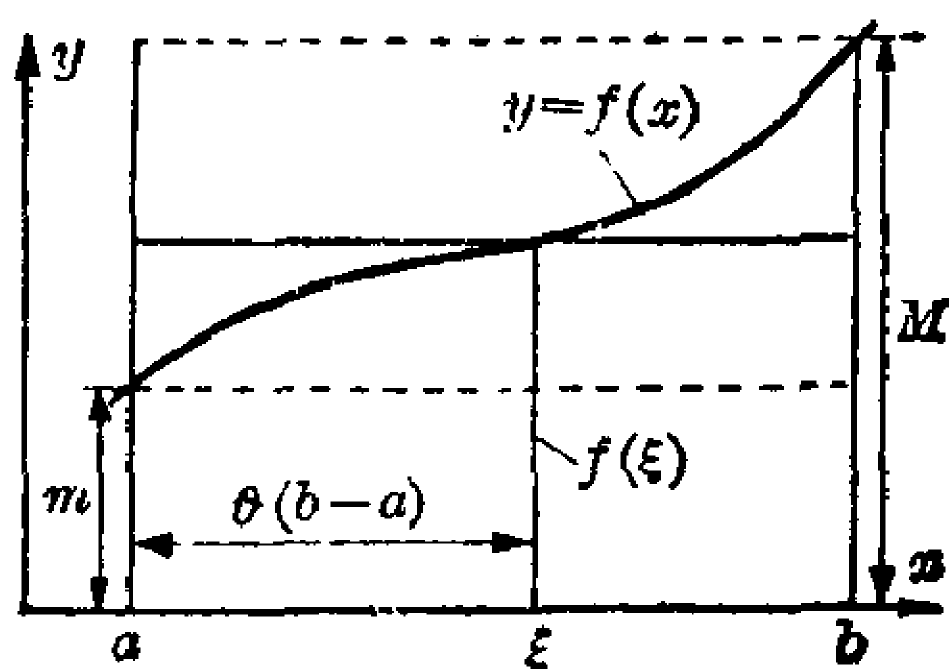


图 7.1-7　积分中值定理

【例】 $\int_0^3 4x^2\,dx=4\int_0^3 x^2\,dx=4\cdot 27/3=36$。

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$$

积分中值定理　在闭区间$[a,\ b]$上，每一个连续函数$f(x)$达到它的最大值M和最小值m。从定积分的定义得到

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a);$$

曲线下的面积介于底为$b-a$和高为m或M的矩形面积之间。因此在m和M之间一定存在一个μ，使得底为$b-a$和高为μ，因而面积为$\mu(b-a)$的矩形，与曲线下区域的面积相等(见图 7.1-7)。根据函数$f(x)$的连续性，在$[a,\ b]$上总能找到一个位置ξ使$\mu=f(\xi)$；由此得出$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$。如同在微分中值定理中那样，对于0和1之间某个适当的ϑ，ξ也可记为$a+\vartheta(b-a)$。

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$ 其中的ξ在$[a,\ b]$中	$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f[a+\vartheta(b-a)]$, $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$

如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，那末这个函数从$x=a$到$x=b$的定积分可以表示为该区间的长度和在区间某个中间点的函数值的乘积。

举例来说，中值定理可用于估计某些函数的定积分，它们或者不能用初等方式积出来或者很难找到其积分。如果$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$是区间$a\leqslant x\leqslant b$上的可积函数，满足不等式$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，那末

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b h(x)dx。$$

【例】 在区间 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 上，函数 e^{-x^2} 不能以初等的方式积出，但满足不等式 $1-x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1/(1+x^2)$。由此得出

$$0.458 = [x - x^3/3]_0^{1/2} = \int_0^{1/2} (1-x^2)dx \leqslant \int_0^{1/2} e^{-x^2}dx$$

$$\leqslant \int_0^{1/2} dx/(1+x^2) = [\arctan x]_0^{1/2} = 0.464。$$

为了完整起见，不加证明地引述如下的广义中值定理:

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，并且如果 $g(x)$ 在其上不变号，那末对于 $[a, b]$ 中某个适当的 ξ，有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx。$$

积分为微分的逆运算 如果将定积分的一个积分限，譬如说上限看作一个变量 x，那末对于 x 的每一个值对应有积分值 $\Phi(x)$。积分是上限变量的函数，$\Phi(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi$。现在，一方面

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi;$$

另一方面，根据积分中值定理

$$\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi = \Delta x \cdot f(x+\vartheta\Delta x);$$

因此 $$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi = f(x+\vartheta\Delta x)。$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，若 $f(x)$ 连续，则表达式 $f(x+\vartheta\Delta x)$ 趋于 $f(x)$。由此得出：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(x)$。这个关系表现微分和积分之间的基本联系。

如果函数 $f(x)$ 连续，那末函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi$ 可微，并且它的导数就等于被积函数在积分上限的值

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)d\xi = f(x)。$$

$$\Phi(x)=\int_a^x f(\xi)d\xi \to \Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)d\xi=f(x)$$

其导数等于被积函数 $f(x)$ 的每一个函数 $\Phi(x)$，称做 $f(x)$ 的原函数。对于同一个被积函数 $f(x)$ 的这样两个原函数 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$，$\Psi(x)-\Phi(x)$ 的导数恒等为零，所以根据微分中值定理，$\Psi(x)-\Phi(x)$ 为常数。

对于每一个连续函数 $f(x)$，有一族原函数属于它，其中的任何两个原函数相差一个常数。如果 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 是同一个函数 $f(x)$ 的原函数，那末 $\Phi(x)=\Psi(x)+$ 常数。

因此函数 $\Phi(x)$ 的图形形成一族平行曲线(见图 7.1-8)。所有原函数的类称做 $f(x)$ 的**不定积分**，记为

$$\int f(x)dx。$$

【例】 1. 函数 $f(x)=3x^2$ 的不定积分是 $\Phi(x)=x^3+$ 常数，因为 x^3 有导数 $3x^2$。

2. $\sin x$ 的导数是 $\cos x$，所以 $\cos x$ 的积分是 $\sin x$。写成不定积分就是 $\int\cos x\,dx=\sin x+c$。

3. 函数 $f(x)=2x^2$ 是其不定积分 $\Phi(x)$ 的导数。如果还要求 $\Phi(1)=1$，那末在不定积分 $\int 2x^2\,dx=(2/3)x^3+c$ 中的常数 c 可由 $1=\Phi(1)=$

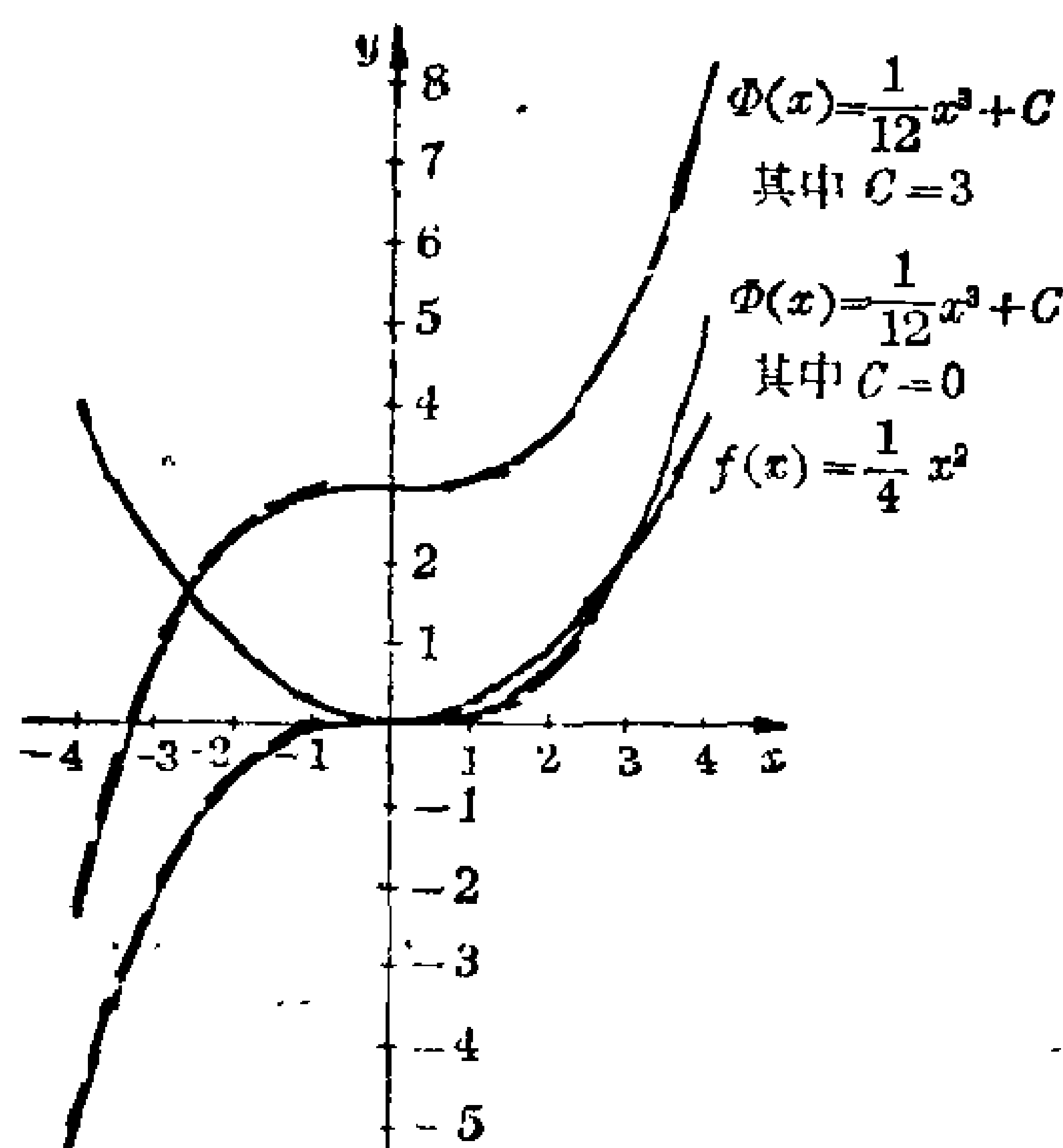


图 7.1-8 $\int(x^2/4)dx=x^3/12+C$ 的积分曲线

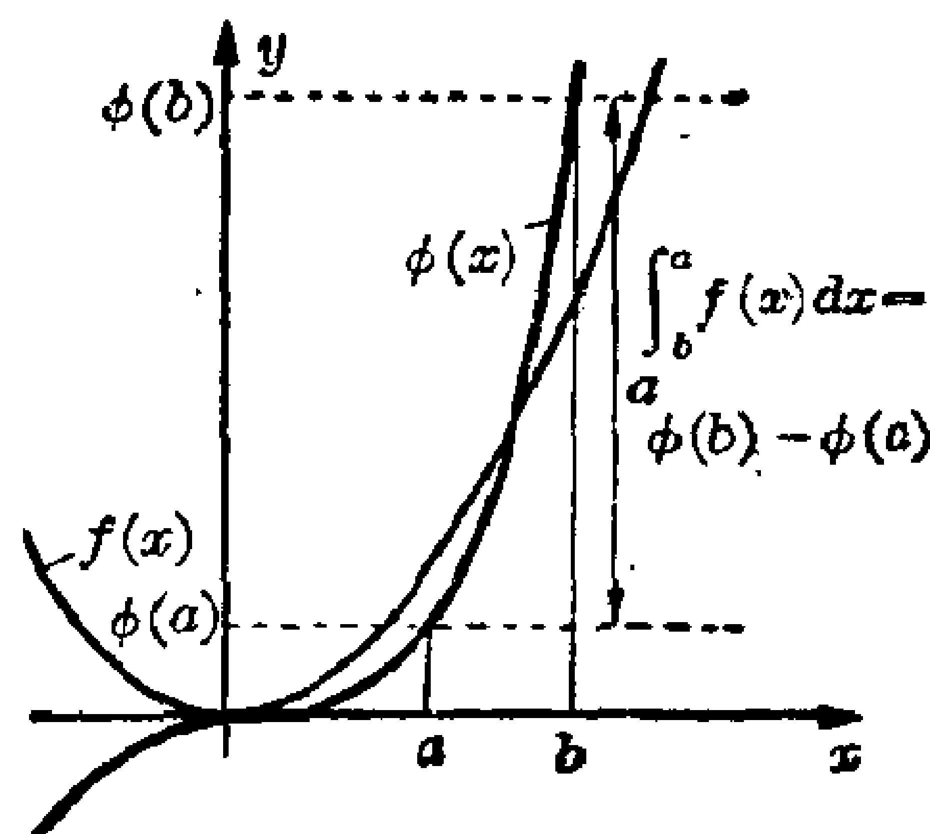


图 7.1-9 定积分为纵坐标之差

$2/3+c$ 来确定。于是，$c=1/3$ 从而 $\Phi(x)=(2/3)x^3+1/3$。

4. 对于函数 $\Phi(x)$，已知它的导数 $\Phi'(x)=3x^4$ 以及值 $\Phi(5)=0$。由不定积分 $\int 3x^4\,dx=(3/5)x^5+c$ 和条件 $\Phi(5)=0$ 得出 $(3/5)\cdot(5^5)+c=0$，所以 $c=-1875$，因而 $\Phi(x)=(3/5)x^5-1875$。

定积分为纵坐标之差 不定积分的知识使得定积分的计算比较容易。设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任何一个原函数，注意到 $\Psi(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ 也是一个原函数，所以 $\Psi(x)=\Phi(x)+C$。但是 $\Psi(a)=\int_a^a f(\xi)\,d\xi=0$，所以 $C=-\Phi(a)$，因而

$$\boxed{\int_a^b f(\xi)\,d\xi=\Psi(b)=\Phi(b)+C=\Phi(b)-\Phi(a)\quad\text{(见图 7.1-9)}}$$

【例】 1. $\int_1^2 x^2\,dx=[x^3/3]_{x=1}^{x=2}=8/3-1/3=7/3$。

2. $$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\,|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\sin(\pi/2)-\sin(-\pi/2)$$
$$=1-(-1)=2。$$

反常积分 定义为和式 $\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i$ 极限的积分，称做**正常积分**。**反常积分**与它不同，其中或者被积函数在积分区间的某个点 p 变成无限大，或者积分限中至少一个是无限大。反常积分定义为正常积分的极限。首先限制积分区间；在第一种情况下只积分到 $p+\varepsilon$ 或者 $p-\varepsilon$，在第二种情况下只积分到 ω，然后考虑相应的积分 $I(\varepsilon)$ 或 $I(\omega)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 或 $\omega\to\pm\infty$ 时的性态。如果 $I(\varepsilon)$ 或 $I(\omega)$ 趋于有限的极限，则称此为**收敛的反常积分**，否则称反常积分**发散**。

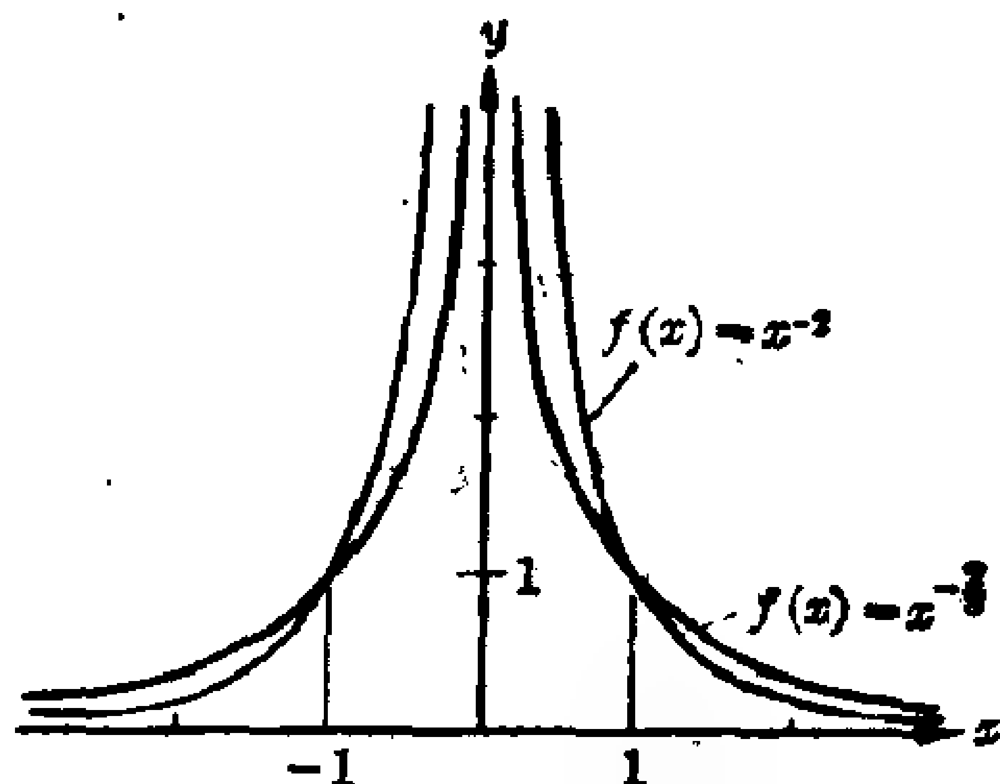


图 7.1-10 函数 $f(x)=x^{-2/3}$ 和 $f(x)=x^{-2}$，在 $x=0$ 附近的性态

具有无限大的被积函数 在下面的积分中被积函数在 $x=0$ 有一个极点(见 I. 第 5 章第 2 节——带有负指数的幂函数)。将这个极点隔开，得到从 $\varepsilon>0$ 到 1 区间上的一个正常积分 (见标准积分) $I(\varepsilon)$，再研究当 $\varepsilon\to 0$ 时 $I(\varepsilon)$ 的极限：

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{\varepsilon\to0} I(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})\right]。$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{1-\alpha};\ 0<\alpha<1}$$

极限的存在性取决于正指数 $\alpha\neq1$。如果 $\alpha>1$，那末 $\varepsilon^{1-\alpha}$ 有一个负指数因而当 $\varepsilon\to0$ 时一定发散。另一方面，如果 $\alpha<1$，那末当 $\varepsilon\to0$ 时 $\varepsilon^{1-\alpha}\to0$，于是反常积分收敛于 $1/(1-\alpha)$。图 7.1-10 显示了 $\alpha=2/3<1$ 和 $\alpha=2>1$ 两种情况。更为一般地，成立如下的比较原理（强函数准则）：假定函数 $f(x)$ 对每一个 $\varepsilon>0$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant p-\varepsilon$ 上可积，但在区间 $p-\varepsilon\leqslant x<p$ 内无界。如果存在一个数 $\alpha<1$，使得函数 $(p-x)^\alpha f(x)$ 对于 $a\leqslant x<p$ 有界，那末反常积分 $\int_a^p |f(x)|dx$ 收敛，因而 $\int_a^p f(x)dx$ 也收敛。如果存在一个 $\alpha<1$ 和界限 K，使得在区间 $[a, p)$ 中

$$|f(x)|\leqslant\frac{K}{|p-x|^\alpha},$$

那末有估计

$$\int_a^p |f(x)|dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{p-\varepsilon}|f(x)|dx$$

$$\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{p-\varepsilon}\frac{K}{|p-x|^\alpha}dx=\frac{K}{1-\alpha}(p-a)^{1-\alpha}。$$

【例】 根据标准积分有

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2}。$$

无限大积分区间。 对照被积函数变成无限大的反常积分，可再一次用例子 $f(x)=1/x^\alpha$ 说明之。

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{\omega\to\infty}I(\omega)=\lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}(\omega^{1-\alpha}-1)\right]。$$

如果 $\alpha\neq1$ 是正的，那末 $I(\omega)$ 的性态取决于 $\omega^{1-\alpha}$；如果指数 $1-\alpha$ 为正，即 $\alpha<1$，那末当 $\omega\to\infty$ 时 $I(\omega)\to\infty$ 从而积分发散；如果指数是负的，即 $\alpha>1$，那末当 $\omega\to\infty$ 时 $\omega^{1-\alpha}\to0$，因此积分收敛于值 $1/(\alpha-1)$。又有一个比较原理（强函数准则）：

如果 $f(x)$ 在 $x\geqslant a$ 的任何一个有限子区间上可积，并且存在一个 $\alpha>1$，使得函数 $x^\alpha f(x)$ 对于所有的 $x>a$ 有界，那末反常积分 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛。

如果 K 是函数 $x^{\alpha}|f(x)|$ 的一个界限，并且 $\alpha>1$，那末有估计

$$\int_a^{\infty}|f(x)|dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_a^{\omega}|f(x)|dx\leqslant\lim_{\omega\to\infty}\int_a^{\omega}\frac{K}{x^{\alpha}}dx=\frac{Ka^{1-\alpha}}{\alpha-1}。$$

【例】 1. 在下面的反常积分中，当 $x\to\infty$ 时被积函数二阶消没（见图 7.1-11）。

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\omega\to\infty}\int_0^{\omega}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\omega\to\infty}(\arctan\omega-\arctan 0)=\pi/2。$$

2. $\int_0^{\infty}e^{-x}dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_0^{\omega}e^{-x}dx=\lim_{\omega\to\infty}(-e^{-\omega}+1)=1。$

伽玛函数 欧拉(Euler, 1707～1783 年)求助于反常积分，解决了求一个函数，当自变量取正整数时其值是阶乘 $1!=1$, $2!=1\cdot2=2$, $3!=1\cdot2\cdot3=6$, …, $n!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n$ 的问题。勒让德(Legendre, 1752～1833 年)将此称为欧拉伽玛函数

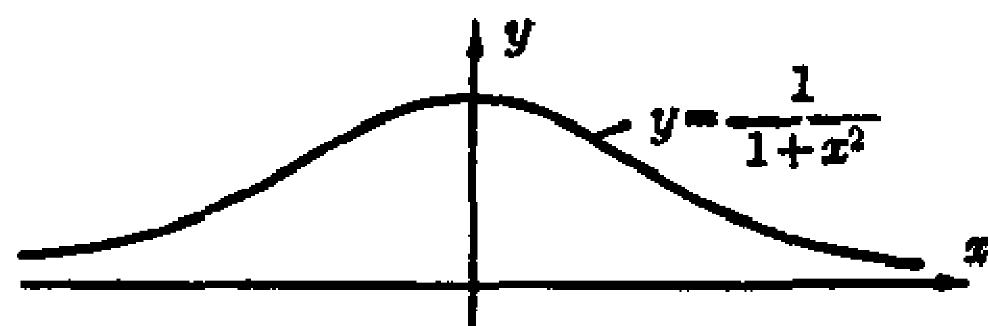


图 7.1-11 函数 $f(x)=1/(1+x^2)$ 图形下的面积

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt;$$

高斯给出一个作为无限乘积的 $\Gamma(x)$ 定义

$$\Gamma(x)=x^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}[(1+1/n)^x(1+x/n)^{-1}]。$$

这个函数永不为零并且除了在 $x=0, -1, -2, \cdots$ 有单极点以外它是连续的（见 I. 第 5 章）。用 $n=1, 2, 3, \cdots$ 代入方括弧得到它的因子。由函数方程 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 和值 $\Gamma(1)=1$ 得出对于整自变量 $n=1, 2, 3, \cdots$ 有 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$

欧拉伽玛函数	$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt,\ x>0$
高斯的 $\Gamma(x)$ 定义	$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}$, $x\neq0, -1, -2, \cdots$ $\Gamma(x)=x^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}[(1+1/n)^x\cdot(1+x/n)^{-1}]$
$\Gamma(x)$ 函数方程	$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$; $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin(\pi x)$; $\Gamma(1/2+x)\Gamma(1/2-x)=\pi/\cos(\pi x)$; $\Gamma(x)\Gamma(-x)=-\pi/[x\sin(\pi x)]$

求积

所谓求积，是指计算曲线边界的平面区域面积。

曲线底下的面积　在 x 轴以上，方程为 $y=f(x)$ 的曲线以下，在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的面积 F，如果在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上 $f(x)$ 的所有值都是正的，那末它由积分 $F=\int_a^b f(x)dx$ 求得。如果 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上变号，那末可将这个积分分成几段，使 $f(x)$ 在各段中取正值和负值，从而这个积分成为对应于有向面积的正负基值的和。如果不管有向性，那末总面积是这些基值的绝对值之和。

【例 1】　尼尔抛物线 $y=ax^{3/2}$（见图 7.1-12）的求积。

$$F=a\int_0^g x^{3/2}\,dx=2ag^{5/2}/5,$$

如果 $h=a\cdot g^{3/2}$，那末 $F=2gh/5$，所以面积 F 比底为 g 高为 h 的直角三角形面积小 $gh/10$。

【例 2】　指数曲线 $y=e^x$ 从 $x=a$ 到 $x=b$ 的求积。如果 a 是有限的，那末 $\int_a^b e^x dx=e^b-e^a$。当 $a\to-\infty$ 时，F 趋于有限极限 $F=e^b$；反常积分 $\int_{-\infty}^b e^x dx$ 收敛，从而延伸至无限远的区域（见图 7.1-13）具有有限的面积。

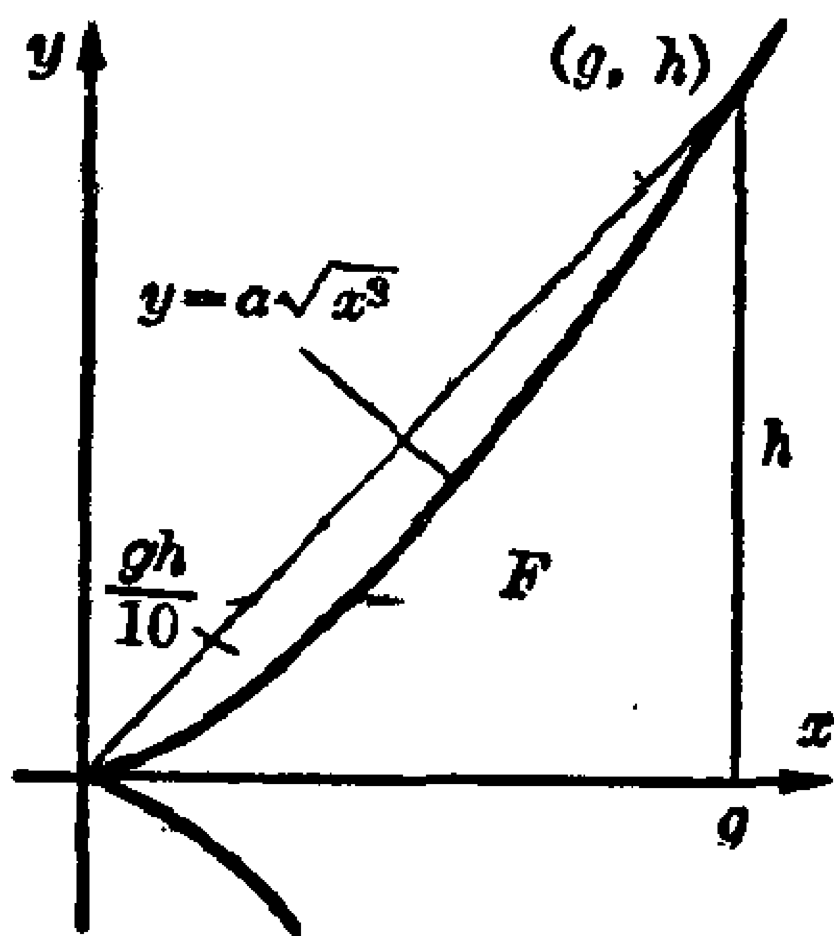


图 7.1-12　尼尔抛物线正支底下的面积

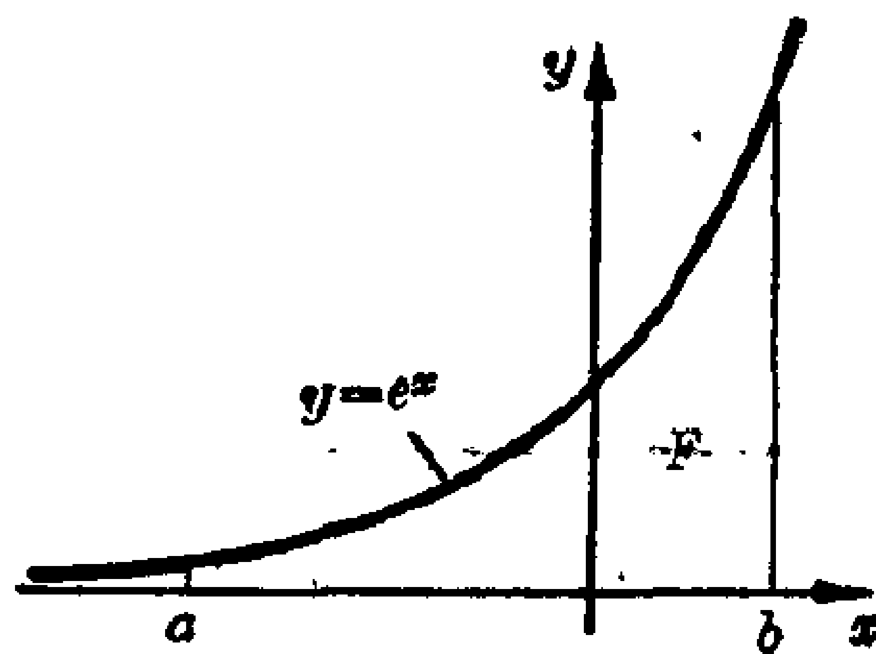


图 7.1-13　指数曲线 $y=e^x$ 底下的面积

【例 3】　直角双曲线 $y=k^2/x$ 从 $x=a$ 到 $x=b$ 的求积：

$$k^2\int_a^b \frac{dx}{x}=k^2(\ln b-\ln a);$$

$F=k^2\ln(b/a)$（见图 7.1-14）。这里为一条“有理”曲线，对于这条有理曲

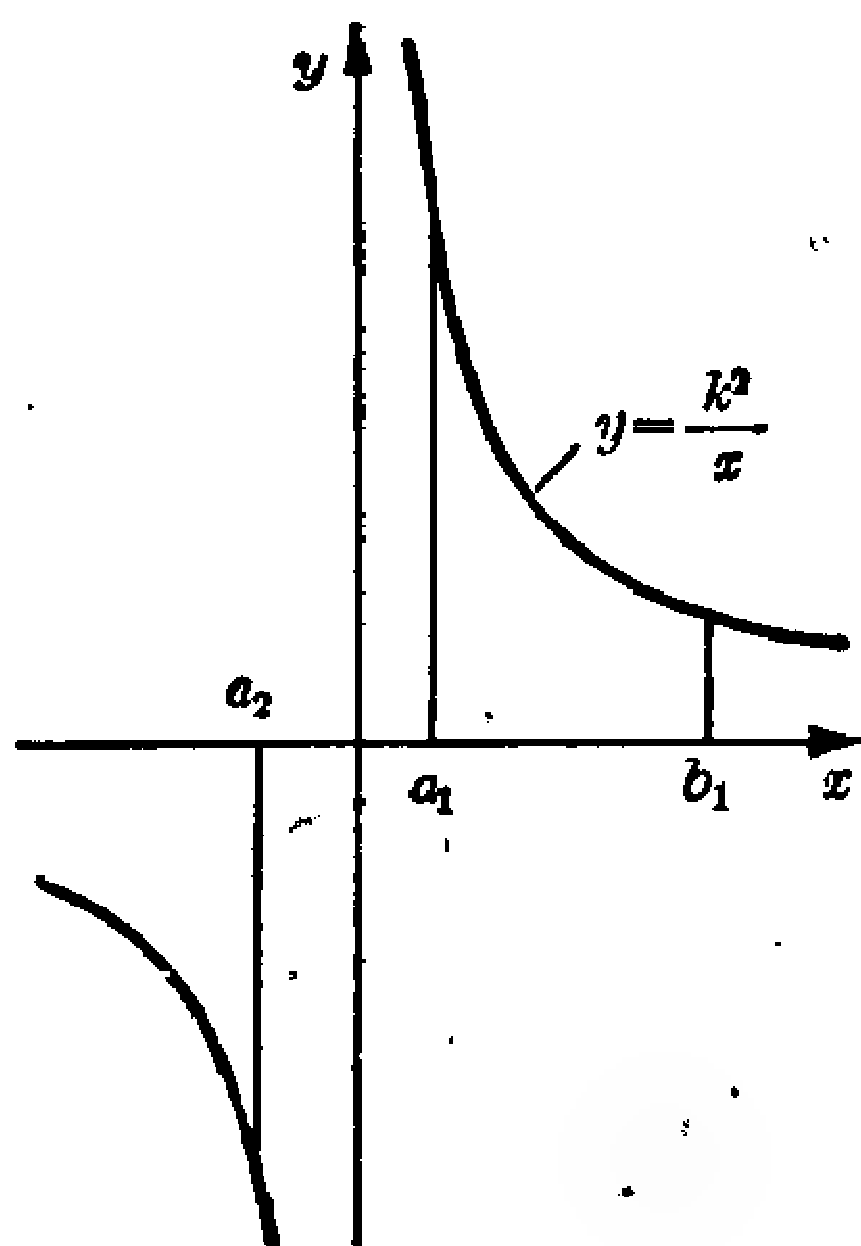


图 7.1-14 双曲线 $y=k^2/x$ 底下的面积

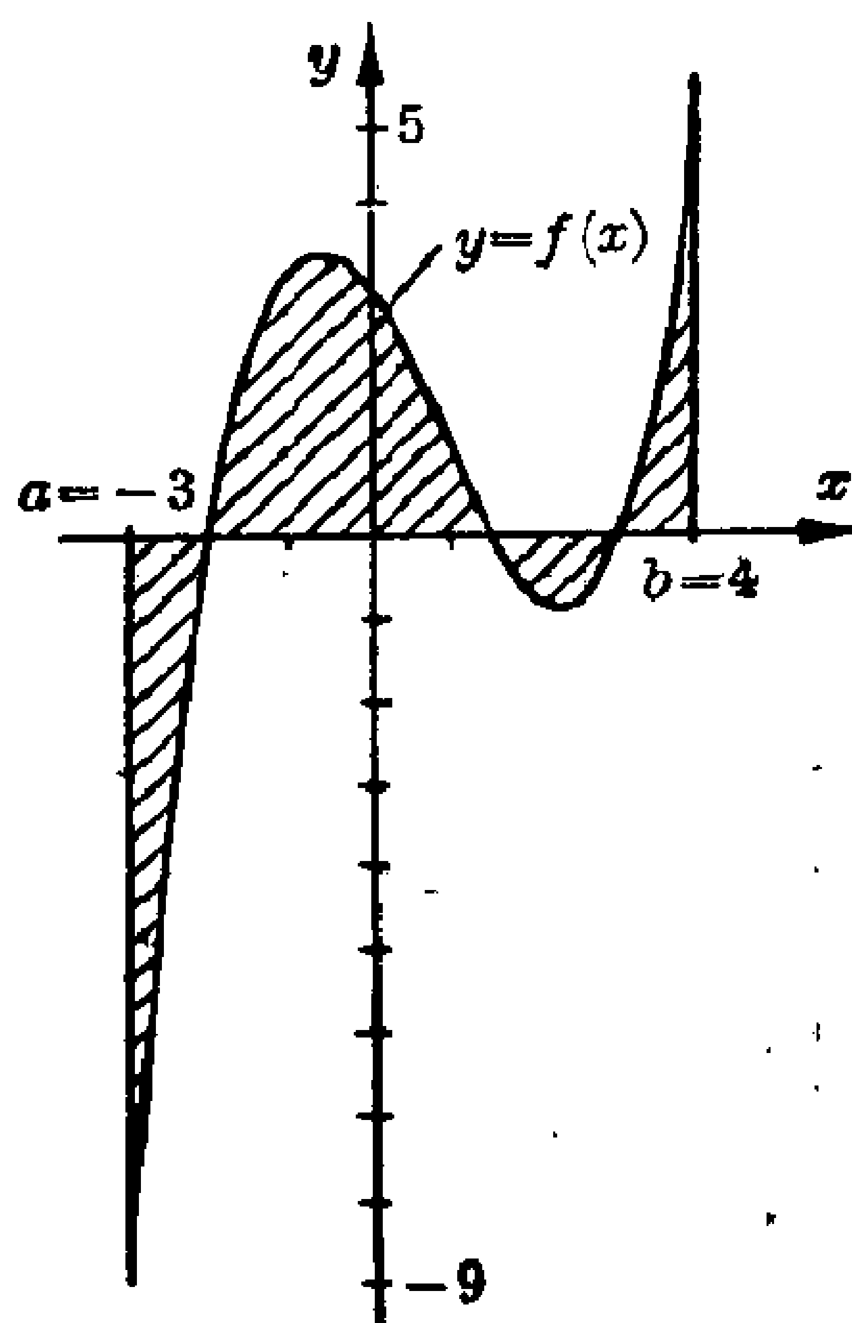


图 7.1-15 函数为 $y=f(x)=x^3/3-5x^2/6-3x/2+3$ 的曲线底下的面积

线计算面积时牵涉到一个超越函数。

【例 4】 正弦曲线 $y=\sin x$ 从 $x=0$ 到 $x=\pi$ 的求积:

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\cos 0-\cos\pi;\quad F=2。$$

这里是一条"超越"曲线,相应的倒是有理的面积。

【例 5】 计算由曲线 $y=f(x)=x^3/3-5x^2/6-3x/2+3$, x 轴以及直线 $x=-3$ 与 $x=4$ 所围区域的面积(见图 7.1-15)。在区间 $-3\leqslant x\leqslant 4$ 上,函数有零点在 $x_1=-2$, $x_2=3/2$, $x_3=3$。如果不管有向性,那末面积是各零点之间的子区间上积分的绝对值之和。因为

$$\int(x^3/3-5x^2/6-3x/2+3)dx=F(x)=x^4/12-5x^3/18-3x^2/4+3x,$$

这导致面积的如下赋值:

$$\begin{aligned}F&=\left|\int_{-3}^{-2}f(x)dx\right|+\left|\int_{-2}^{3/2}f(x)dx\right|+\left|\int_{3/2}^{3}f(x)dx\right|+\left|\int_{3}^{4}f(x)dx\right|\\&=|[F(x)]_{-3}^{-2}|+|[F(x)]_{-2}^{3/2}|+|[F(x)]_{3/2}^{3}|+|[F(x)]_{3}^{4}|\\&=|-5.444+1.5|+|2.297+5.444|+\\&\quad|1.5-2.297|+|3.556-1.5|\\&=|-3.944|+|7.741|+|-0.797|+|2.056|=14.358。\end{aligned}$$

可以用积分导出平面几何中已知的面积公式，下面作为例子给出对于梯形、圆和椭圆的公式。

【例 1】 梯形的面积。计算直线 $y=mx+a$ 之下，x 轴以上 $x=0$ 与 $x=h$ 为界的面积：$\int_0^h (mx+a)dx=mh^2/2+ah=h(mh+2a)/2$；置 $mh+a=b$（见图 7.1-16），得到熟知的梯形公式 $A=(a+b)h/2$。

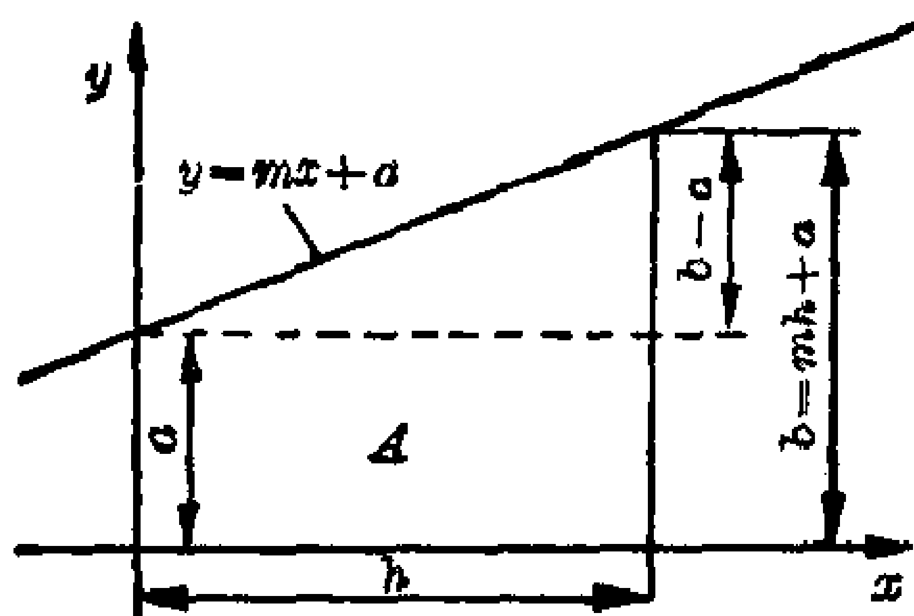


图 7.1-16　梯形的面积公式

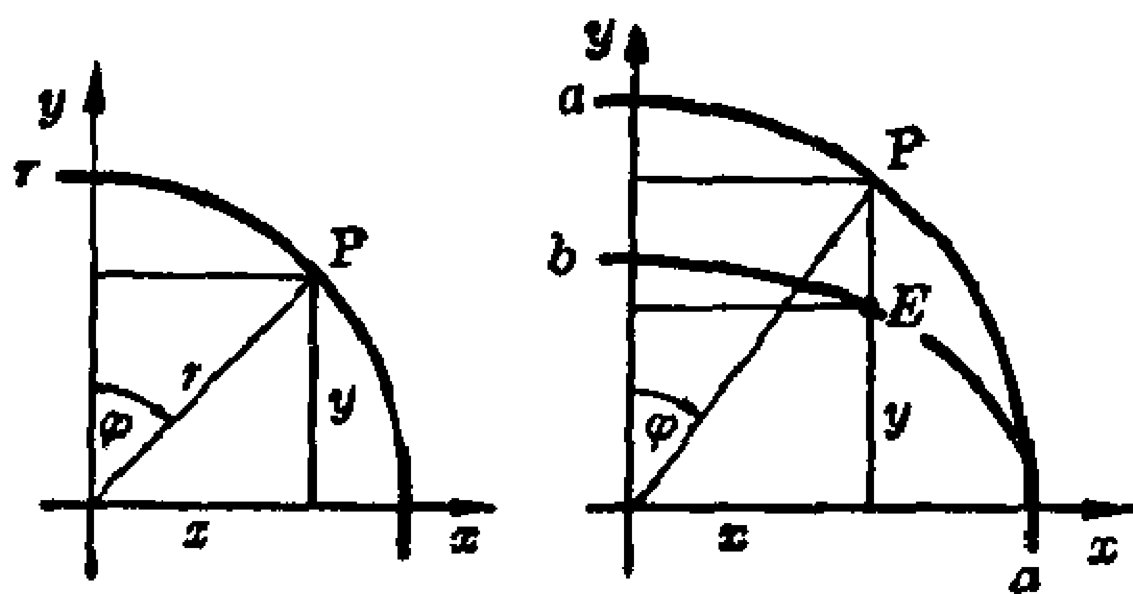


图 7.1-17　圆与椭圆的面积公式

【例 2】 圆面积。圆域 A 的四分之一（见图 7.1-17）位于圆弧 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 底下，界限 $x=0$ 和 $x=r$ 之间。代入 $x=r\sin\varphi$，$dx=r\cos\varphi\,d\varphi$ 得到 $A/4=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}r^2\cos^2\varphi d\varphi=(r^2/2)[\sin\varphi\cos\varphi+\varphi]_0^{\pi/2}=(r^2/2)\cdot(\pi/2)=\pi r^2/4$，或者说 $A=\pi r^2$。

【例 3】 椭圆面积。椭圆区域 F 的四分之一（图 7.1-17）位于弧 $y=(b/a)\sqrt{a^2-x^2}$ 底下 $x=0$ 和 $x=a$ 之间。参数表示 $x=a\sin\varphi$，$y=b\cos\varphi$，给出 $dx=a\cos\varphi\,d\varphi$；因此四分之一面积为

$$F/4=\int_0^{\pi/2}ab\cos^2\varphi\,d\varphi=\pi ab/4,$$

即

$$F=\pi ab。$$

两条曲线之间的面积　如果一个区域被两条相交曲线围住，则它的面积可作为每条曲线底下面积的绝对差值来计算。积分限是曲线的两个相邻交点的横坐标 x_1，x_2（见图 7.1-18）；不管有向性。曲线 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 底下的面积由积分 $\int_{x_1}^{x_2}g(x)dx$，$\int_{x_1}^{x_2}h(x)dx$ 给出。由这两条曲线所围区域的面积是这两个积分的差，即

$$F=\left|\int_{x_1}^{x_2}g(x)dx-\int_{x_1}^{x_2}h(x)dx\right|。$$

因为这两个积分有相同的积分限，所以它们可以结合成一个积分。如果 x_1 和 x_2 之间曲线的某些部分位于 x 轴下面，则可沿 y 轴方向移动这两条曲线直到它们之间的区域全部位于 x 轴上面。这时两个函数改变同一个加性常数，相减之后它就消去。

两条曲线之间的面积	$F=\left\|\int_{x_1}^{x_2}[g(x)-h(x)]dx\right\|$

【例 1】 由 $g(x)=3\sqrt{x}$ 和 $h(x)=x^2-4x+6$ 确定的曲线（见图 7.1-19）相交于点(1, 3)和(4, 6)。现在

$$g(x)-h(x)=(3\sqrt{x}-x^2+4x-6),$$

所以

$$F=\int_1^4(3\sqrt{x}-x^2+4x-6)dx=[2x\sqrt{x}-x^3/3+2x^2-6x]_1^4=5。$$

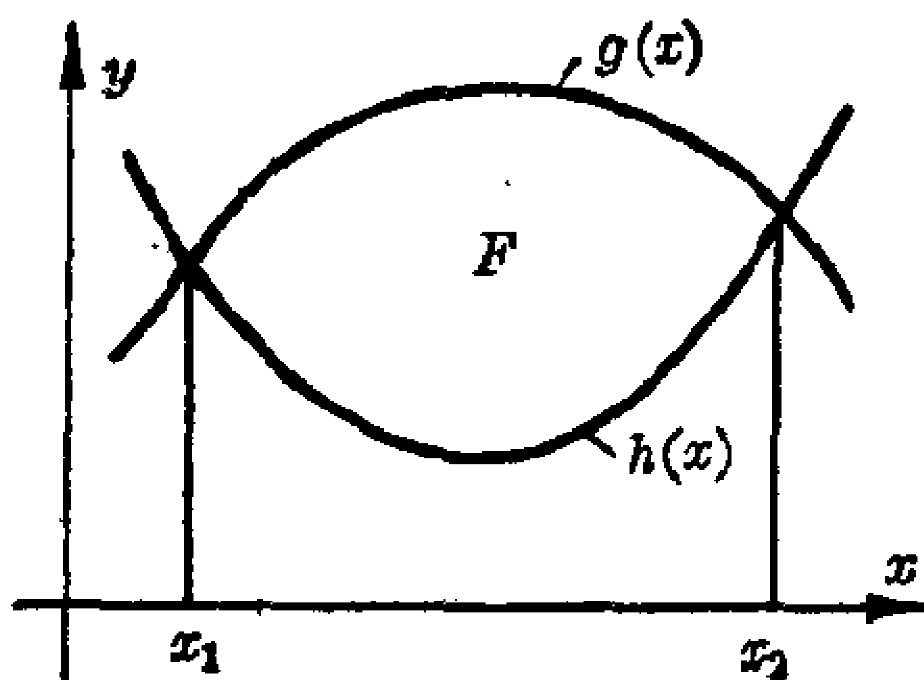


图 7.1-18　两条曲线之间的面积

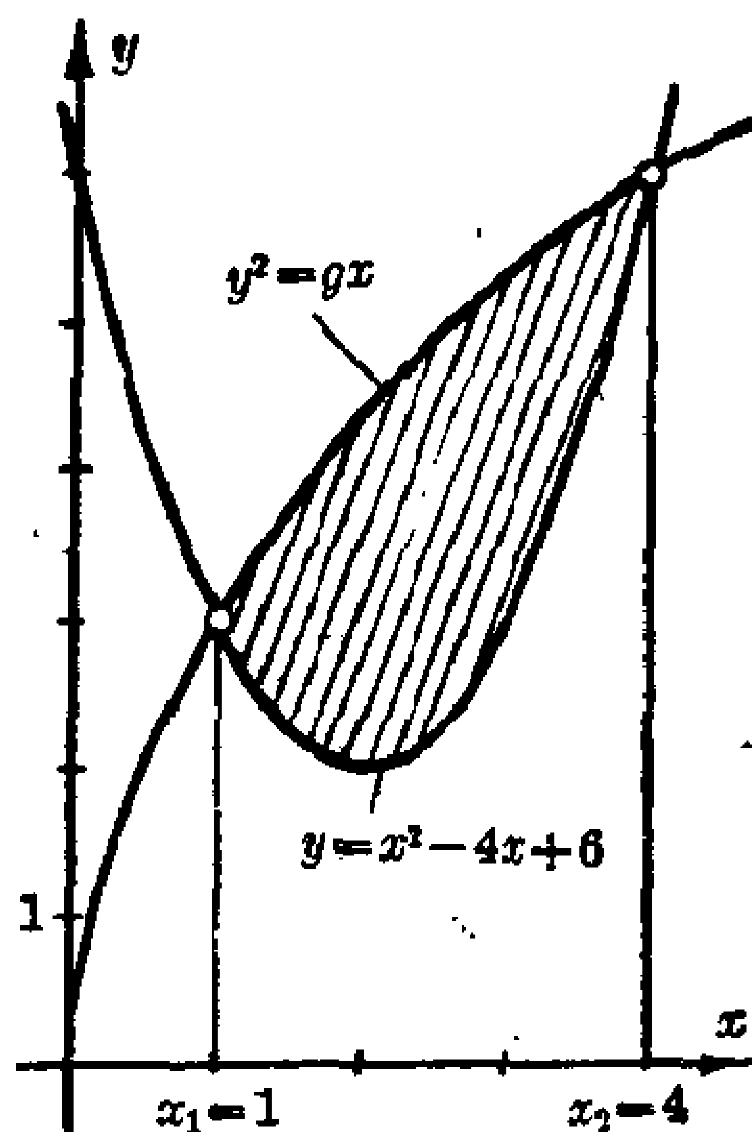


图 7.1-19　函数 $y^2=9x$ 和 $y=x^2-4x+6$ 的曲线之间面积

【例 2】 图 7.1-20 代表一个钢梁的横剖面。上面的边界是一段圆弧，下面的边界是一段抛物线。当知道钢板的厚度 d 和材料的密度 ρ 时，就能计算梁的质量。如果 A 是横剖面的面积，那么它的质量是 $M=A\cdot d\cdot\rho$。横剖面面积 A

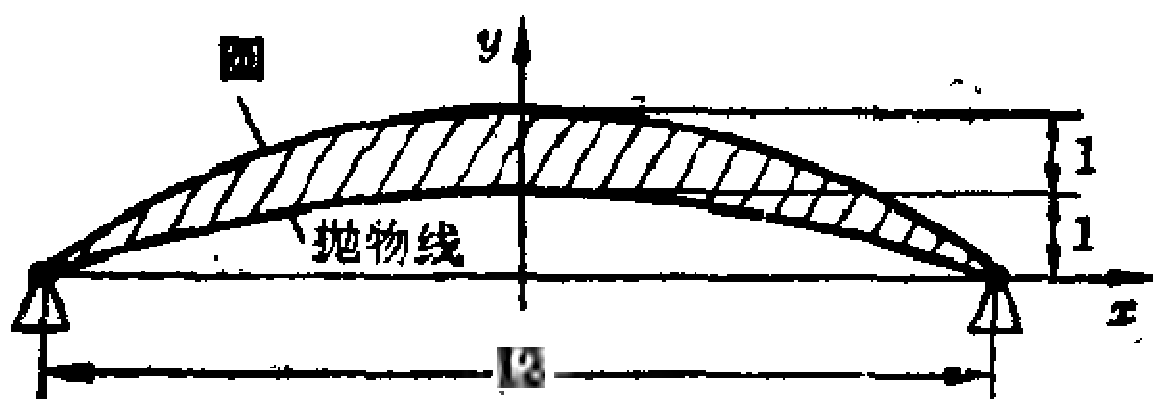


图 7.1-20　钢梁的横剖面

可以借助于积分来计算。对于适当选择的一个坐标系，圆有一般方程 $x^2+(y-b)^2=r^2$，抛物线有方程 $y=ax^2+c$。给定的数据导致圆的特定方程 $x^2+(y+8)^2=100$ 以及抛物线方程 $y=-x^2/36+1$。

代入 $g(x)-h(x)=\sqrt{100-x^2}-8+x^2/36-1$，得到所要求的面积

$$A=2\int_0^6(\sqrt{100-x^2}+x^2/36-9)dx$$

$$=2[1/2(100\arcsin(x/10)+x\sqrt{100-x^2}-x^3/108-9x]_0^6$$

$$=2[1/2(100\times0.6435+48)-52]=8.36。$$

图解积分法　正如可以图解地确定给定曲线的导数那样，可以相反地从给定的导函数图形构造出相当的积分曲线。首先借助于初始条件，从积分曲线族中选择一条曲线，譬如过坐标为 $x_0=1$, $y_0=0$ 的点 P_0 的一条曲线。导函数 $f(x)$ 的每一个纵坐标表示要构造的积分曲线在该点的斜率。因此，若从 $f(x_0)=f(1)$ 到 y 轴作一条垂线再将垂足 B_0 与点 $A=(-1,\ 0)$ 联结起来，因为 $\tan\alpha_0=|B_0O|/1=f(1)$，所以过 A 和 B_0 的直线给出积分曲线在点 P_0 的方向。

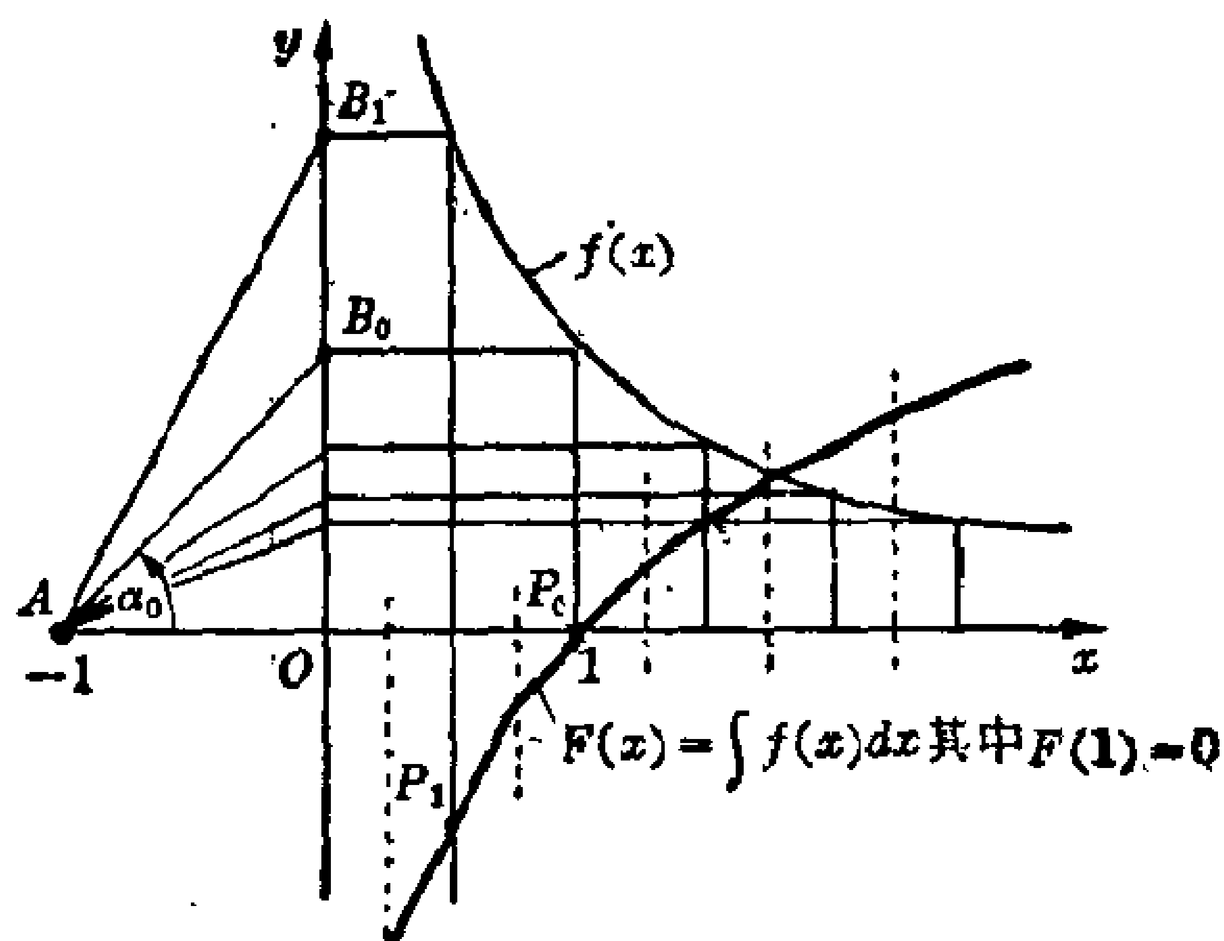


图 7.1-21　图解积分法

过 P_0 平行于这个方向的平行线是积分曲线的切线，并在 P_0 的小邻域内这条平行线近似地代表积分曲线的切线。因为不知道积分曲线的其他点，所以选择一个点 x_1，用 y 轴的平行线将从 x_0 到 x_1 的区间等分，并移动对点 P_1 所作的切线方向，使得它与点 P_0 的切线在区间中线上相交。用这种方式继续做下去，得到一个多角形弧，它近似地代表积分曲线（见图 7.1-21）。也可以借助于专门工具机械地画出给定导函数的积分曲线。

7.2　不定积分

定积分作为原函数的纵坐标差的表达式，使得希望对尽可能多的函数有原函数。为了得到这些原函数，利用积分是微分的逆运算这样一个事实。

标准积分

除了积分常数以外，标准积分直接由微分的标准公式产生。如果已知 $\Phi(x)$ 的导数是给定函数 $f(x)$，那末反过来 $\Phi(x)+C=\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的积分。然而，这样得到的公式只有在被积函数 $f(x)$ 和积分 $\Phi(x)$ 都有定义的范围内才成立。例如，积分 $\int \frac{dx}{x}=\ln(cx)=\ln|x|+C$ 起初仅对正的 x 有定义，然后倘使给定常数 C 与 x 同号的话，则可延拓到负的 x 值。于是可以写成 $\ln(cx)=\ln(|c||x|)=\ln|x|+\ln|c|=\ln|x|+C$。不过应该再一次强调 $x=0$ 一定又不可属于积分区间。

标准积分表

$$\int dx=x+C \qquad \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C;\quad n\neq -1$$

$$\int e^x dx=e^x+C \qquad \int \frac{dx}{x}=\ln(cx)=\ln|x|+C;\quad x\neq 0$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C=a^x \log_a e+C;\quad 0<a\neq 1$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C \qquad \int \sec^2 x\,dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C;$$

$$x\neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad k\in \mathbf{Z}$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C \qquad \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx=\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C;$$

$$x\neq k\pi,\quad k\in \mathbf{Z}$$

$$\int \cos\mathrm{h}x\,dx=\sinh x+C \qquad \int \frac{dx}{\cosh^2 x}=\tanh x+C$$

$$\int \sin\mathrm{h}x\,dx=\cosh x+C \qquad \int \frac{dx}{\cosh^2 x}=-\coth x+C;\quad x\neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C';\quad |x|<1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C=-\operatorname{arccot} x+C'$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sinh^{-1}x+C=\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases}\cosh^{-1}x+C=\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C, \text{ 如果 } x>1\\ -\cosh^{-1}(-x)+C=-\ln(-x+\sqrt{x^2-1})+C,\\ \qquad \text{如果 } x<-1\end{cases}$$

其中 $0\leqslant\cosh^{-1}x<\infty$(主值)

$$\int \frac{dx}{1-x^2}=\begin{cases}\tanh^{-1}x+C=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+C' & \text{当 } |x|<1\\ \coth^{-1}x+C_1=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+C_1' & \text{当 } |x|>1\end{cases}$$

规则 $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 对任何实指数 $n\neq-1$ 和 $x>0$ 成立;对于负整数,只要 $x\neq0$ 就行了,就正整数而言,这个规则对于所有 x 成立。

【例】 1. $\int x^3 dx=\frac{x^4}{4}+C$。

2. $\int \frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$。

3. $\int \frac{dx}{x^r}=\int x^{-r}dx=\frac{x^{-r+1}}{-r+1}+C \quad \frac{x^{-(r-1)}}{-(r-1)}+C=\frac{-1}{(r-1)x^{(r-1)}}$
$+C \ (r\neq1)$。

4. $\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{1/3}dx=\frac{x^{4/3}}{4/3}+C=3/4\sqrt[3]{x^4}+C=3/4x\sqrt[3]{x}+C$。

5. $\int \sqrt[m]{x}\,dx=\int x^{1/m}dx=\frac{x^{1/m+1}}{1/m+1}+C=\frac{x^{(1+m)/m}}{(1+m)/m}$
$=\frac{m\sqrt[m]{x^{m+1}}}{m+1}+C=\frac{mx\sqrt[m]{x}}{m+1}+C$。

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int x^{-2/3}dx=\frac{x^{1/3}}{1/3}+C=3\sqrt[3]{x}+C$。

7. $\int(5x^3+4x^2-3x+2)dx=5\int x^3 dx+4\int x^2 dx-3\int x\,dx+2\int dx$
$=5x^4/4+4x^3/3-3x^2/2+2x+C$。

8. $\int[ax^2+1/x-b/x^2+1/(1+x^2)]dx=ax^3/3+\ln|x|$
$+b/x+\arctan x+C$。

9. $\int \frac{x^3+2x^2-x+3}{x}dx=\int(x^2+2x-1+3/x)dx$
$=x^3/3+x^2-x+3\ln|x|+C$。

10. $\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}(\cos x-\sin x+1/\cos^2 x)dx=[\sin x+\cos x+\tan x]_{-\pi/4}^{+\pi/4}$

$$=(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+1)-(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-1)$$

$$=2+\sqrt{2}。$$

分部积分法

有时一个困难的积分可用“分部积分法”比较容易地求得。假定被积函数可以写成两个函数的乘积，其中的一个易于积分。分部积分规则是乘积的微分规则的一个推论:

$$\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}。$$

两边积分得 $\int\frac{d(uv)}{dx}dx=\int v\frac{du}{dx}dx+\int u\frac{dv}{dx}dx$，这样得到分部积分规则。“分部”是指将被积函数写成 u 和 v' 这两部分的乘积 uv'，其中 v' 这部分的积分是已知的，而被积函数为 $u'v$ 的新积分是比较容易找到的。

分部积分法	$\int u\,dv=uv-\int v\,du$	$\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx$

【例】 为了计算积分 $\int xe^x dx$，设 $u=x$，$v'=e^x$，得 $u'=1$ 和 $v=e^x$。分部积分规则给出

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C。$$

递推公式 积分 $\int x^6 e^x dx$ 不能由一次分部积分求得，但是在这种情况以及类似的情况下常常可以接连几次用分部积分法，逐步简化积分，直到取得一个标准积分为止。于是找到一个递推公式。因为 e^x 就等于它的导数，所以似可将被积函数 $x^n e^x$ 因式分解为 $u=x^n$，$v'=e^x$；这给出 $v=e^x$，$uv=x^n e^x$，$u'v=nx^{n-1}e^x$，因此有下边的递推公式。

1. $\int x^n e^x dx=x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx$	n 是整数

【例】 $\int x^2e^x dx=x^2e^x-2\int xe^x dx=x^2e^x-2\left[xe^x-\int e^x dx\right]$

$$=x^2e^x-2[xe^x-e^x+C]=x^2e^x-2xe^x+2e^x-2C$$

$$=(x^2-2x+2)e^x+C_1，这里 C_1=-2C。$$

2. $\int x^n \sin x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$ $\int x^n \cos x\,dx = +x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx$	n 是整数

这里被积函数适当的因式分解容易猜得出，因为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的积分是已知的。

【例】1. $\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x - \int(-2x\cos x)dx$

$$= -x^2\cos x + 2[x\sin x - \int \sin x\,dx]$$

$$= -x^2\cos x + 2[x\sin x + \cos x + C]$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + 2C。$$

2. $\int x^3\cos x\,dx = x^3\sin x - 3\int x^2\sin x\,dx$

$$= x^3\sin x - 3[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + 2C]$$

$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x - 6C。$$

3. $\int(\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}dx$	n 是整数

将被积函数因式分解为 $1\cdot(\ln x)^n$，即设 $v'=1$, $u=(\ln x)^n$，于是得 $v=x$, $u'=n(\ln x)^{n-1}\cdot(1/x)$，从而 $u'v=n(\ln x)^{n-1}$。如果指数 n 是一个自然数，那么 $n-1$ 次分部积分导致积分 $\int \ln x\,dx$，它的被积函数又可以写成乘积 $1\cdot\ln x$，由此导出 $\int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot 1/x\,dx = x\ln x - x + C$。当 $n=-1$ 时，得到对数积分(见 **II**. 第8章)。

4. $\int x^n \ln x\,dx = \ln x\cdot\dfrac{x^{n+1}}{n+1} - \int\dfrac{x^n}{n+1}dx$ $= \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \dfrac{1}{n+1}\right)$	$n \neq -1$

这里设 $v'=x^n$ 和 $u=\ln x$，使得被积函数

$$v\cdot u' = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^n}{n+1}$$

不再包含 $\ln x$ 并且立即可以积分；这里就不需要递推公式。

5. $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x d$	n 是整数
$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$	$n \neq 0$

被积函数例如 $\sin^n x$，写成乘积 $\sin x \cdot \sin^{n-1} x$；于是，可以设 $u=\sin^{n-1} x$，$v'=\sin x$，得 $v=-\cos x$，$u'=(n-1)\sin^{n-1} x\cos x$，因此

$$u'v = -(n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x = -(n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)$$
$$= -(n-1)\sin^{n-2} x + (n-1)\sin^n x。$$

所以

$$\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx,$$

$$(1+n-1)\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx。$$

两边除以 n 得到第一个递推公式；类似地可得第二个公式。如果 n 是一个负整数，则递推公式用来由左边的积分表达右边的积分。

【例】 1. $\int \sin^2 x\,dx = -(\cos x\sin x)/2 + (1/2)\int dx$

$$= -(\cos x\sin x)/2 + x/2 + C。$$

2. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = (1/2)[\sin x\cos x + x]_0^{2\pi} = \pi。$

3. $\int \cos^3 x\,dx = (1/3)\sin x\cos^2 x + (2/3)\int \cos x\,dx$

$$= (1/3)\sin x\cos^2 x + (2/3)\sin x + C。$$

4. $\int_0^{2\pi} \sin^3 x\,dx = -(1/3)[\cos x(\sin^2 x + 2)]_0^{2\pi} = 0。$

沃利斯乘积公式 前面的递推公式导出了 $\frac{\pi}{2}$ 的一种表示，它是由 J. 沃利斯(John Wallis, 1616～1703 年)得到的。因为在区间 $0 \leqslant x < \pi/2$ 中 $0 \leqslant \sin x < 1$，所以不等式 $\sin^{2k+1} x \leqslant \sin^{2k} x \leqslant \sin^{2k-1} x$ 对自然数 $k \geqslant 1$ 成立。另一方面，由递推公式导出：

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\,dx = \frac{2k-1}{2k}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k-2} x\,dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2k}{2k+1}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k-1} x\,dx = \frac{2k(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3}$$

因此得到不等式

$$\frac{2\cdot 4\cdots 2k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)}\leqslant\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\cdot\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{2\cdot 4\cdots(2k-2)}{3\cdot 5\cdots(2k-1)},$$

或　$$1\leqslant(2k+1)\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\right]^2\cdot\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{2k+1}{2k}=1+\frac{1}{2k}。$$

因为　$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k}\right)=1,$$

由此得出　$$\lim_{k\to\infty}(2k+1)\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\right]^2\cdot\frac{\pi}{2}=1。$$

沃利斯乘积公式	$\frac{\pi}{2}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2k)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2k-1)^2\cdot(2k+1)}$

当 $k=10$ 时，这给出（粗糙的）近似值 $\frac{\pi}{2}\approx 1.5339$ 或 $\pi\approx 3.0678$。

换元积分法

如果通过代换 $x=\varphi(z)$，变量 x 用新的变量 z 来代替，或者被积函数的某个部分 $\varphi(x)$ 提出来作为新的变量 z，那末积分也许会变得比较容易或者比较简单。在所有的情况下都必须考虑给定变量 x 和新变量 z 的微分 dx 和 dz 之间的联系。

被积函数为线性函数 $\varphi(x)=mx+c$ 的函数 $f[\varphi(x)]$　代换 $\varphi(x)=mx+c=z$ 并注意 $m\,dx=dz$ 或 $dx=dz/m$。如果 $f(z)$ 可以积出来，那末代换就成功。

【例】 1．如果被积函数是 $(ax+b)^5$，设 $ax+b=z$，$dx=dz/a$，得到

$$\int(ax+b)^5\,dx=(1/a)\int z^5\,dz=(1/6a)\cdot z^6+C=(1/6a)\cdot(ax+b)^6+C。$$

2．如果令 $3x-4=z$，那末被积函数 $\sqrt{3x-4}$ 变成 $\sqrt{z}$；然后 $dx=dz/3$ 进而得出积分

$$\int\sqrt{3x-4}\,dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{z}\,dz=\frac{1}{3}\cdot 2/3\cdot z^{3/2}+C=2/9\,z\sqrt{z}+C$$
$$=2/9\,(3x-4)\sqrt{3x-4}+C。$$

3．代换 $\omega t+\pi/2=z$，$dt=dz/\omega$，导出

$$\int\sin(\omega t+\pi/2)dt=(1/\omega)\int\sin z\,dz=-(1/\omega)\cos z+C$$
$$=-(1/\omega)\cos(\omega t+\pi/2)+C。$$

4．在被积函数 e^{-3x} 中代换 $-3x=z$，$dx=-dz/3$，求得

$$\int e^{-3x}dx=-1/3\int e^{z}dz=-1/3\,e^{z}+C=-1/3\,e^{-3x}+C。$$

$\varphi'(x)/\varphi(x)$形式的被积函数 如果被积函数是一个商，其中分子是分母的导数，那末代换 $\varphi(x)=z$。于是 $\varphi'(x)dx=dz$ 或 $dx=\dfrac{dz}{\varphi'(x)}$，使积分变成 $\int\dfrac{dz}{z}=\ln z+C$。

$$\boxed{\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\ln|\varphi(x)|+C}$$

$$\boxed{\int\frac{x^{n-1}}{x^n+a}dx=\frac{1}{n}\int\frac{nx^{n-1}}{x^n+a}dx=\frac{1}{n}\ln|x^n+a|+C}$$

例如，分母 $\varphi(x)=x^n+a$ 有导数 $\varphi'(x)=nx^{n-1}$，所以如果分子是 $x^{n-1}=\dfrac{nx^{n-1}}{n}$，则可以把常数因子 $\dfrac{1}{n}$ 拿到积分外面，给出 $\varphi'(x)/\varphi(x)$ 形式的被积函数。

【例】 1. $\displaystyle\int\frac{3x^2-4}{x^3-4x+7}dx=\ln[c(x^3-4x+7)]$

$$=\ln|x^3-4x+7|+C。$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^4-5}dx=1/4\int\frac{4x^3}{x^4-5}dx=1/4\ln[c(x^4-5)]$

$$=1/4\ln|x^4-5|+C。$$

3. $\displaystyle\int\frac{3-5x}{1+x^2}dx=3\int\frac{dx}{1+x^2}-5/2\int\frac{2x}{1+x^2}dx$

$$=3\arctan x-5/2\ln(1+x^2)+C。$$

被积函数 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{1}{D}$ 可以重新整理成如下的 $\varphi'(x)/\varphi(x)$ 形式：

$$\frac{1}{D}=\frac{(x+D)}{D(x+D)}=\frac{(x+D)/D}{(x+D)}=\frac{1+x/D}{x+D}=\frac{1+x/\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}。$$

现在分子是分母的导数。

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{1+x/\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C}$$

函数 $\tan x$, $\cot x$, $\tanh x$ 和 $\coth x$ 的积分。 这些被积函数中的每一

个都可以写成商，其中分子是分母的导数。因此可以用所述的方法来积分。例如，$\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$。

函数 $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$, $\tanh^{-1}x$ 和 $\coth^{-1}x$ 的积分。 对于这些被积函数，首先用分部积分导出 $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$ 形式的积分；例如，如果 $\arctan x$ 写成乘积 $1\cdot\arctan x$，那末 $u=\arctan x$, $v'=1$，得

$$v=x,\ u'=\frac{1}{1+x^2},\ vu'=1/2\cdot\frac{2x}{1+x^2},$$

从而

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - 1/2\int\frac{2x}{1+x^2}dx = x\arctan x - 1/2\ln(1+x^2)+C。$$

其余三个函数可类似地积出来。

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \tanh x\,dx = \ln|\cosh x| + C$$
$$\int \coth x\,dx = \ln|\sinh x| + C$$

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - 1/2\ln(1+x^2)+C$$
$$\int \operatorname{arccot} x\,dx = x\operatorname{arccot} x + 1/2\ln(1+x^2)+C$$
$$\int \tanh^{-1}x\,dx = x\tanh^{-1}x + 1/2\ln(1-x^2)+C,\quad |x|<1$$
$$\int \coth^{-1}x\,dx = x\coth^{-1}x + 1/2\ln(x^2-1)+C,\quad |x|>1$$

$f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ 形式的被积函数，其中 $\varphi'(x)\neq 0$ 如果被积函数可以写成函数 $\varphi(x)$ 与其导数 $\varphi'(x)$ 的乘积，那么代换 $\varphi(x)=z$, $\varphi'(x)dx=dz$ 也导出 z 的一个易于积分的函数进而有积分 $\int z\,dz = z^2/2+C$。更加一般地，如

果被积函数具有 $f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ 形式，代换 $\varphi(x)=z$，$dx=\dfrac{dz}{\varphi'(x)}$，导出一个被积函数 $f(z)$，所以如果已知 $f(z)$ 的积分（例如，$f(z)=z^n$），则可求得 $f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ 的积分。

$$\boxed{\int\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\,dx=1/2[\varphi(x)]^2+C}$$

$$\boxed{\int\varphi^n(x)\cdot\varphi'(x)\,dx=\int z^n\,dz=\frac{1}{n+1}\varphi^{n+1}(x)+C}$$

【例】 1. $\int\sin x\cos x\,dx=\int\sin x\,d(\sin x)=\int z\,dz=z^2/2+C$
$=1/2\sin^2x+C$。

2. $\int\dfrac{\ln x}{x}\,dx=\int\ln x\,d(\ln x)=\int z\,dz=[\ln x]^2/2+C$。

3. $\int\dfrac{\arctan^5x}{1+x^2}\,dx=\int\arctan^5x\,d(\arctan x)$
$=\int z^5\,dz=z^6/6+C=1/6\arctan^6x+C$。

4. $\int(1-x^4)^7x^3\,dx=-1/4\int(1-x^4)^7(-4x^3dx)$
$=-1/4\int(1-x^4)^7\,d(1-x^4)=-1/4\int z^7\,dz$
$=-z^8/32+C=-(1-x^4)^8/32+C$。

5. $\int\dfrac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\dfrac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=1/2\int\dfrac{2x\,dx}{(x^2+1)^{3/2}}$
$=1/2\int\dfrac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^{3/2}}=1/2\int z^{-3/2}\,dz$
$=-1/2\cdot2z^{-1/2}+C=-1/\sqrt{x^2+1}+C$。

函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\sinh^{-1}x$ 和 $\cosh^{-1}x$ 的积分。 对于这些积分，分部积分导出 $\int\varphi(x)\varphi'(x)\,dx$ 形式的积分，它们除了积分常数以外有值 $\varphi^2/2$。例如，将 $\arcsin x$ 写成乘积 $1\cdot\arcsin x$，即取

$$u=\arcsin x,\quad v'=1,\quad v=x,$$

$$u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad vu'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

分部积分给出

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int \sinh^{-1}x\,dx = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2} + C$$
$$\int \cosh^{-1}x\,dx = x\cosh^{-1}x - \sqrt{x^2-1} + C$$

$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + 1/2\int \frac{dz}{z} = x\arcsin x + \sqrt{z} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$。其余三个函数可类似地处理。

用 $x=\varphi(z)$ 作新变元的代换 这种代换将被积函数 $f(x)$ 变换成复合函数 $f[\varphi(z)]$; 微分由 $dx=\varphi'(z)dz$ 关联起来, 积分取

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz$$

的形式。对于定积分，还必须根据反函数 $z=\psi(x)$ 将 x 区间的积分限变换成相应的 z 积分限。函数 $\varphi(z)$ 必须有反函数并且必须可微，其中 $\varphi'(z)\neq 0$。代换 $x=|a|z$, $dx=|a|dz$ 或 $x=(|a|/b)z$, $dx=(|a|/b)dz$ 导出下列积分:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C$$

对于 $|x|<|a|$; $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{|a|} + C$$

对于 $|x|<\left|\frac{a}{b}\right|$; $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{b}{a}x + C$

【例】 1. 为了在下面的积分中去掉平方根 $\sqrt{x}$，令 $x=\varphi(z)=z^2$, $dx=2z\,dz$。分部积分导出由 z 表达的积分；利用 $x=\varphi(z)$ 的反函数 $z=\psi(x)=\sqrt{x}$，得到

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^z\cdot 2z\,dz = 2\int ze^z\,dz = 2e^z(z-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C。$$

2. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx = 2[e^z(z-1)]_1^2 = 2e^2$; 对于 $x_1=1$ 和 $x_2=4$ 由 $z_1=+\sqrt{x}$ 得到新的积分限。

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi} \sin 2x\,dx = (1/2)\int_{-\pi}^{2\pi} \sin z\,dz$
$= -(1/2)[\cos z]_{-\pi}^{2\pi}$
$= -(1/2)(1+1) = -1$。

代换：$2x=z$，$dx=dz/2$；
$z_1=-2\pi/2=-\pi$；
$z_2=2\pi$。

4. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{5x}{4-x^2}\,dx = -(5/2)\int_4^1 \frac{dz}{z}$
$= -(5/2)\ln z|_4^1$
$= -(5/2)(\ln 1 - \ln 4)$
$= (5/2)\ln 4 = 5\ln 2$。

代换：$4-x^2=z$，
$-2x\,dx=dz$；
$x_1=0 \to z_1=4$，
$x_2=\sqrt{3} \to z_2=4-3=1$。

5. $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$
$= \int_{1/2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}$
$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\sin u\cos u}{\sin u\cos u}\,du$
$= 2[u]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2(\pi/2-\pi/4) = \pi/2$。

代换：$z=\ln x$，$dx=x\,dz$；
$x_1=\sqrt{e} \to z_1=1/2$，
$x_2=e \to z_2=1$。$z=\sin^2 u$，
$dz=2\sin u\cos u\,du$；
$z_1=1/2 \to u_1=\pi/4$，
$z_2=1 \to u_2=\pi/2$。

初等可积函数类

象 x^n，$\sin x$，e^x 这样一些可积函数 $f(x)$，它们的不定积分可以用初等函数的封闭形式来表达，这样的函数称做*初等可积的*(或者以初等方式可积的)。下面叙述最重要的一些初等可积函数类，连同求其不定积分的方法。

有理函数 $R(x)$，部分分式 每一个有理函数是初等可积的：因为 x 的任何幂都有一个初等积分，任何一个多项式也是如此。不是多项式的有理函数可以写成部分分式之和(见 **I**. 第5章)，并且可以积出来，因为对于一切自然数 $k>1$ 下面的每一个分式都可积出来：

$$\frac{A}{x-x_1},\quad \frac{A}{(x-x_1)^k},\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

其中，$p^2<4q$ 且 $A\neq 0$。

前两个表达式的积分是标准积分；后两个的分子总可以写成和式 $Ax+B=(2x+p)A/2+(B-Ap/2)$。第一项导出 $\int\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^k}$ 形式的积分，它是初等可积的；第二项是一个常数，它可以拿到积分外面。剩下的只要证明对于 $k=1, 2, \cdots$ 积分 $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$ 可以初等方式求出。

$$\int \frac{A}{x-x_1}dx = A\ln|x-x_1|+C; \int \frac{A\,dx}{(x-x_1)^k} = -\frac{A}{(k-1)(x-x_1)^{k-1}}+C$$

对于 $k=1$, 分母 x^2+px+q 通过配完全平方可以写成 $(x+p/2)^2+(q-p^2/4)$。代换 $x+p/2=\sqrt{q-p^2/4}\,u$, $dx=\sqrt{q-p^2/4}\,du$ 给出

$$\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\arctan u。$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

对于 $k>1$, 可以得到一个递推公式

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{c_1x+c_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + c_3\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}$$

其中待定系数 c_1, c_2, c_3 发现如下：首先两边微分，然后通乘 $(x^2+px+q)^k$ 去掉分式而得到恒等式

$$1 = -(k-1)(c_1x+c_2)(2x+p)+(c_1+c_3)(x^2+px+q);$$

现在使各次幂的系数相等：

x^2 的系数: $-2c_1(k-1)+c_1+c_3=0$。

x 的系数: $-2c_2(k-1)-c_1p(k-1)+(c_1+c_3)p=0$。

常数项: $-c_2p(k-1)+(c_1+c_3)q=1$。

这给出

$$c_1=\frac{2}{(k-1)(4q-p^2)},\ c_2=\frac{p}{(k-1)(4q-p^2)},\ c_3=\frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)}。$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}$$

这些结果也常常就分母 $(ax^2+bx+c)^k$ 而展示。

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx = \frac{-A}{2a(k-1)(ax^2+bx+c)^{k-1}}$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k} \quad \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}$$

$$=\frac{2ax+b}{(k-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{k-1}}$$

$$+\frac{2(2k-3)a}{(k-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{k-1}}$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \begin{cases} =\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot \arctan \dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C, \\ \text{若 } b^2-4ac<0 \\ =\dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot \ln \left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C, \\ \text{若 } b^2-4ac>0 \\ =\dfrac{-2}{2ax+b}+C,\ \text{若 } b^2-4ac=0 \end{cases}$$

【例】（假定已经分解成部分分式）

1. $$\int \frac{4x^2-7x+25}{x^3-6x^2+3x+10}\,dx = 2\int \frac{dx}{x+1} - 3\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-5}$$

$$=2\ln|x+1|-3\ln|x-2|+5\ln|x-5|+C$$

$$=\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-5)^5}{(x-2)^3}\right|+C。$$

2. $$\int \frac{3x^2-20x+20}{(x-2)^3(x-4)}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-2} + 6\int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$+4\int \frac{dx}{(x-2)^3} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-4}$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x-2| - \frac{6}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{3}{2}\ln|x-4| + C$$

$$=\frac{2(5-3x)}{(x-2)^2} + 3\ln\sqrt{\frac{x-2}{x-4}} + C。$$

3. $$\int \frac{3x^2-3x-10}{x^3-5x^2+11x-15}\,dx = \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{2x+5}{x^2-2x+5}\,dx$$

$$=\ln|x-3| + \ln|x^2-2x+5| + \frac{7}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C$$

$$=\ln|(x-3)(x^2-2x+5)| + \frac{7}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C。$$

4. $$\int \frac{-3x^3+x-4}{(x+1)(x^2+x+1)^2}\,dx = -2\int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{2x-3}{x^2+x+1}\,dx + \int\frac{8x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

$$= -2\ln|x+1| + \ln|x^2+x+1| - \frac{8}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\right| - 4\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2x+5}{x^2+x+1} + C。$$

函数 $R[x, \sqrt[n]{ax+b}]$ 或 $R[x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}]$ 的积分　被积函数是 x 和 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$ 的有理函数，即它们可以由 x 和 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或者 $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$ 通过有限次加、减、乘和除而得到。代换 $z=\sqrt[n]{ax+b}$，对此 $x=(z^n-b)/a$; 或者

$$z=\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)},$$

对此 $x=(b-dz^n)/(cz^n-a)$; 如同刚才证明的那样，这导出 z 的一个有理函数，可以初等方式积分。对于特殊形式的 R，积分可以用特别手段简化。

函数 $R[x, \sqrt{ax^2+bx+c}]$ 的积分　根据系数 a, b, c 的性质，各种各样的代换导出用新变量 z 表示的一个有理函数。

1. 如果 a 和 ax^2+bx+c 是正的，并且 $b^2\neq 4ac$，那末作代换

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+z。$$

2. 如果 c 非负，那末设

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz+\sqrt{c}。$$

3. 如果 a 是负的，并且方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异根 x_1 和 x_2，那末作代换

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z(x-x_1)。$$

特定函数 R 的积分表。

<table>
<tr><td colspan="3">$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$$
当 $a>0,\ b^2-4ac\neq 0$ 时</td></tr>
<tr><td>$I=-\frac{1}{\sqrt{-a}}$
$\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C$
当 $a<0,\ b^2-4ac>0$ 时</td><td>$I=\frac{1}{\sqrt{a}}$
$\operatorname{arcsin}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C$
当 $a>0,\ b^2-4ac<0$ 时</td><td>$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax$
$+b)+C$
当 $a>0$,
$b^2-4ac=0$ 时</td></tr>
</table>

另一种积分方法是在被积函数中配完全平方：

$$ax^2+bx+c=a\{[x+b/(2a)]^2+(4ac-b^2)/(4a^2)\},$$

使它成为旁边表中所列的形式之一，然后用所示的代换得到含有三角函数或双曲函数的有理表达式。

被积函数	代　换
$R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})$	$x=a\sin z$
$R(x,\ \sqrt{a^2+x^2})$	$x=a\sinh z$
$R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})$	$x=a\cosh z$

【例】 1. 代换 $x=\sin z,\ dx=\cos z\,dz,\ z=\arcsin x$，得

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2 z}\cos z\,dz=\int\cos^2 z\,dz$$
$$=(1/2)(z+\sin z\cos z)+C$$
$$=(1/2)(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+C。$$

2. 类似地，由 $x=r\sin z,\ dx=r\cos z\,dz$，得

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=(1/2)(r^2\arcsin x/r+x\sqrt{r^2-x^2})+C。$$

积　分	结　果	代 换
$\int\sqrt{1+x^2}\,dx$	$1/2[\sinh^{-1}x+x\sqrt{1+x^2}]+C$	$x=\sinh z$
$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$	$\pm(a^2/2)\sinh^{-1}x/a+(x/2)\sqrt{a^2+x^2}+C$ 当 $a\lessgtr 0$ 时	$x=$ $a\sinh z$
$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}$	$(1/ab)\tanh^{-1}(bx/a)+C$ 当 $\lvert x\rvert<\lvert a/b\rvert$ 时	$x=$ $(a/b)\tanh z$

函数 $R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)$的积分 通过代换 $z=\tan(x/2)$ 可以将函数变换成 z 的一个有理函数:

$$\sin x=2\sin(x/2)\cos(x/2)=\frac{2\tan(x/2)\cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)}=\frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$\tan x=\frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)}=\frac{2z}{1-z^2},$$

$$\cot x=\frac{1-z^2}{2z},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\cos^2(x/2)}=\frac{1+z^2}{2},\quad \frac{dx}{dz}=\frac{2}{1+z^2}。$$

$$\int R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)dx$$
$$=\int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1-z^2}, \frac{1-z^2}{2z}\right)\frac{2dz}{1+z^2}$$

【例】 1. $\int\frac{dx}{\sin x}=2\int\frac{1+z^2}{2z(1+z^2)}dz=\int\frac{dz}{z}=\ln(cz)=\ln(c\cdot\tan x/2)$。

2. $$\int\frac{1-\sin x}{\sin x(1-\cos x)}dx=\int\frac{[1-2z/(1+z^2)]\cdot[2/(1+z^2)]}{[2z/(1+z^2)][1-(1-z^2)/(1+z^2)]}dz$$
$$=(1/2)\int\frac{z^2-2z+1}{z^3}dz=(1/2)\int[1/z-2/z^2+1/z^3]dz$$
$$=(1/2)[\ln|z|+2/z-1/(2z^2)]+C$$
$$=(1/2)[\ln|\tan(x/2)|+2\cot(x/2)-(1/2)\cot^2(x/2)]+C。$$

函数 $R(\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x)$的积分 按照双曲函数的定义，可用代换 $e^x=t$ 将这些积分变成有理函数的积分，例如

$$\sinh x=[t-1/t]/2。$$

类似于三角函数的情况，代换 $z=\tanh(x/2)$ 也总能成功:

$$\sinh x=2\sinh(x/2)\cosh(x/2)=\frac{2\tanh(x/2)\cosh^2(x/2)}{\cosh^2(x/2)-\sinh^2(x/2)}$$
$$=\frac{2z}{1-z^2},$$

$$\cosh x=\frac{\sinh^2(x/2)+\cosh^2(x/2)}{\cosh^2(x/2)-\sinh^2(x/2)}=\frac{1+z^2}{1-z^2},$$

$$\tanh x=\frac{2\tanh(x/2)}{1+\tanh^2(x/2)}=\frac{2z}{1+z^2},\quad \coth x=\frac{1+z^2}{2z},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\cosh^2(x/2)}=\frac{\cosh^2(x/2)-\sinh^2(x/2)}{2\cosh^2(x/2)}=\frac{1-z^2}{2},$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{2}{1-z^2}。$$

二项积分 $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ 这里系数 a 和 b 是实数，而指数 m, n 和 p 是有理数。切比晓夫(P. L. Chebyshev, 1821～1894 年)定理表明，当数 p, $(m+1)/n$ 或 $(m+1)/n+p$ 中至少有一个是整数时，积分可以由初等函数来表达。如果 p 是一个整数，那末被积函数是有理指数的幂次之和，它可以积出来。如果 $(m+1)/n$ 是一个整数而 $p=s/r$，则令

$$z=\sqrt[r]{a+bx^n};$$

如果$(m+1)/n+p$ 是一个整数，则令 $z=\sqrt[r]{(a+bx^n)/x^n}$。

不能用初等函数表达的积分

计算椭圆弧长，圆摆的振荡周期以及其他一些问题，导出椭圆积分。这些积分的被积函数包含一个无重根的三次或二次多项式的平方根。

第一类和第二类椭圆积分	$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $0<k^2<1$

刘维尔(Joseph Liouville, 1809～1882 年)证明了它们属于那些不能用初等函数的封闭形式表达积分的类。还有其他一些属于这种类型的积分，具有比较简单的被积函数，诸如 $\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha-\cos x}}$, $\frac{\sin x}{x}$ 或者 $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$，但是这并不意味着这些积分不存在：如同已经证明的，连续函数的不定积分一样，它们是积分上限的可微函数。反之，这些不能用初等函数表达的积分在数学中接受为新的、高级的、非初等函数。它们常被这样地处理，首先将被积函数展开为无穷级数，然后逐项积分(见 II. 第 8 章)。

如果无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛并且每一项 $f_n(x)$ 可积，那么在$[a, b]$上逐项积分所得的级数也收敛。

7.3　多元函数的积分

因为定积分对于计算平面区域的面积特别有用，所以自然会指望推广它便于计算空间区域的体积。如果有界的连续函数

$$z=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

定义在 n 维空间中一个可测的有界区域 G 上，则将 G 分成有限个可测子集，并象在单重定积分的定义中那样，形成包含这些子集的体积以及在每个子集上 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)$ 的极大值和极小值的上和与下和。如果这些和当分法加细时趋于同一个极限，那末这个极限称为 f 在 G 上的 **n 重体积积分**。下面将详细讨论的二重体积积分，叫做**二重积分**；它可以用于计算由曲面所围的立体体积。然而，n 重积分的积分范围可以限制在低维的流形上。例如，对于 $n=3$，当说到**线积分**时，这个流形是 1 维曲线，或者讲到**曲面积分**时，流形是 2 维曲面。

二维积分

二重积分　定积分定义为和式的极限，其中每一项是两个因子的乘积，即子区间的长度 Δx_i 和在该子区间一点 ξ_i 的纵坐标 $f(\xi_i)$ 的乘积，子区间的数目 n 趋于无限并且最长的子区间长度趋于零。在 x 轴上的积分区间 $[a,\ b]$ 现在由一个平面区域 G 来代替，函数 $z=f(x,\ y)$ 就定义在这个平面区域上，将 G 分成 n 个子区域 ΔG_i，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。为了简化记号，ΔG_i 既记子区域也记它的面积。

假定在区域 G 中函数连续并有界。然后可由 ΔG_i 中的下确界 m_i 形成下和，再由 ΔG_i 中的上确界 M_i 形成上和。如果 G 的分法加细，当 $n\to\infty$ 和 $\Delta G_i\to 0$ 时，下和序列与上和序列趋于同一个极限，那末中间和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta G_i$ 的任何序列，无论中间点 ξ_i 在 ΔG_i 中怎样选取，都趋于这同一个极限。这个公共极限就被定义为函数 $z=f(x,\ y)$ 在区域 G 上的积分，并因为有两个积分变量，称之为二重积分。

二重积分	$\iint\limits_G f(x,\ y)dG=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \Delta G_i\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\,\Delta G_i=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \Delta G_i\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\,\Delta G_i$

如果函数 $z=f(x,\ y)$ 在 G 中有界且分段连续，那末也能保证这样的二重积分的存在性。如果二重积分存在，就称函数在 G 上可积。

二重积分的几何解释。 可以把单重定积分看作曲线下平面区域的面积。类似地，可以把二元连续函数的二重积分看作曲面 $z=f(x,y)$（倘若 $z=f(x,y)$ 在 G 中只取正值）下的体积（见图 7.3-1）。ΔG_i 是 x, y 平面中的面积元素，在极限过程之后它在笛卡尔坐标中记为 $dx\,dy$，在极坐标中记为 $r\,dr\,d\varphi$。每一个乘积 $m_i \Delta G_i$ 为底面积 ΔG_i 和高 m_i 的柱体体积，同样地 $M_i \Delta G_i$ 是高为 M_i 的类似柱体体积。因而对于曲面 $z=f(x,y)$ 下的体积 V 有 $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta G_i \leqslant V \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta G_i$。分法加细导致单调增加的下和序列与单调减少的上和序列；这两个序列有同一极限，因为相应的上和与下和之差的序列趋于零。

二重积分的计算 二重积分可以通过依次对每个变元所做的相继二次积分来计算。假定积分区域有一个简单边界，它与矩形 $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$，$b_1 \leqslant y \leqslant b_2$ 相交于点 A_1, A_2, B_1, B_2（见图 7.3-2）。点 A_1, A_2 将 G 的边界曲线分成两段弧：$A_1B_1A_2$，它是函数 $y=y_1(x)$ 的图形；以及 $A_1B_2A_2$，它是 $y=y_2(x)$ 的图形。类似地，B_1, B_2 将边界曲线分成由 $x=x_1(y)$ 与 $x=x_2(y)$ 给出的两段弧 $B_1A_1B_2$ 与 $B_1A_2B_2$。对于固定的 $x=\xi_i$ 而言，$y_1(\xi_i)$ 和 $y_2(\xi_i)$ 是区间 $y_1(\xi_i) \leqslant y \leqslant y_2(\xi_i)$ 的端点，在这个区间上应当对单变量 y 的函数 $f(\xi_i, y)$ 进行积分；对于固定的

$$x=\xi_i,\ \varphi(\xi_i)=\int_{y_1(\xi_i)}^{y_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)\,dy$$

是一个依赖于 x 的数，即在区间 $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$ 上 x 的函数 $\varphi(x)$。对 G 的边界曲线作适当假定，$\varphi(x)$ 便是 x 的连续函数，因此在区间 $[a_1, a_2]$ 上可

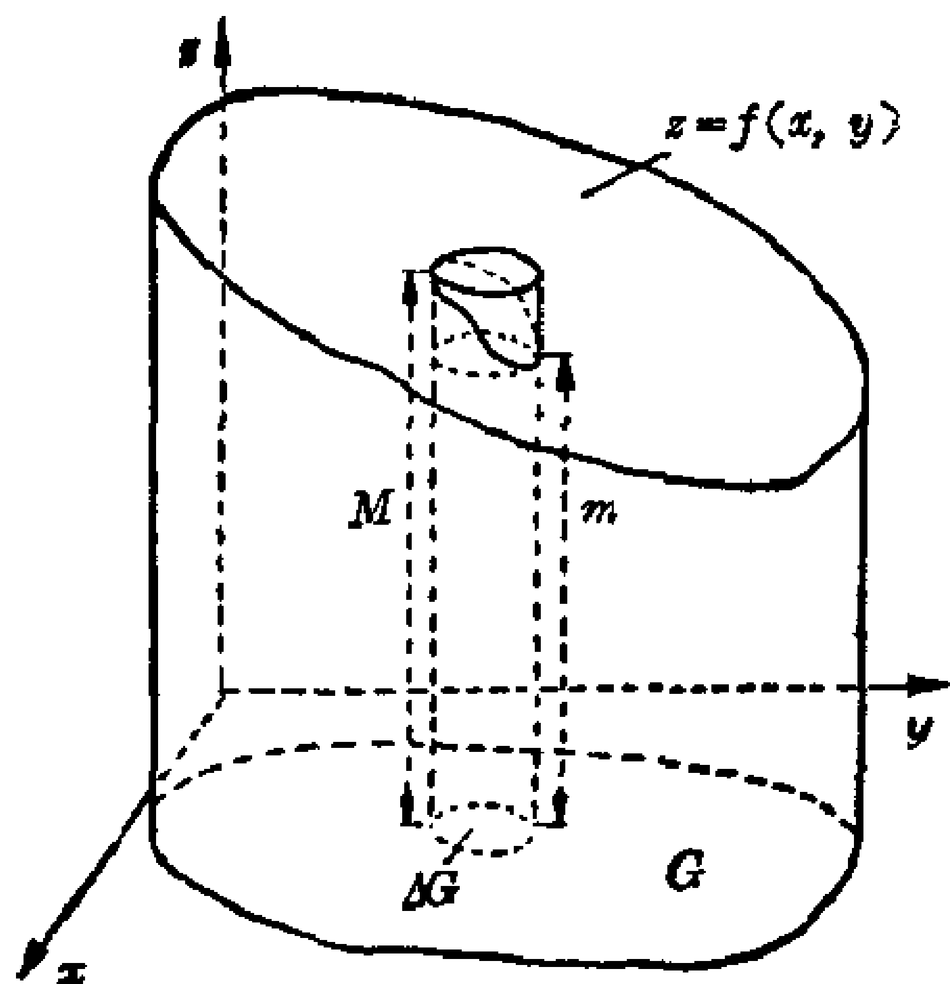


图 7.3-1 G 上曲面 $z=f(x,y)$ 底下的体积

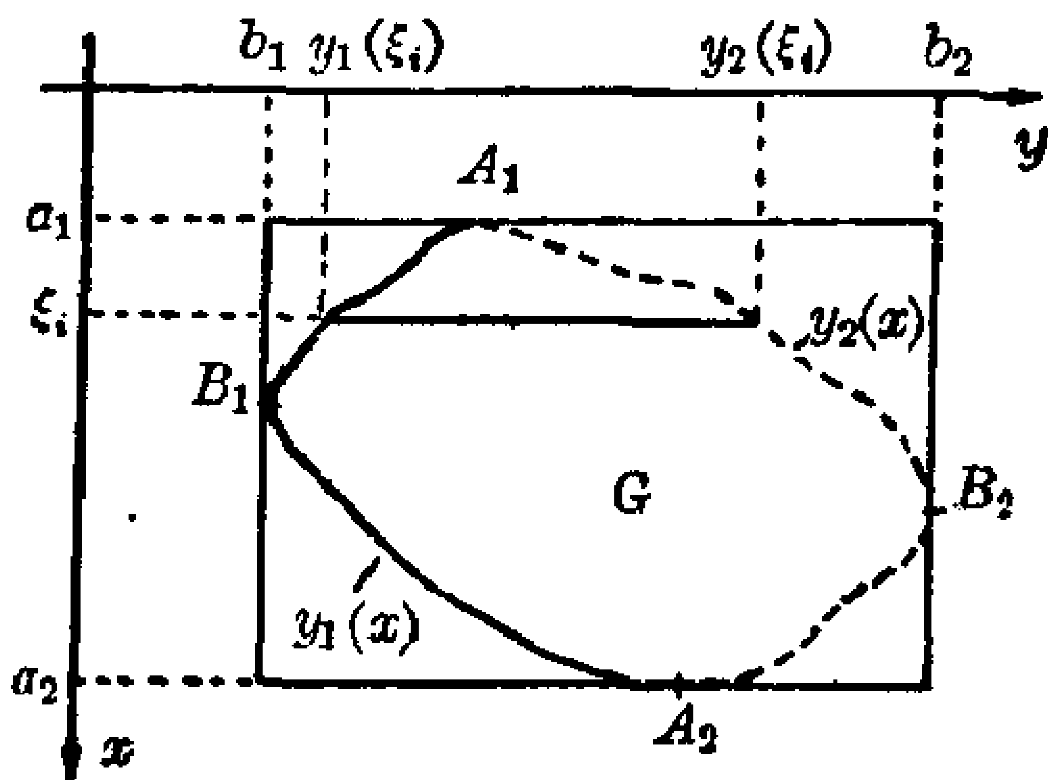


图 7.3-2 积分区域 G 的边界分解

积。类似地，对于固定的 $y=\eta_i$，$\psi(\eta_i)=\int_{x_1(\eta_i)}^{x_2(\eta_i)} f(x, \eta_i)dx$ 是一个依赖于 y 的数，并且作为在区间 $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$ 上连续函数 $\psi(y)$，它在这个区间上可积。可以证明，这两个逐次积分得出相同的值，也等于二重积分的值；这与几何上的想法相一致，$\varphi(x)$是曲面 $z=f(x, y)$之下平面区域 G 之上立体平行于 y, z 平面的截面面积，而 $\psi(y)$是同一个立体平行于 x, z 平面的截面面积。

$$\iint_G f(x, y)dG=\int_{x=a_1}^{x=a_2}\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy\right)dx=\int_{y=b_1}^{y=b_2}\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx\right)dy$$

对于在极坐标 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$ 中给定的函数 $\Phi(r, \varphi)$，面积元素 dG 取 $dG=r\,dr\,d\varphi$ 形式，这由计算雅可比行列式(见多重积分的变换)得出。

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & +r\cos\varphi \end{vmatrix}=r。$$

$$\iint_G \Phi(r, \varphi)dG=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \Phi(r, \varphi)r\,dr\,d\varphi$$

【例 1】 在二重积分 $\iint_G (x+y)dG$ 中，设 G 是在直线 $x=0$，$y=1$ 和 $x+y=3$ 之间的区域(见图 7.3-3)。对于固定的 x，从常限 $y_1=1$ 到变限 $y_2=3-x$ 作 y 积分

$$\varphi(x)=\int_1^{3-x} (x+y)dy=[xy+y^2/2]_1^{3-x}$$
$$=x(3-x)+(3-x)^2/2-(x+1/2)=4-x-x^2/2。$$

现在应当在 x 方向上求函数 $\varphi(x)$的积分；积分限是 $x=a_1=0$ 和 $x=a_2=2$，从而积分值为

$$\int_0^2 (4-x-x^2/2)dx=[4x-x^2/2-x^3/6]_0^2=8-2-4/3=14/3;$$

$$\int_0^2\int_1^{3-x} (x+y)dy\,dx=14/3。$$

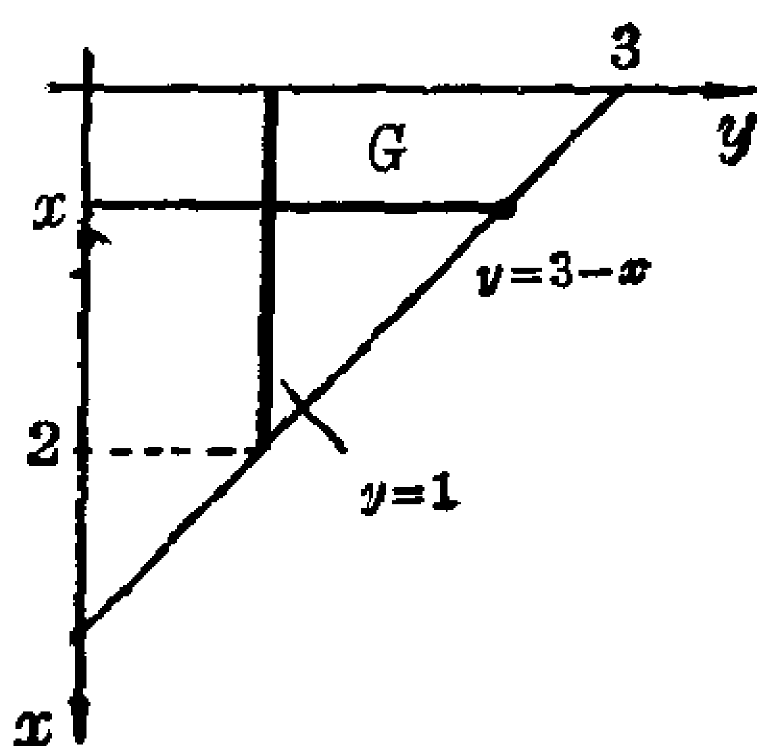


图 7.3-3 直线 $x=0$, $y=1$ 和 $x+y=3$ 之间的区域 G

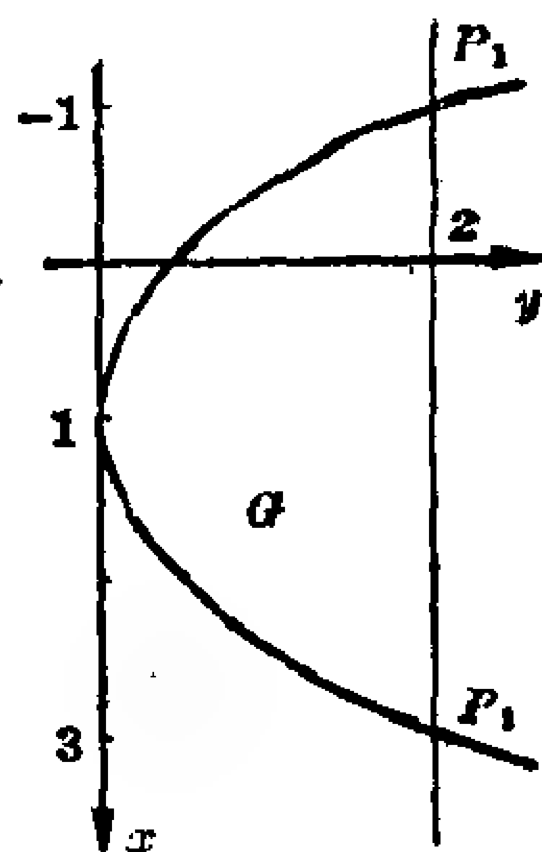


图 7.3-4 曲线 $(x-1)^2=2y$ 和 $y=2$ 之间的积分区域 G

【例 2】 在二重积分 $\iint_G xy\,dG$ 中，积分区域 G 由曲线 $(x-1)^2=2y$ 和 $y=2$ 围成，它们相交于点 $P_1(-1,\ 2)$ 和 $P_2(3,\ 2)$。因此 G 的边界是由函数 $y_1=2$, $y_2=(x-1)^2/2$ 或者 $x=1\pm\sqrt{2y}$ 所给定(见图 7.3-4)。

如果先进行 x 积分，那末演算比较简单。

$$\int_{1-\sqrt{2y}}^{1+\sqrt{2y}} xy\,dx=[yx^2/2]_{1-\sqrt{2y}}^{1+\sqrt{2y}}=1/2y\{[1+\sqrt{2y}]^2-[1-\sqrt{2y}]^2\}$$
$$=2\sqrt{2y^3};$$

$$2\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{y^3}\,dy=2\sqrt{2}\,[2/5y^2\sqrt{y}]_0^2$$
$$=32/5;$$

$$\int_0^2\int_{1-\sqrt{2y}}^{1+\sqrt{2y}} xy\,dx\,dy=32/5。$$

相反的积分次序计算是

$$\int_{(x-1)^2/2}^{2} xy\,dy=[xy^2/2]_{(x-1)^2/2}^{2}$$
$$=2x-(x-1)^4\cdot x/8$$
$$=-x^5/8+x^4/2-3x^3/4$$
$$+x^2/2+15x/8=\varphi(x),$$

$$\int_{-1}^{3}\varphi(x)dx=[-x^6/48+x^5/10$$
$$-3x^4/16+x^3/6$$
$$+15x^2/16]_{-1}^{3}=32/5。$$

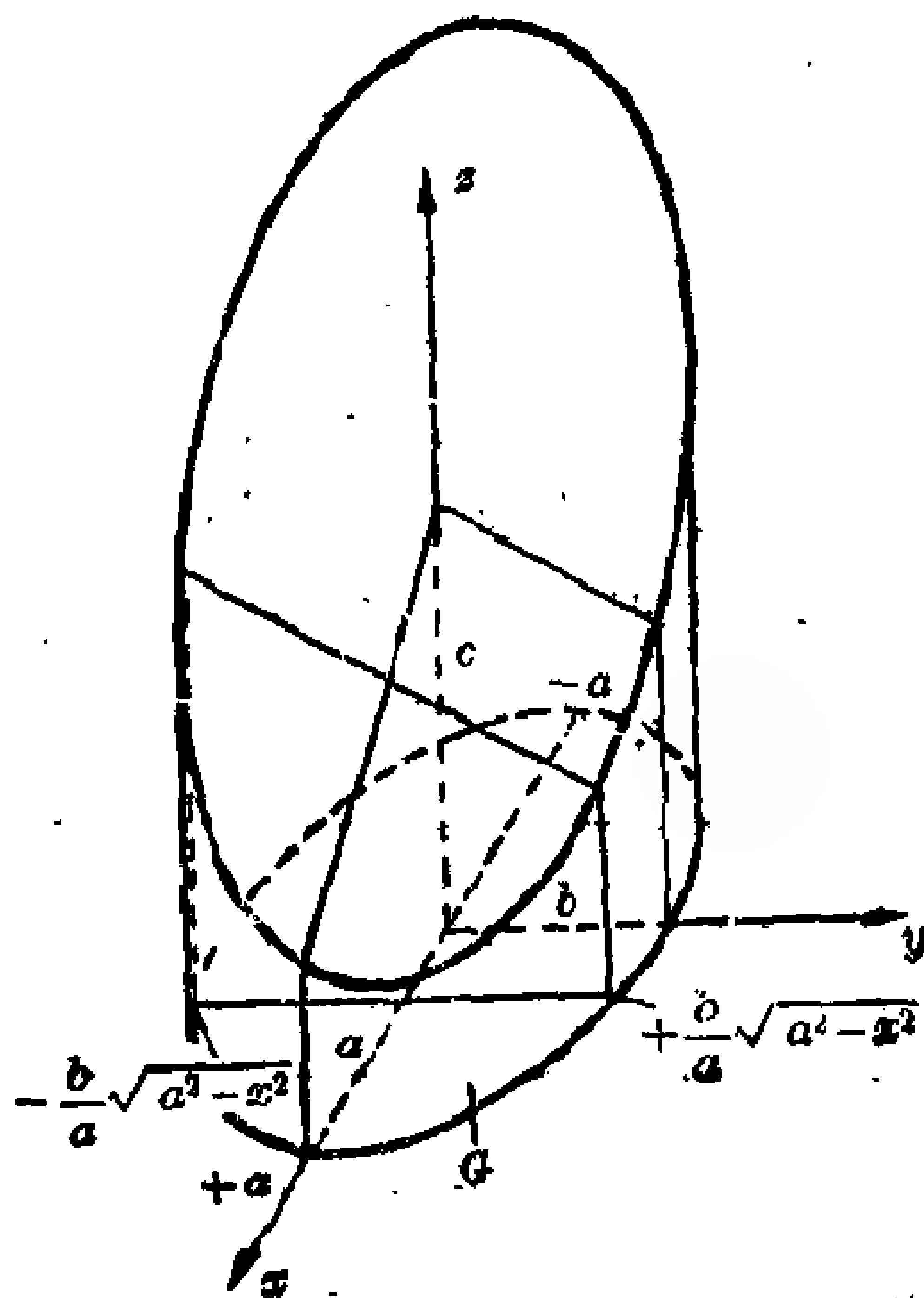


图 7.3-5 斜截椭圆柱

【例3】 直立在x, y平面的椭圆$x^2/a^2+y^2/b^2=1$上一个垂直柱体，被平面$z=f(x, y)=mx+ny+c$斜截，这里c取得足够大，使得平面$z=f(x, y)$与xy平面的交线在底椭圆的外面(见图7.3-5)。二重积分$\iint\limits_G(mx+ny+c)dG$给出这个斜截柱体的体积，其中区域$G$由椭圆$y=\pm(b/a)\sqrt{a^2-x^2}$围成。于是

$$
\begin{aligned}
V&=\int_{-a}^{+a}\left[\int_{-(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}^{+(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}(mx+ny+c)dy\right]dx\\
&=\int_{-a}^{a}[mxy+ny^2/2+cy]_{-(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}^{+(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}dx\\
&=\int_{-a}^{a}2(b/a)(mx+c)\sqrt{a^2-x^2}\,dx\\
&=2(b/a)\left[m\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx+c\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\right]。
\end{aligned}
$$

外带因子m的第一个积分为零(例如，可以用代换$a^2-x^2=z$, $-2x\,dx=dz$)，对于第二个积分代换$x=a\sin z$, $dx=a\cos z\,dz$得出积分值$a^2c\pi/2$。因此体积V有值$V=abc\pi$。

多重积分 正如二元函数的积分导致二重积分那样，三个或者更多个变量的函数的积分导致三重或多重积分。如果考虑三元函数，它定义在一个有界的三维区域R上，将R分成各个部分ΔR_i，又可形成下和$\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta R_i$，上和$\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta R_i$，以及中间和$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta R_i$。这里$m_i$和$M_i$是函数$f$在子区域$\Delta R_i$中的下确界和上确界，而$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$是$\Delta R_i$中某点的函数值。如果当$n\to\infty$并且$\Delta R_i\to 0$时下和与上和序列趋于一个公共极限，那末中间和也趋于这个极限，这个公共极限就定义为函数$f(x, y, z)$在区域R上的三重积分。

三重积分	$\iiint\limits_R f(x, y, z)dR=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \Delta R_i\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta R_i=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \Delta R_i\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta R_i$

在这个意义上任何一个在R中有界和连续的函数f是可积的。不再可能作出这种积分的几何解释，不过积分区域仍可在几何上想象为空间的一个区域；在力学中，要是$f(x, y, z)$为区域R中(x, y, z)的密度，那末积分可以解释为该区域的总质量。可以类似地定义三个以上变量的函数

的积分，即使积分区域不再具有一个直接的几何意义。几乎和二重积分一样，在关于积分区域的适当假定下，多重积分也可通过对每个变量所作的相继若干次积分来计算；积分限依赖于 R 边界的性质。

$$\iiint\limits_R f(x,\ y,\ z)dR=\int_{x=a_1}^{x=a_2}\left\{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left[\int_{z_1(y,x)}^{z_2(y,x)} f(x,\ y,\ z)dz\right]dy\right\}dx$$

多重积分的变换 在许多情况下不用直角(笛卡尔)坐标，而用其他坐标来描述区域 R 较为方便。取决于所研究的具体问题，最常用的是柱面和球面极坐标。

下面的图(见图 7.3-6) 显示了柱面坐标和球面极坐标的体积元素 ΔR。为了导出任意坐标系的体积元素，引用如下定理:

如果直角坐标 $x=x(u,\ v,\ w)$，$y=y(u,\ v,\ w)$，$z=z(u,\ v,\ w)$ 是坐标 $u,\ v,\ w$ 一一对应的连续可微函数，那末体积元素 dR 要乘以函数行列式(雅可比行列式)$D(u,\ v,\ w)$的绝对值。

$$D(u,\ v,\ w)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

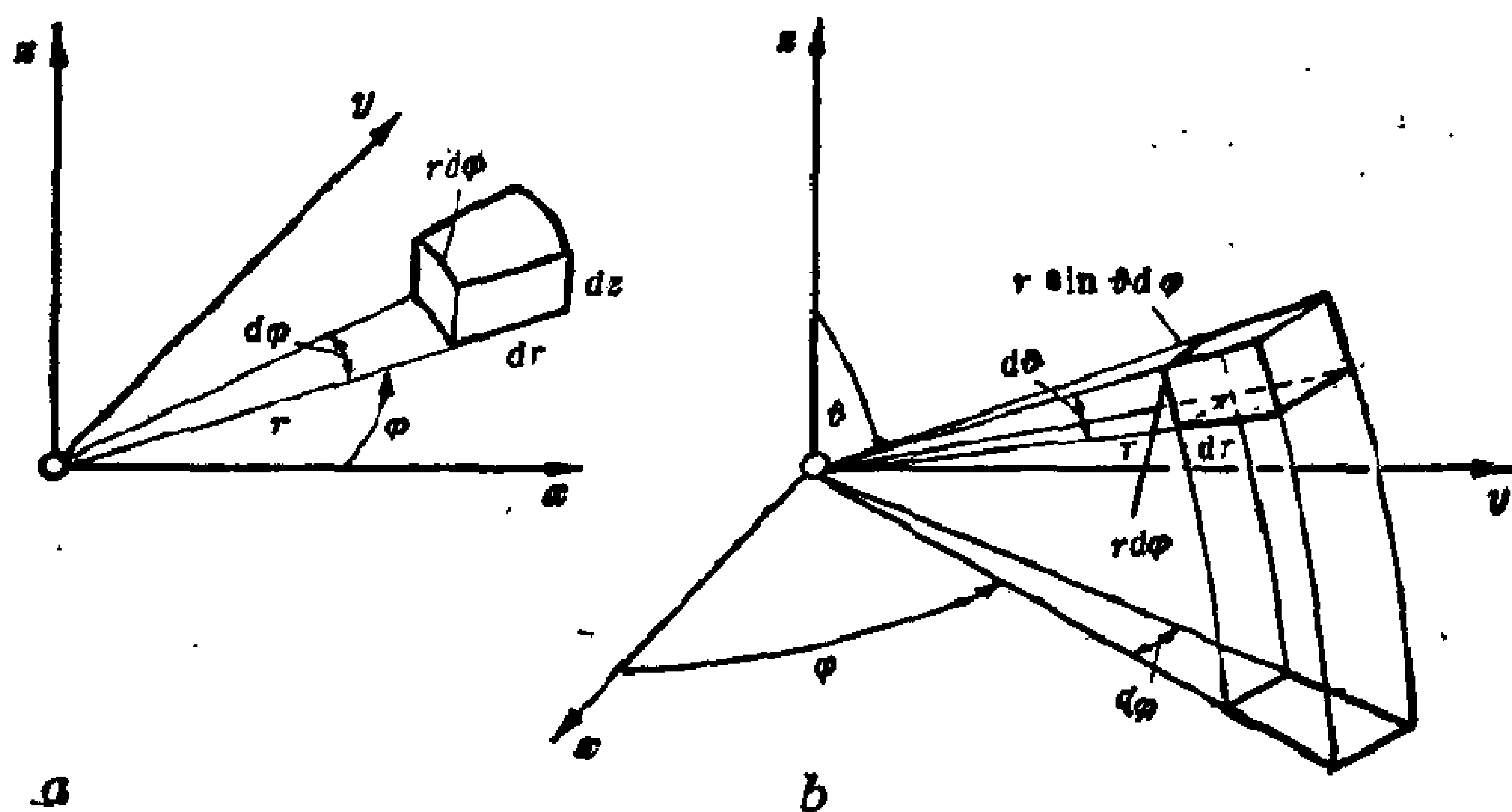


图 7.3-6 体积元素

a) 柱面坐标

b) 球面极坐标

这就是说，$dR=dx\,dy\,dz=|D|\,du\,dv\,dw$。对于柱面极坐标 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=z$，对于球面极坐标 $x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$，相应的行列式 D_c 和 D_s 结果为

$$D_c=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -r\sin\varphi & +r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix},$$

$$D_s=\begin{vmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\\ r\cos\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\\ -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & 0\end{vmatrix},$$

即 $D_c=r$ 和 $D_s=r^2\sin\vartheta$，所以 dR 分别变成 $r\,dr\,d\varphi\,dz$ 和 $r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$。

$$\iiint_R f(x,\ y,\ z)dR=\int_{z_1}^{z_2}\int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)}\int_{r_1(\varphi,z)}^{r_2(\varphi,z)}F(r,\ \varphi,\ z)r\,dr\,d\varphi\,dz$$
$$=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\vartheta_1(\varphi)}^{\vartheta_2(\varphi)}\int_{r_1(\vartheta,\varphi)}^{r_2(\vartheta,\varphi)}\Phi(r,\ \vartheta,\ \varphi)r^2\sin^2\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

求体积法

多重积分在立体 B 之体积 V 的计算中有重要的应用。已知二重积分 $\iint_G f(x,\ y)dx\,dy$ 代表底为 G 以及上界为 $z=f(x,\ y)$ 的柱体体积，由此得出横截面为 G 以及上界与下界为 $z=f_1(x,\ y)$，$z=f_2(x,\ y)$ 的柱体具有体积 $V=\iint_G[f_1(x,y)-f_2(x,y)]dx\,dy$。用这个方式能求得任何一个可由有限个这样的柱体拼成的物体之体积；在实际应用中出现的大多数物体 B 具有这种形式。B 的体积也可表达为三重积分 $\iiint_B dV$，其中 B 的边界曲面的形状确定积分限；特别地，如果插入 z 的界限并进行 z 积分，那末剩下的就是已经讨论过的二重积分。如果 B 具有分片光滑的边界曲面，那末由高斯积分定理，提供计算 B 之体积的另外一个方法。这个公式指出

$$V=\iiint_B dV=1/3\iint_{\partial B}\boldsymbol{rn}\,dS.$$

这里 ∂B 是 B 的边界，dS 是曲面元素，$\boldsymbol{n}$ 是外法线，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是向

量场；这将体积的计算化成曲面积分的赋值。

由横截面积计算体积 假定物体参考笛卡尔坐标 x, y, z 并介于两个垂直于 x 轴的平面 $x=a$, $x=b$ 之间，还假定已知物体垂直于 x 轴的横截面积，由连续函数 $q(x)$ 给出，于是可以想象物体是由厚度为 Δx_i 的薄片组成的(见图 7.3-7)。在每个薄片中存在最小的横截面积 q_i 和最大的横截面积 Q_i；第 i 个薄片的体积 V_i 介于高为 Δx_i 底面积为 q_i 的柱体体积与底面积为 Q_i 的类似柱体体积之间。如同求面积那样，当 $n\to\infty$ 并且 $\Delta x_i\to 0$ 时，作为对体积 V 的逼近，下和 $\underline{V}(n)$ 与上和 $\overline{V}(n)$

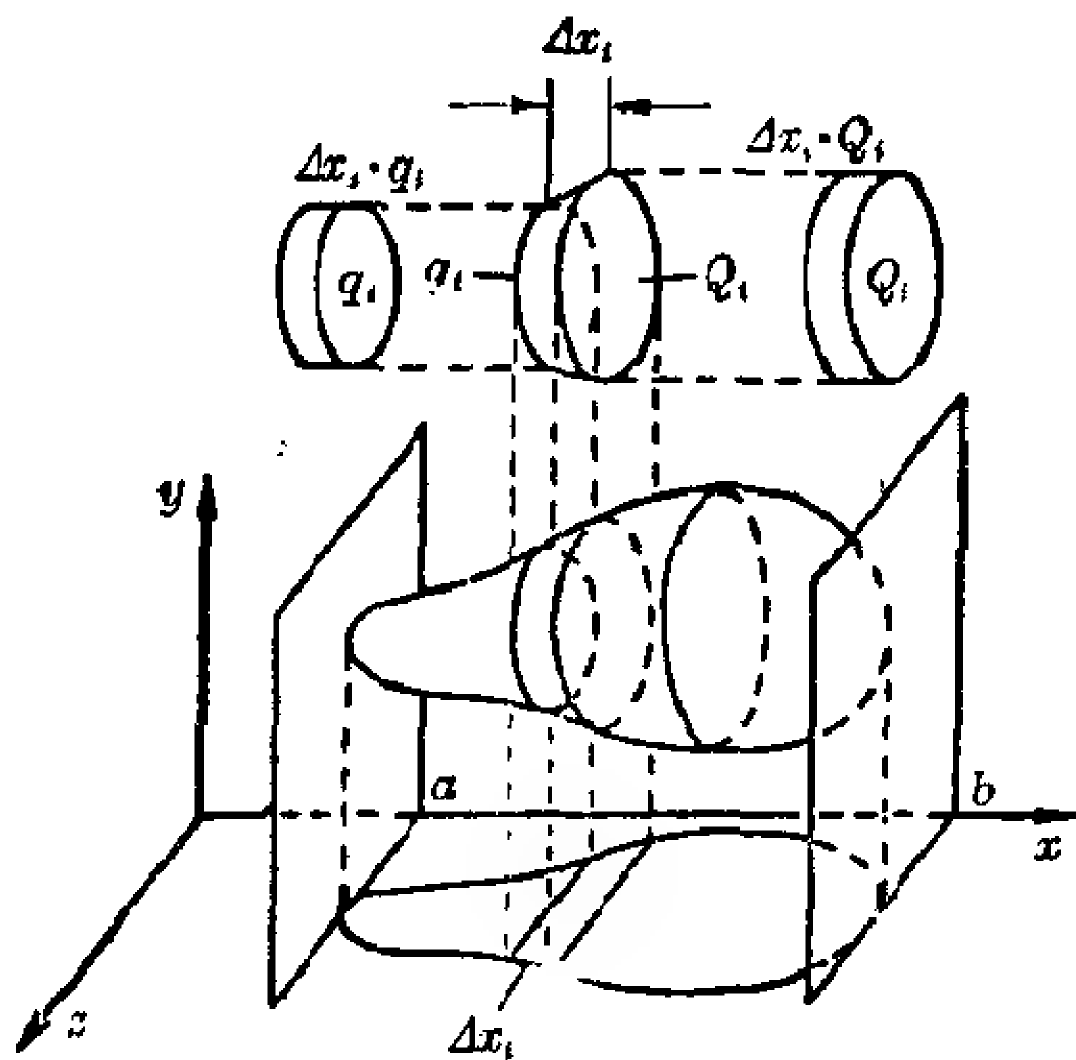


图 7.3-7 立体的求积

$$\underline{V}(n)=\sum_{i=1}^{n} q_i \Delta x_i \leqslant V \leqslant \sum_{i=1}^{n} Q_i \Delta x_i = \overline{V}(n)$$

具有同一个极限值。因此体积 V 可以表示为定积分。

$$\boxed{V=\int_a^b q(x)dx}$$

卡瓦列利原理 如果另一个物体在 $[a, b]$ 中对于每个 x 有横截面 $\bar{q}(x)$ 与 $q(x)$ 相同，即有 $\bar{q}(x)\equiv q(x)$，那末这两个物体的体积 $\overline{V}$ 和 V 相等。在积分演算出现之前，卡瓦列利就提出了这个原理。

在两张平行平面之间的两个物体，如果它们被任何一个与这两张平面平行的平面所截的横截面积相等，那末它们的体积相等。

旋转体的体积 具有某些对称性的立体常常可看作具有由一条曲线旋转而生成的边界；例如，球面是由一个半圆绕它的直径旋转而得的。这样的物体就叫做*旋转体*。如果它的表面是由连续曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转而得，或者由 $x=\varphi(y)$ 绕 y 轴旋转而得，那末由垂直于该轴的平面所截的横截面是面积为 $q(x)=\pi[f(x)]^2$ 或者 $q(y)=\pi[\varphi(y)]^2$ 的圆域。如果旋转体以平面 $x=x_1$, $x=x_2$, 或者 $y=y_1$, $y=y_2$ 为边界，那末下列公式给出其体积。

旋转轴	横 截 面 面 积	体 积
x 轴	$q(x)=\pi[f(x)]^2$	$V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,dx$
y 轴	$q(y)=\pi[\varphi(y)]^2$	$V_y=\pi\int_{y_2}^{y_1}[\varphi(y)]^2\,dy$

如果立体是一条由几段弧连接起来的连续曲线旋转而得，那末最好是把各片的体积加起来。象计算两条曲线之间的面积那样，也可对于两个适当的函数的平方差进行积分，

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}\{[g(x)]^2-[h(x)]^2\}\,dx。$$

【例1】 曲线 $y=f(x)=x^2/36$ 在界限 $x_1=0$ 和 $x_2=12$ 之间a) 绕 x 轴，b) 绕 y 轴旋转(见图 7.3-8)。要计算相应的旋转体的体积:

a) $V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,dx=\pi\int_0^{12}(x^4/1296)\,dx=192\pi/5\approx120.6$。

b) 利用 $x=\varphi(y)=6\sqrt{y}$ 和 $y_1=f(0)=0$, $y_2=f(12)=4$ 得到

$$V_y=\pi\int_{y_1}^{y_2}[\varphi(y)]^2\,dy=\pi\int_0^4 36y\,dy=288\pi\approx908.4。$$

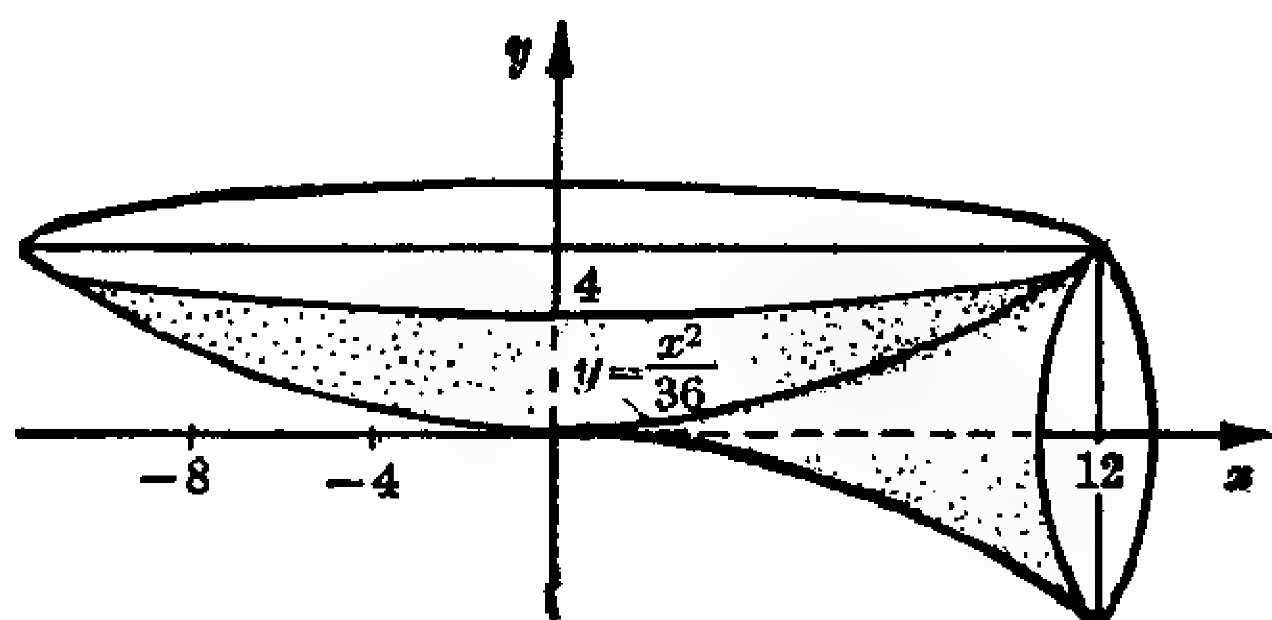


图 7.3-8 绕 x 轴和绕 y 轴的旋转

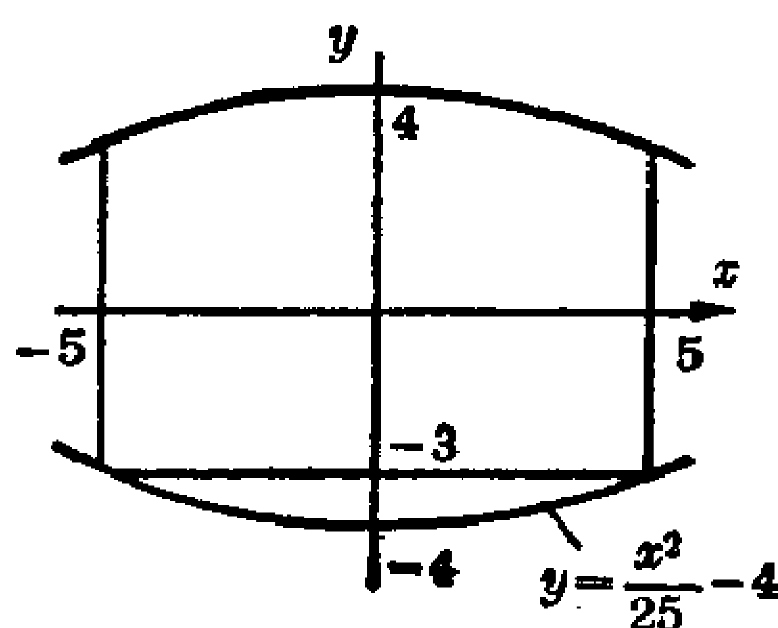


图 7.3-9 作为旋转抛物面的酒桶

【例2】 酒桶的表面是由在两个界限之间的一段抛物线 $y=ax^2+c$ 绕 x 轴旋转而成。桶的长度为 1 m，两端的直径为 60 cm，最大直径是 80 cm (见图 7.3-9)。

抛物线方程中的常数以及积分限都可以从已知的尺寸导出:

$$y=x^2/25-4,\ x_1=-5,\ x_2=5,$$

这给出体积

$$V_x=\pi\int_{-5}^{5}(x^4/25^2-8x^2/25+16)dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{5}(x^4/25^2-8x^2/25+16)dx\approx 425.2。$$

酒桶容量为 425.21。

【例 3】 抛物线 $y^2=2px$ 与圆 $y^2=r^2-(x-c)^2$ 在横坐标为 x_1 和 x_2 的点相交(见图 7.3-10)。在圆内抛物线之外的区域绕 x 轴旋转，生成一个高为 $h=x_2-x_1$ 的抛物球环。根据

$$V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2}2px\,dx-\pi\int_{x_1}^{x_2}[r^2-(r-c)^2]dx$$

$$=\pi\int_{x_1}^{x_2}[2px-r^2+(x-c)^2]dx$$

来计算它的体积。

因为被积函数在 x_1 和 x_2 处为零，并且因为 x^2 的系数为 1，所以可设 $2px-r^2+(x-c)^2=(x-x_1)(x-x_2)$，于是

$$V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx。$$

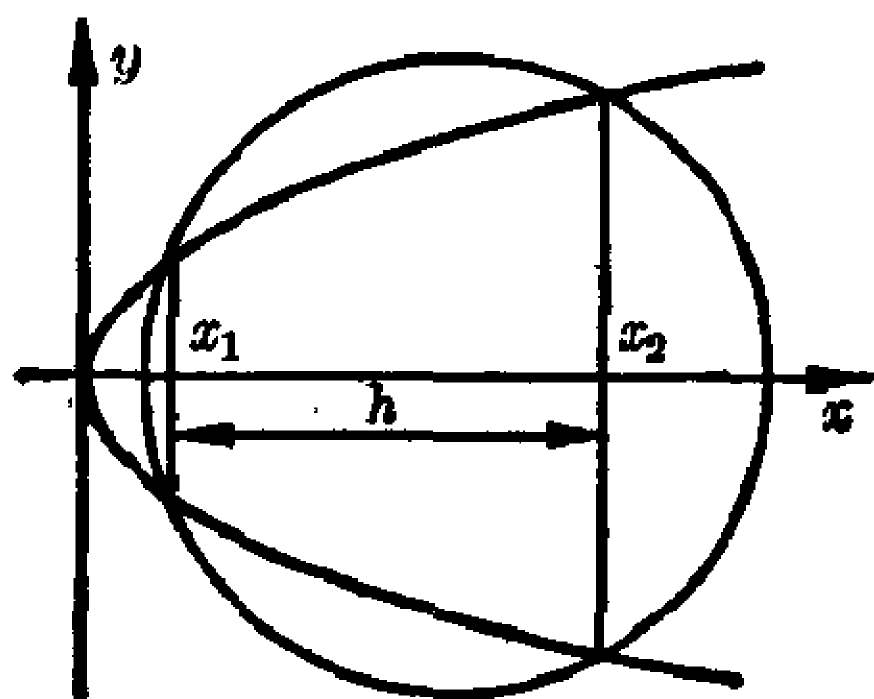


图7 3-10 抛物球环

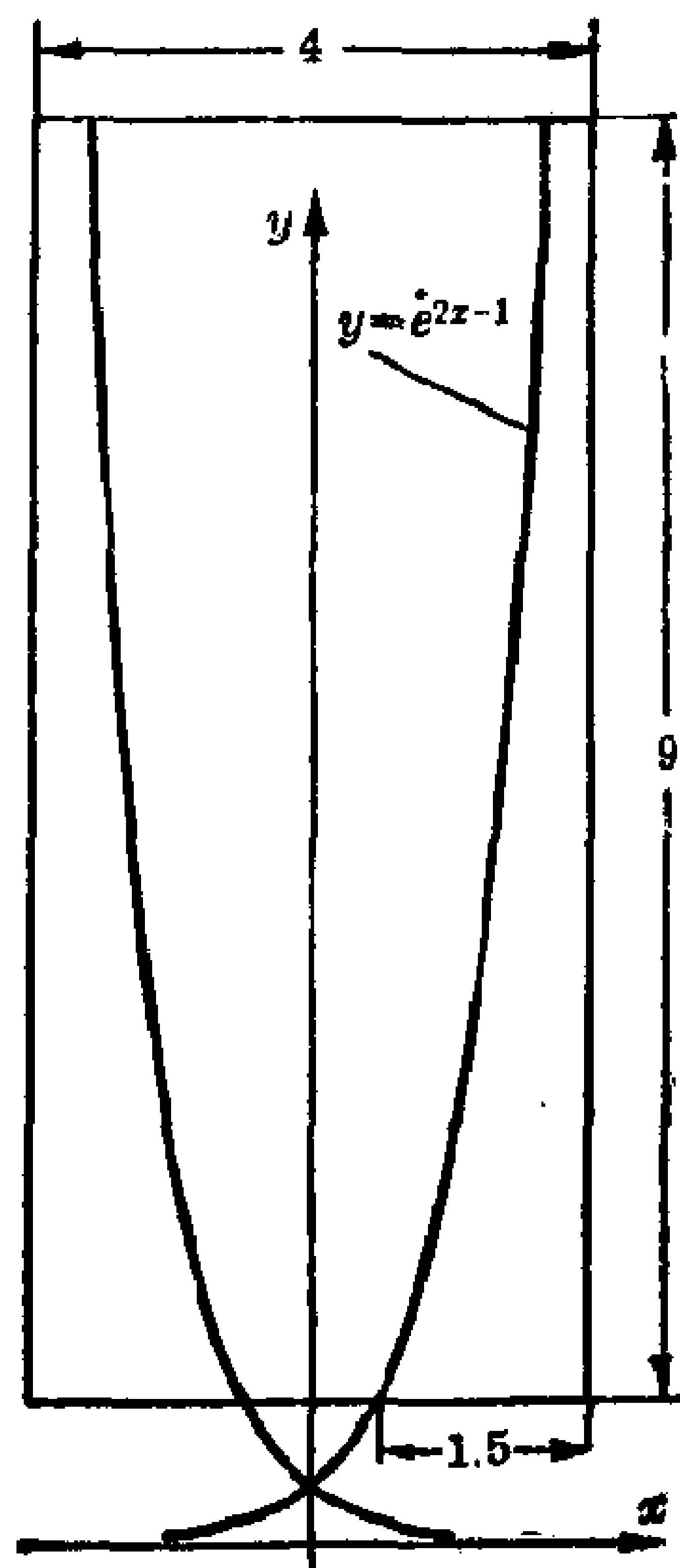


图 7.3-11 绕 y 轴旋转

代换 $x-x_1=t$，导出

$$V_x=\pi\int_0^h t(h-t)dt=\pi h^3/6;$$

这个结果和圆柱球环的一样。

【例 4】 图形(见图 7.3-11)表示一根钢柱，其中由曲线 $y=e^{2x-1}$ 绕

y 轴旋转而镗了一个孔。孔的容积为 $V_y=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy$。根据图形所给的尺寸，得到积分限为 $y_1=1$ 和 $y_2=10$。用 y 解出 x 的方程再平方得

$$x^2=(1/4)(\ln^2y+2\ln y+1)。$$

因此所求的容积是

$$\begin{aligned}V_y&=(\pi/4)\int_1^{10}(\ln^2y+2\ln y+1)dy\\&=(\pi/4)[y\ln^2y+y]_1^{10}\approx48.73。\end{aligned}$$

弧长和曲面面积

求长就是计算曲线一段弧的长度，曲面求积就是计算一片曲面的面积。

弧长 虽然曲径小道总有长度这在直观上似乎是显而易见的，不过还需要数学上精确的定义。考虑一段曲线弧，它的方程为 $y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，这里函数 f 连续可微。将此弧分成 n 段，分点为 $P_0, P_1, \cdots, P_n$，再将曲线弧与多边形 $P_0P_1\cdots P_n$ 作比较，可以期望当 n 很大时多边形很好地逼近这曲线。如果分点 P_i，$i=0, 1, \cdots, n$，的坐标为 (x_i, y_i)，那末由

$$L_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\Delta x_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

给定弦 $P_{i-1}P_i$ 的长度 l_i，进而多边形的长度为

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i。$$

按照微分中值定理，在区间 $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$ 中存在一个位置 ξ_i，使导数 $f'(\xi_i)$ 等于差商 $\Delta y_i/\Delta x_i$，所以 $l_i=\Delta x_i\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}$（见图 7.3-12）。从 $x_0=a$ 到 $x_n=b$ 区间的每一个划分都产生一个长度为 S_n 的多边形。如果将这划分加细，使得子区间的数目 n 趋于无限并且最大子区间长度 Δx_i 趋于零，那末由于 $f'(x)$ 的连续性以及定积分作为和式极限的定义，内接多边形长度的序列 S_n 有极限值

$$S=\int_a\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx。$$

一条连续曲线叫做可求长的，如果对于 $[a, b]$ 一切可能的划分，其内接多边形的长度 S_n 保持有界的话，然后这些长度的上确界 S 称为这条曲线的弧长；还可以证明，随着划分的加细 S 就是 S_n 的极限，

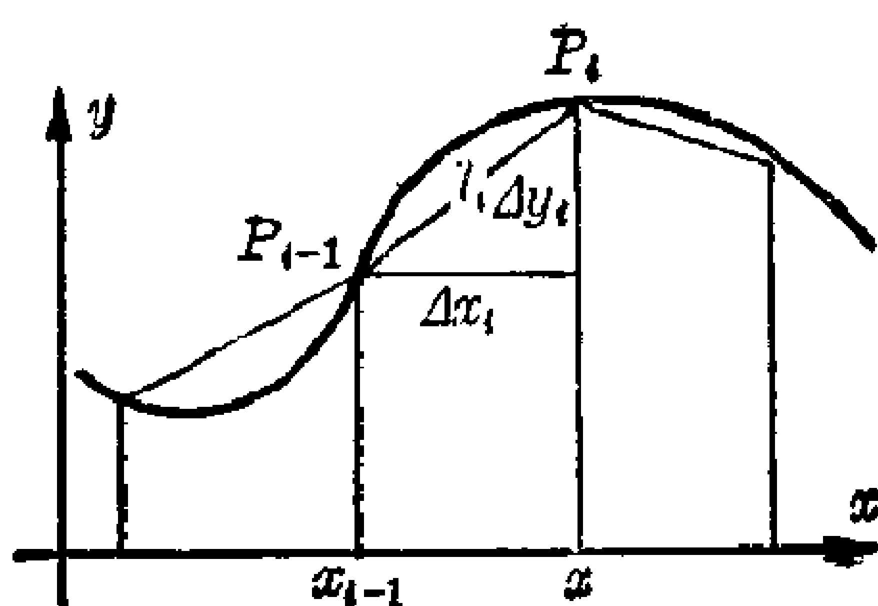


图 7.3-12 平面曲线的长度

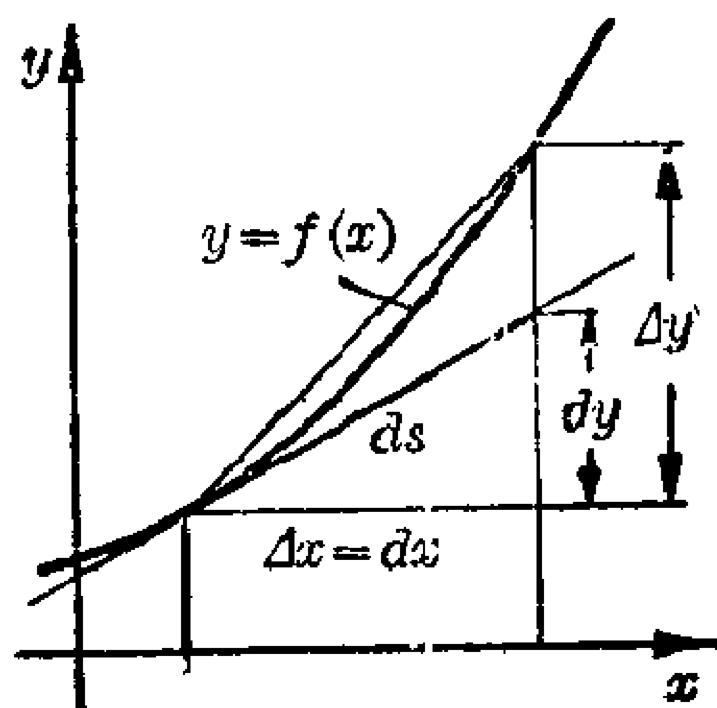


图 7.3-13 弧长元素

$$S=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}} S_n。$$

上述推导证明了，如果 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续可微，那末这条曲线是可求长的。如果连续曲线是可求长的，但 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 并不连续可微，那末一般地说不可能直接计算弧长。

弧 长	直角坐标	参数形式	极 坐 标
	$S=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$	$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$	$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2}\,d\varphi$

弧长元素 对于固定的下限和可变的上限，曲线的长度是上限变量的函数，即 $s(x)=\int_a^x\sqrt{1+y'^2}\,dx$。这个函数的微分 ds 常常叫做曲线的**弧长元素**，所以长度就是弧长元素的积分(见图 7.3-13)。

弧 长 元 素
$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$

【例 1】 对于半径为 r 的圆周，得到

$$y=\sqrt{r^2-x^2};\ y'=-x/\sqrt{r^2-x^2};\ 1+y'^2=r^2/(r^2-x^2)。$$

因此周长 C 给出如

$$C=4\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=4r\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=4r[\arcsin t]_0^1=2\pi r。$$

【例 2】 对于以参数形式 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 表示的旋轮线，有 $\dot{x}=a(1-\cos t)$, $\dot{y}=a\sin t$, 所以弧长元素是

$$\begin{aligned}ds&=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt\\&=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt\\&=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos t}\,dt=a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2 t/2}\,dt\\&=(2a\sin t/2)dt。\end{aligned}$$

这就给出弧长

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin t/2dt=-4a[\cos t/2]_0^{2\pi}=8a。$$

因此尖旋轮线的全弧长是生成该旋轮线的滚动圆直径的四倍。

曲面面积 曲面的面积由曲面积分给出。下面导出旋转曲面的面积公式。设 P_1 和 P_n 是连续可微曲线 $y=f(x)$ 上对应于 $x_1=a$ 和 $x_n=b$ 的点；于是从 P_1 到 P_n 的曲线弧绕 x 轴旋转形成一个旋转曲面。和弧长的讨论相同，如果用一个 $n-1$ 边形来代替这段弧，那末相应的旋转曲面是一些平截头圆锥体的侧面之和。这种侧面有代表性的曲面面积为

$$\begin{aligned}\sigma_\nu&=\pi[f(x_\nu)+f(x_{\nu+1})]\sqrt{(\Delta x_\nu)^2+(\Delta y_\nu)^2}\\&=\pi[f(x_\nu)+f(x_{\nu+1})]\Delta x_\nu\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_\nu}{\Delta x_\nu}\right)^2}。\end{aligned}$$

根据微分中值定理，在 $(x_\nu,\ x_{\nu+1})$ 中存在一个 ξ_ν，使 $f'(\xi_\nu)=\Delta y_\nu/\Delta x_\nu$。因此这些曲面面积的和是

$$S_n=\pi\sum_{\nu=1}^{n-1}[f(x_\nu)+f(x_{\nu+1})]\sqrt{1+(f'(\xi_\nu))^2}\,\Delta x_\nu。$$

与曲线弧长相同，区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 划分的加细导致对于和式 S_n 极限值的改善的逼近，而这个极限值可表达成为一个定积分。出现因子2是由于 $f(x_\nu)$ 和 $f(x_{\nu+1})$ 同时出现在 S_n 中。利用弧长元素也导出公式

$$S=2\pi\int_{s_1}^{s_2}y\,ds。$$

旋转曲面的面积	$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

【例】 由 $y=\sqrt{r^2-x^2}$，$1+y'^2=r^2/(r^2-x^2)$，所以球、球冠和球带的曲面面积公式是：

球面：$S=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,r/\sqrt{r^2-x^2}\,dx=4\pi r\int_0^r dx=4\pi r^2$。

球冠：$S_0=2\pi r\int_\xi^r dx=2\pi r(r-\xi)=2\pi rh$，其中 $h=r-\xi$。

球带：$S_b=2\pi r\int_{\xi_1}^{\xi_2}dx=2\pi r(\xi_2-\xi_1)=2\pi rh$，其中 $h=\xi_2-\xi_1$。

线积分和曲面积分

线积分 为了对功、势等这类物理概念给予数学形式，宜将原先作为和式极限的积分概念加以一般化，使和式中的被加数依赖于曲线的一定方向，即积分路径。这就引出**线积分**的概念。

假定三维空间中一条光滑曲线 C 以参数形式由具有连续一阶导数的函数 $x=x(s)$, $y=y(s)$ 和 $z=z(s)$ 给定。例如，参数可以是弧长 s。进一步，设 $f(x, y, z)$ 是一个连续函数，它的定义域包含对应于参数区间 $\sigma_1\leqslant s\leqslant\sigma_2$ 的曲线弧 AB。于是对于区间 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 中的每个 s 对应于曲线上的一个点 $P[x(s), y(s), z(s)]$，在这个点函数取值 $f[x(s), y(s), z(s)]$，所以现在有一个关于参数 s 的函数。如果将该曲线分成 n 段弧，或者相当于同一回事，将区间 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 分成 n 个子区间 Δs_i，再形成和式 $\sum_{i=1}^{n}f[x(s_i), y(s_i), z(s_i)]\Delta s_i$，其中 s_i 是子区间 Δs_i 中的任意一个参数值，这样得到和的一个序列。如果当最大子区间的长度趋于零和子区间的数目增加到无限的时候，这个序列趋于一个极限，而如果这个极限并不依赖于子区间以及中间点 s_i 的选取，那末这个极限就称做函数 $f(x, y, z)$ 沿曲线 C 从 A 到 B 的第一类线积分。

线积分	$\int_C f(x, y, z)ds=\lim\limits_{\substack{\Delta s_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}f[x(s_i), y(s_i), z(s_i)]\Delta s_i$

这种积分的计算可以化成定积分的计算。如果 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 是曲线 C 的任意一个参数表示（弧 AB 对应于参数区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$），那末因为 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}$，所以有：

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z)ds&=\int_{t_1}^{t_2}f[x(t), y(t), z(t)]\frac{ds}{dt}dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}\,dt\end{aligned}$$

如果 $P(x, y, z)$, $Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 是连续函数，那末可以类似地定义另一类型的线积分 $\int_C P(x, y, z)dx$, $\int_C Q(x, y, z)dy$, $\int_C R(x,y,z)dz$;

例如，这里第一个积分是和式 $\sum_{i=1}^{n} P[x_i(s), y_i(s), z_i(s)]\Delta x_i$ 的极限，Δx_i 是曲线划分中第 i 段弧在 x 轴上的投影。如果这三个积分加在一起就得到**第二类线积分**

$$\int_C [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz]。$$

二维空间中这样一个积分的计算常常可以应用下述定理来化简。

如果 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是函数 $F(x, y)$ 的全微分 $dF(x, y)$，并且如果 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在连通区域 G 内连续，那末线积分 $\int_C [P(x, y)dx+Q(x, y)dy]$ 的值仅取决于 G 内积分路径的端点 A 和 B 而与连结 A 到 B 的特定路径无关。

这是由于

$$\int_C [P(x, y)dx+Q(x, y)dy] = \int_C dF(x, y) = \int_{t_1}^{t_2} dF(x, y)$$
$$= F[x(t_1), y(t_1)] - F[x(t_2), y(t_2)]$$

只取决于积分上下限这个事实得出。一种等价的命题是对于区域 G 内的每一条封闭曲线 C，线积分 $\int_C [Pdx+Qdy]$ 为零。

从高斯定理(见散度和高斯定理)很容易推出下述定理，它对于 $Pdx+Qdy$ 是全微分提供一个准则。

如果所讨论的区域 G 是单连通的，并且如果函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 G 内是连续可微的，那末可积条件

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

是 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 为全微分的充分必要条件。

在 **II.** 第9章中将要证明，如果 $Pdx+Qdy$ 不是一个全微分，那末总能找到一个积分因子 $\mu(x, y)$，使得乘积 $\mu(x, y)(Pdx+Qdy)$ 是一个全微分。

可积条件	$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

【例】 为了沿抛物线 $y=x^2$ 从 $A(0, 0)$ 到 $B(2, 4)$ 计算积分

$\int_C(x\,dx+y\,dy)$，取 x 为参数。于是 $dy=2x\,dx$，而

$$\int_C(x\,dx+y\,dy)=\int_0^2(x\,dx+x^2\cdot 2x\,dx)=\int_0^2(x+2x^3)dx$$
$$=[x^2/2+x^4/2]_0^2=10。$$

因为满足可积条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以这个积分与积分路径无关；例如，沿曲线 $y=4\sin(\pi x/4)$ 从 $A(0,\ 0)$ 到 $B(2,\ 4)$ 积分仍旧产生和前面一样的结果。

曲面积分 正如线积分推广单重定积分那样，曲面积分是平面区域上二重积分的类似推广。假定在三维空间笛卡尔坐标 $(x,\ y,\ z)$ 下；$\mathbf{S}$ 是以分段光滑曲线为边界的光滑曲面；这里"光滑"的意思是指在 $\mathbf{S}$ 的内点上切平面连续地依赖于它的切点。设 $\mathbf{S}$ 有参数表示(见 II. 第13章) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$，其中参数 u 和 v 在区域 $U=\{u_1\leqslant u\leqslant u_2,\ v_1\leqslant v\leqslant v_2\}$ 上变化，并且设 $f(x,\ y,\ z)$ 是定义在 $\mathbf{S}$ 上的一个连续函数。将 $\mathbf{S}$ 划分成由 $\mathbf{S}$ 上光滑曲线网构成的一些小部分 S_i，在每个 S_i 中选择任意一点 $P_i(x_i,y_i,z_i)$，再形成和式 $\sum_{i=1}^{n}f(x_i,\ y_i,\ z_i)\Delta S_i$，其中 ΔS_i 是 S_i 的曲面面积。如果当 $n\to\infty$ 并且 $\Delta S_i\to 0$ 时这个和式趋于一个极限值，它与点 P_i 的选择无关，那末这个极限就叫做函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在曲面 $\mathbf{S}$ 上的曲面积分，并记为 $\int_{\mathbf{S}}f(x,\ y,\ z)d\mathbf{S}$。

曲面积分	$\int_{\mathbf{S}}f(x,\ y,\ z)d\mathbf{S}=\lim\limits_{\substack{\Delta S_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,\ y_i,\ z_i)\Delta S_i$

曲面积分的计算可以化成二重积分的如下计算：将坐标 $x,\ y,\ z$ 的参数表示插入 $f(x,\ y,\ z)$ 中去；曲面元素 $d\mathbf{S}$(见 II. 第13章)具有形式

$d\mathbf{S}=\sqrt{EG-F^2}$，其中 $E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u$，$F=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v$，$G=\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v$。因而

$$\int_{\mathbf{S}}f(x,\ y,\ z)d\mathbf{S}=\int_V f[x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)]\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv。$$

当 $f=1$ 时，这个积分得出 $\mathbf{S}$ 的曲面面积。

第二类曲面积分类似于第二类线积分那样定义。

在力学中的应用

功 借助于第二类线积分来定义"由力作功"的概念。力 $\boldsymbol{F}$ 是一个

静力矩 质点关于一轴的静力矩 M，定义为质点到该轴的距离 l 与质量 m 的乘积。

连续质量分布的静力矩
$M=\int l\,dm=\rho\int_V l\,dV$

对于连续质量分布的质量元素 dm 的静力矩 dM，成立微分表达式 $dM=l\cdot dm$，进而用积分得到整个质量的静力矩。如果 ρ 是常密度，dV 是体积元素，那末 $dm=\rho dV$。为了定义曲线 $y=f(x)$ 底下的区域关于各个坐标轴的静力矩，可简单地设想这个区域上有厚度 $d=1$ 的物体，计算密度 $\rho=1$ 的连续质量分布的静力矩(见图 7.3-15)。为了计算曲线 $y=f(x)$ 底下的区域关于 y 轴的静力矩，将区域分解成一些宽度为 $\Delta x=dx$ 的狭条。根据积分中值定理，狭条面积是 $f(\xi)dx$，ξ 是 Δx 中的某个中间值，因而狭条的力矩是 $dM=\xi f(\xi)dx$。于是积分给出该区域的力矩。为了得到关于 x 轴的力矩，将上述的各个狭条分解成为一些幅度为 $\Delta y=dy$ 的元素。这元素具有力矩 $dM=\eta\,dy\,dx$，其中 η 是 Δy 中的某个中间值，再按 y 方向积分产生 $dM=\int_0^y\eta\,dy\,dx$ 作为狭条关于 x 轴的力矩。最后，对于 x 的积分产生该区域的总力矩。

a 和 b 之间曲线 $y=f(x)$ 底下的区域关于 y 轴的静力矩	$M_y=\int_a^b xy\,dx$
a 和 b 之间曲线 $y=f(x)$ 下面的区域关于 x 轴的静力矩	$M_x=\int_a^b\int_0^y\eta\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx$

类似地一条曲线的静力矩可由考虑沿此曲线的密度 $\rho=1$ 的均匀质量分布而求得；关于 x 轴和 y 轴的力矩分别为

$$M_x=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad 和 \quad M_y=\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx。$$

对于绕 x 轴的一个旋转体，可以计算关于过原点垂直于 x 轴的平面的静力矩，它为

$$M=\pi\int_a^b xy^2\,dx。$$

$M=\pi\int_a^b xy^2\,dx$

质心 每一个固体都可以看作一个质点系，而且总存在一个点，即质心。可以想象物体的全部质量集中在这个点上。连续质量分布的静力矩等于质心关于同一个轴的静力矩：$M=\int_m l\,dm=l_c m$。运用适当的静力矩，可以得到沿一条平面曲线，在一个平面区域上以及在一个旋转体上均匀分布的质心坐标：

$x_c=M_y/s$ 和 $y_c=M_x/s$；$x_c=M_y/A$ 和 $y_c=M_x/A$；$x_c=M/V$

质心坐标$(x_c,\ y_c)$		
a）均匀分布在平面曲线上	b）均匀分布在曲线 $y=f(x)$ 底下的区域	c）绕 x 轴的均匀旋转体
$x_c=\dfrac{M_y}{s}=\dfrac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx}$	$x_c=\dfrac{M_y}{A}=\dfrac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}$	$x_c=\dfrac{M}{V}=\dfrac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}$
$y_c=\dfrac{M_x}{s}=\dfrac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx}$	$y_c=\dfrac{M_x}{A}=\dfrac{\int_a^b y^2\,dx}{2\int_a^b y\,dx}$	$y_c=z_c=0$

对于绕 x 轴的旋转体，质心落在 x 轴上，即 $y_c=z_c=0$。

【例】 计算在 0 和 $\pi/2$ 之间曲线 $\theta=f(x)=\cos x$ 底下区域的质心坐标。面积是 $A=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=1$，所要求的积分可在每个情况下由分部积分得到：$\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx=\pi/2-1$，$\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\pi/4$。于是质心坐标公式导出 $x_c=\pi/2-1$，$y_c=\pi/8$。这公式引出帕普斯 (Pappus) 法则。绕 x 轴的旋转体所生成的区域具有静力矩 $M_x=(1/2)\int_a^b y^2\,dx$ 以及质心纵坐标 $y_c=M_x/A$。对于旋转体的体积，这给出关系

$$V_a=\pi\int_a^b y^2dx=2\pi\cdot 1/2\int_a^b y^2\,dx=2\pi M_x=2\pi y_c A。$$

旋转体体积的帕普斯法则：体积是被旋转的面积与其质心所运行的路径长度的乘积。

由曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转生成的旋转体表面积；这条曲线具有静力矩 $M_x=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$，它的质心坐标为 $y_c=M_x/s$。由此得出曲面面积为 $S_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi M_x=2\pi y_c s$。

旋转曲面面积的帕普斯法则：曲面面积是母曲线的长度与其质心所运行路径长度的乘积。

惯性矩 质量 M 和速度 v 的物体动能 W 为 $W=v^2M/2$。如果一个刚体绕固定轴 A 旋转，那末它的各个部分具有不同的速度。如果 ω 记常角速度，x 记质量元素 dm 与旋转轴的距离，那末这个元素具有速度 $v=x\omega$，从而动能 $dW=(1/2)x^2\omega^2dm$。整个物体的动能由积分得到为

$$W=(1/2)\omega^2\int_m x^2\,dm,$$

这里积分取遍所有质量元素。

轴向惯性矩	$I_A=\int_m x^2\,dm$	dm 质量元素；x 或 r 是与旋转轴或参考点 P 的距离
极点惯性矩	$I_P=\int_m r^2\,dm$	

如果比较两个动能表达式，那末注意到质量 M 为积分 $\int_m x^2\,dm$ 所替代；这叫做关于旋转轴 A 的**轴向惯性矩** I_A（见图 7.3-16）。如果惯性矩不是关于参考轴 A 定义的，而是关于参考点 P 定义的，那末得到**极点惯性矩** I_P。

利用关系式 $r^2=x^2+y^2$，其中 r, x, y 是质量元素与原点和两个轴的距离，可以在关于笛卡尔直角坐标系原点 O 的极点惯性矩 I_P 和关于两个坐标轴的轴向惯性矩 I_x 和 I_y 之间得到一个重要关系。这样，

$$I_P=\int_m r^2\,dm=\int_m (x^2+y^2)dm=\int_m x^2\,dm+\int_m y^2\,dm=I_x+I_y。$$

极点惯性矩和轴向惯性矩之间的联系	$I_P=I_x+I_y$

【例 1】 长为 l，横截面积为 q，均匀密度为 ρ 的一根细杆，求出关

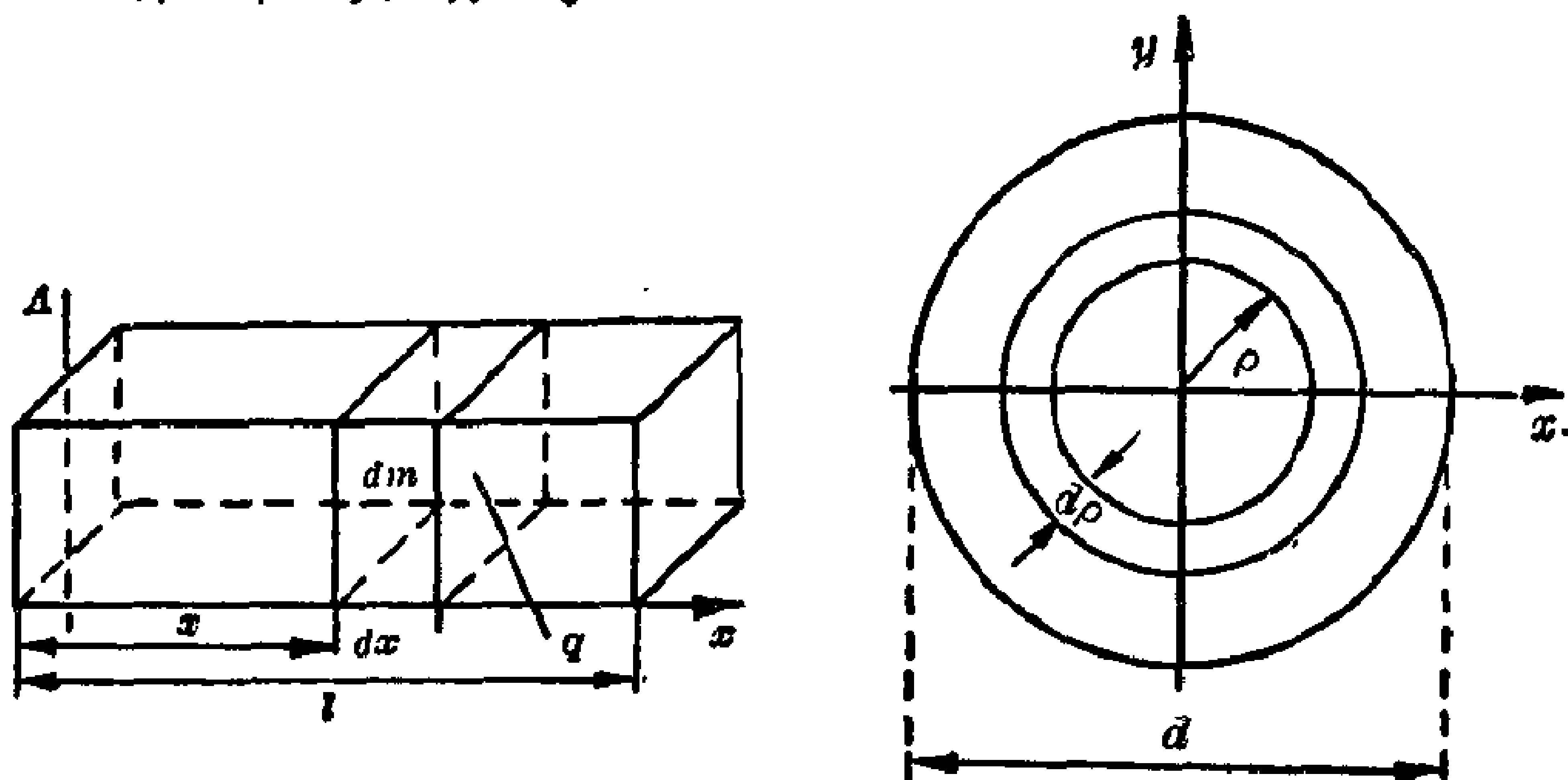


图 7.3-16　惯性矩

于过其一端点且与它成直角的轴的惯性矩(见图 7.3-16)。如果 dx 是细杆的长度元素，相应的质量元素是 $dm=\rho q\,dx$。因此

$$I_1=\int_m x^2\,dm=\int_0^l x^2\rho q\,dx=\rho q\int_0^l x^2\,dx=q\rho l^3/3=Ml^2/3,$$

因为细杆的总质量是 ρql。

【例 2】 求一个直径为 d 的薄圆盘关于圆心和过圆心的直线的惯性矩(见图 7.3-16)。为了简单起见，假定单位面积的质量是 1。首先计算极点惯性矩 I_P。图中圆环的质量 dm 是 $dm=2\pi\rho\,d\rho$，所以

$$I_P=\int_0^r\rho^2\,dm=2\pi\int_0^r\rho^3\,d\rho=\pi r^4/2=\pi d^4/32。$$

由于对称性，$I_x=I_y$，因此 $I_P=I_x+I_y=2I_x$，$I_x=I_P/2$，所以轴向惯性矩是 $I_x=I_y=\pi d^4/64$。

斯坦纳(Steiner)定理。设 I_C 是物体关于过其质心的轴 C 的惯性矩。关于平行于 C 且与 C 相距 a 的轴 A 的惯性矩 I_A 显然是

$$I_A=\int_m(x+a)^2\,dm=\int_m(x^2+2xa+a^2)dm=I_C+2a\int_m x\,dm+a^2m。$$

然而 x 表示与轴 C 的距离，所以积分 $\int_m x\,dm$ 是关于此轴的惯性矩，又因为轴 C 过质心，所以它是零。

斯坦纳定理。物体关于任意一轴的惯性矩 I_A 等于它关于过其质心且平行于 A 的轴 C 的惯性矩加上其质量与 A 到 C 距离平方的乘积。

斯　坦　纳　定　理	$I_A=I_C+a^2m$

式。下面是一个等价的定义:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(x+\Delta x,\ y,\ z,\ t)-\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z,\ t)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial w}{\partial x}\boldsymbol{k},$$

类似地,

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial w}{\partial y}\boldsymbol{k},\quad \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{j}+\frac{\partial w}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial t}\boldsymbol{j}+\frac{\partial w}{\partial t}\boldsymbol{k}。$$

这就是说,微分是按照通常的规则以分量方式进行。例如,设 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 是向量函数,φ 是一个纯量函数;那末成立乘积的微分法则:

1) $\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{a}$, $\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\boldsymbol{a})$, $\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\boldsymbol{a})$, $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\boldsymbol{a})$亦然;

2) $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial x}\cdot\boldsymbol{a}_2$, $\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2)$, $\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2)$,
$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2)$亦然;

3) $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{a}_1\times\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial x}\times\boldsymbol{a}_2$, $\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)$, $\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)$,
$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)$亦然。

为简单起见,下面将假设所有出现的函数和偏导数都是连续的,所以偏导数的次序可以交换;例如 $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}$(见 **II**. 第6章)。

向量函数最重要的特殊情况是:

1. 场向量 $\boldsymbol{a}$ 不明显地依赖于时间变量 t,所以具有形式

$$\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z)=u(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i}+v(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j}+w(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k};$$

于是此场称为定常场。

2. 场依赖于一个纯量参数 t,它不一定与时间变量等同;于是 $u=x(t)$, $v=y(t)$, $w=z(t)$,或者

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}。$$

随着 t 变化,位置向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在空间描绘出一条路径;如果现在 t 是时间变量,$\boldsymbol{r}(t)$是质点的位置,那末导数

在任一方向上φ的导数等于梯度到这个方向上的投影。

位势 构成梯度的运算从一个纯量场 $\varphi=\varphi(\boldsymbol{r})$ 引出一个向量场 $\mathrm{grad}\varphi$。一般地，反方向不行，亦即并不是每一个向量场都是某个纯量场的梯度；成为梯度的向量场 $\boldsymbol{a}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 叫做保守场，φ 就叫 $\boldsymbol{a}$ 的位势(见 **II**. 第 24 章)。

考虑线积分 $\int_{P_0}^{P}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int_{P_0}^{P}(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$，并设积分路径按参数形式 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ 给定，所以可将线积分写成一个寻常积分

$$\int_{t_0}^{t}\left(\boldsymbol{a}\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)dt=\int_{t_0}^{t}\left[u(t)\,\frac{dx}{dt}+v(t)\frac{dy}{dt}+w(t)\frac{dz}{dt}\right]dt。$$

一般地，这个积分不仅依赖于积分路径的两个端点 P_0 和 P，而且还依赖于整个路径。然而，如果向量场

$$\boldsymbol{a}=u(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i}+v(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j}+w(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k}$$

和积分路径 $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ 定义在一个单连通区域 G 内并且有连续导数，那末线积分与路径无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\varphi$。于是成立下面的定理:

一个保守向量的线积分独立于积分路径，而等于位势在积分路径的起点和终点之间的差。反之，如果线积分 $\int\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ 只取决于路径的端点，那末 $\boldsymbol{a}$ 是位势 φ 的梯度。

等价的命题是:

在单连通区域 G 内线积分 $\oint\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ 对 G 内任一封闭曲线都为零，当且仅当存在某个纯量函数 φ，有 $\boldsymbol{a}=\mathbf{grad}\varphi$。

在单连通区域 G 内，$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\,\varphi$ 的充分必要条件是

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z},$$

也就是，$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{a}\equiv 0$ (见旋度和斯托克司定理)。

【例】 沿以原点为中心的单位圆计算积分 $\oint(-y\,dx+x\,dy)$。单位圆有参数表示 $x=\cos t,\ y=\sin t$。因此

$$\oint(-y\,dx+x\,dy)=\int_0^{2\pi}[-\sin t(-\sin t)+\cos t(\cos t)]dt$$
$$=\int_0^{2\pi}[\sin^2 t+\cos^2 t]dt=2\pi。$$

积分不为零，亦即向量场 $\boldsymbol{a}=-x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 不是保守场；这从 $\frac{\partial u}{\partial y}=-1$ 而

$$\frac{\partial v}{\partial x}=+1$$

也可以推出。

散度和高斯定理

散度 散度是一个可从向量场

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\bar{u}(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i}+\bar{v}(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j}+\bar{w}(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k}$$

导出的纯量场。作为一种辅助解释，可以将场 $\boldsymbol{a}$ 想象为密度

$$\rho=\rho(x,\ y,\ z)$$

的流体的**速度场**。假定流体的流动是定常的，亦即 $\boldsymbol{a}$ 和 ρ 不显式依赖于时间。x 分量 $\bar{u}\boldsymbol{i}$ 代表一个流体质点每单位时间在 x 方向所走过的距离。如果考虑一个小长方体，其棱平行于坐标轴(见图 7.4-4)，那末在单位时间内穿过垂直于 x 轴的侧面 $dA_1=dy\,dz$ 流入的流体体积是 $dA_1\bar{u}=\bar{u}\,dy\,dz$，因此每单位时间流入的质量是 $\rho\bar{u}\,dy\,dz$。经过元素 $dA_2=dy\,dz$ 流出的质量是

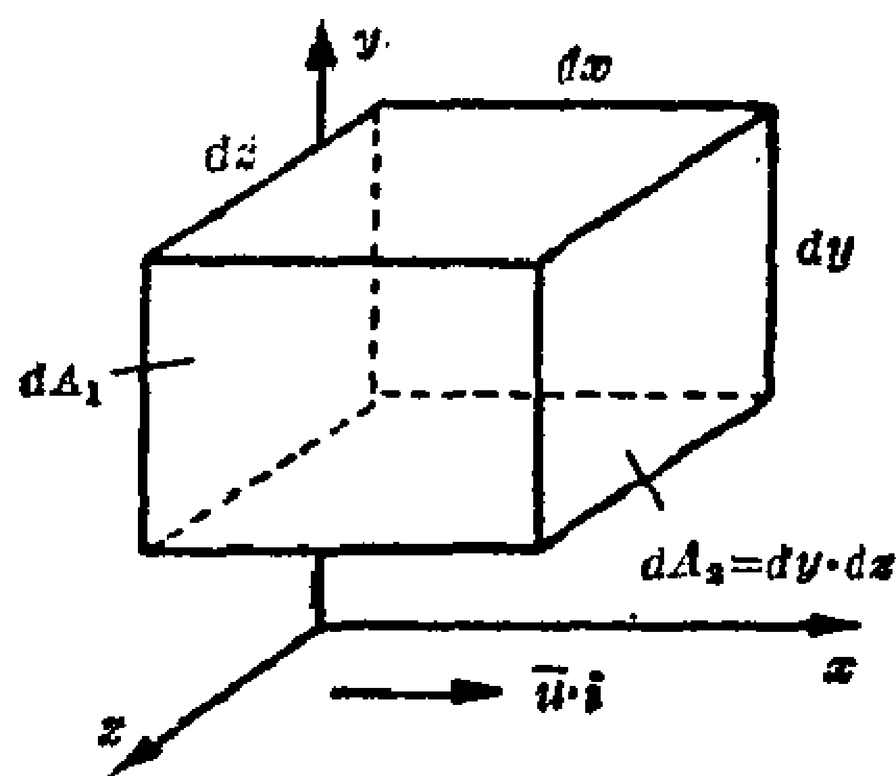


图 7.4-4 散度的解释

$$\rho(x+dx,\ y,\ z)\bar{u}(x+dx,\ dy,\ dz)dy\,dz=\left[\rho\bar{u}+\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial x}dx\right]dy\,dz;$$

差 $\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial x}dx\,dy\,dz$ 给出了穿过两面 dA_1 和 dA_2 从体积元素损失质量的速率。加上另外两对侧面的基值得到每单位时间的总损失等于

$$\left[\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\bar{w})}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz。$$

因而在令 $\boldsymbol{a}=\rho\bar{\boldsymbol{a}}, u=\rho\bar{u},\ v=\rho\bar{v}, w=\rho\bar{w}$ 之后，由 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ 给出**每单位时间和单位体积的质量的损失**，即向量场的散度。

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}}$$

如果质量没有损失也没有赢得，那末 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$，而此场就称为*无源场*。那些 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}>0$ 的点叫做*源*(质量流出多于流入)；$\operatorname{div}\boldsymbol{a}<0$ 的点就叫做*收*(流入多于流出)。

高斯定理　从有限区域 G 的*质量总损失*可以由体积分 $\iiint\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,d\tau$ 来计算。这流量必定从 G 穿过它的边界曲面 $\mathbf{S}$ 流出。如果 $d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}\,d\sigma$ 是有向曲面元素，亦即在外法线 $\boldsymbol{n}(|\boldsymbol{n}|=1)$方向上其大小等于曲面元素的面积 $d\sigma$ 的向量，那末前面的论证表明每单位时间穿过 $d\sigma$ 流出的质量是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$。因而穿过 $\mathbf{S}$ 总的外流量等于曲面积分

$$\iint\limits_{\mathbf{S}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})d\sigma=\iint\limits_{\mathbf{S}}a_n\,d\sigma。$$

将这两个流量的表达式相等，就得到高斯定理。

高斯定理	$\iiint\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,d\tau=\iint\limits_{\mathbf{S}}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\mathbf{S}}a_n\,d\sigma$
分量形式	$\iiint\limits_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau=\iint\limits_{\mathbf{S}}[u\cos(x,\boldsymbol{n})+v\cos(y,\boldsymbol{n})+w\cos(z,\boldsymbol{n})]d\sigma$

这个定理在流体力学的例子中直观是很清楚的，当 G 是一个有界闭区域，其边界曲面 $\mathbf{S}$ 除了有限条曲线或有限个点以外分片具有连续变化的法线时，这个定理非常一般地对于连续可微向量场也是完全正确的。高斯定理使体积分有可能转换成曲面积分；它也导致直观上显然的结果：

如果 $\boldsymbol{a}$ 在区域内无源，亦即 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$，那末穿过该区域边界的总流量为零。

旋度和斯托克司定理

旋度　旋度是一种微分运算，它将向量场 $\boldsymbol{a}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$ 转换成另外一个向量场。

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

斯托克司定理 假定 C 是一条闭曲线(不一定是平面曲线)，它是一片曲面 S 的边界。假定除了有限条曲线或有限个点以外，S 具有连续变化的单位法线 $\boldsymbol{n}$，又除了有限个点以外，C 具有连续变化的切线。关于 C 的方向含义是，如果从 $\boldsymbol{n}$ 所指向的一侧看，S 位于它的左边(见图 7.4-5)。于是对任一连续可微的向量场成立斯托克司定理。

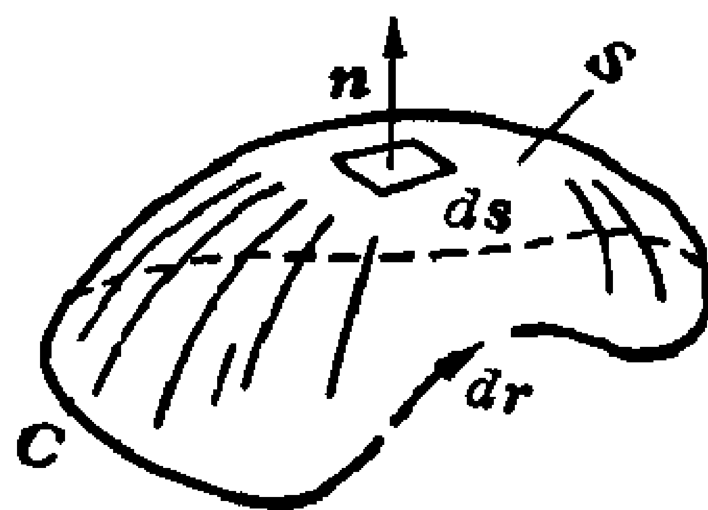


图 7.4-5 斯托克司定理

斯托克司定理	$\oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\iint_S(\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{a})\,d\sigma=\iint_S\operatorname{curl}_n\boldsymbol{a}\,d\sigma$
分量形式	$\oint_C(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$ $=\iint_S\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(x,\boldsymbol{n})+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(y,\boldsymbol{n})+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(z,\boldsymbol{n})\right\}d\sigma$

依照这个定理，积分 $\iint_S(\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{a})\,d\sigma$ 只取决于边界曲线 C 而与以 C 为边界的曲面 S 形状无关。线积分 $\int_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 沿 C 的**环流量**(或**旋转量**)；如果将向量场设想为描述流体流动，那末它量度流体元素旋转运动的强度。斯托克司定理表明，这个环流量等于向量场 $\operatorname{curl}\boldsymbol{a}$ 的法向分量通过由 C 所张成的曲面 S 的总流量。

如果将 $\boldsymbol{a}$ 解释为一个力场，那末 $-\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}$ 是沿 $d\boldsymbol{r}$ 克服力 $\boldsymbol{a}$ 所作的功，而 $\oint\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}$ 是绕 C 一圈所作的总功。只有当 $\operatorname{curl}\boldsymbol{a}=0$ 时，它才为零，因此与路径 C 无关。$\operatorname{curl}\boldsymbol{a}=0$ 的场叫做**无旋场**。无旋场 $\boldsymbol{a}$ 总可表示为梯度 $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\varphi$。因此还可以直接证实一个关系 $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\varphi)=0$。

nabla 算子，计算规则

三个微分算子 grad, div, curl 可以借助于一个算子，即 nabla 算子来表示。这个算子由哈密尔顿(Hamilton)引进，记为 ∇。nabla 是一种希伯莱弦乐器的名称，它的形状与此符号相象。

算子 ∇ 定义为

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}。$$

如果将“积” $\frac{\partial}{\partial x}\cdot\varphi$ 理解为 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$，那末可以记 $\nabla\varphi=\operatorname{grad}\varphi$。纯量积给出 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\boldsymbol{a}$，向量积给出 $\nabla\times\boldsymbol{a}=\operatorname{curl}\boldsymbol{a}$。

另外一个微分算子，是由拉普拉斯(Laplace)引进的，记为 Δ，叫做“*delta*”。对于纯量场 φ 定义为

$$\Delta\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

但对于向量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 定义为

$$\Delta\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{a}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$$
$$=\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial z^2}。$$

下面的恒等式成立：

$$\operatorname{grad}(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_1\operatorname{grad}\varphi_2+\varphi_2\operatorname{grad}\varphi_1,$$
$$\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi,$$
$$\operatorname{curl}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\operatorname{curl}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\operatorname{grad}\varphi,\quad \operatorname{curl}\operatorname{grad}\varphi=0,$$
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{a}_2\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_1\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{a}_2,\quad \operatorname{div}\operatorname{curl}\boldsymbol{a}=0。$$

最后，应该指出，场的梯度、散度和旋度是与所选用的坐标系无关的。人们称这样一些量是在坐标变换下的不变量。

第8章 函数级数

现代数学不可能没有函数级数的理论及应用，它们在分析和函数论的发展中是非常重要的。在 **II**. 第7章就已指出，某些函数只有利用它们的级数展开才能积分。这样的展开在实际应用中也常常有用。在只知道若干个函数值的情况下，它们可用来研究函数的性质，可用来计算函数的近似值，并用来对计算方法的精确度给出快速和可靠的估计。

在 **II**. 第5章中，讨论了具有常数项的无穷级数的性质。现在级数的项是某个变量的函数；其中特别重要的有幂级数，它的第 n 项是形如 $a_n x^n$ 的函数，还有傅里叶级数，它的一般项具有形式 $a_n\cos nx+b_n\sin nx$。

8.1 函数级数

常数项级数的性质是通过讨论数列而导出的。这些论证现在将通过讨论表达式 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 而加以拓广，说明如下：

1. 对于每一个自然数 $n=0, 1, 2, \cdots$ 序列 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 中的函数是给定的，每一个函数对于区间 I 上的 x 有定义，即对于这个定义域中的每一个 x，它取其值域中的唯一值。

2. 部分和序列 $F_n(x)$，$F_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)$，$n=0, 1, 2, \cdots$，是由对于在区间 I 中每一个 n 有定义的函数组成的。

3. 对于 I 中的每一个 x，序列 $F_n(x)$ 趋于一个极限，记为

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}F_n(x)。$$

这个极限函数在区间 I 中存在，这个区间称做收敛区间。极限函数 $F(x)$ 与逼近 $F_n(x)$ 之间的差 $R_n(x)=F(x)-F_n(x)$ 称做余项，要是收敛的话，则当 $n\to\infty$ 时这个余项必须趋于零。

一致收敛　在函数级数

$$F(x)=x^2+x^2(1-x^2)+x^2(1-x^2)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^2(1-x^2)^n$$

中，项 $f_n(x)=x^2(1-x^2)^n$ 是连续的。部分和序列 $F_0(x)=x^2$，$F_1(x)=x^2+x^2(1-x^2)$，…，对于区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的所有 $x\neq 0$ 收敛，因为级数 $F(x)=x^2[1+(1-x^2)+(1-x^2)^2+\cdots]$ 是一个公比为 $1-x^2=q<1$ 的几何级数并且它的和为 $F(x)=x^2\{1/[1-(1-x^2)]\}=1$。另一方面，$F(0)=0$。这样，极限函数 $F(x)$ 就与函数 $f_n(x)$ 不同，它在 $x=0$ 处不连续。

这就提出了一个问题，在怎样的条件下，级数的项 $f_n(x)$ 诸如连续或可微等性质可以传递给和函数 $F(x)$？级数 $F(x)=\sum x^2(1-x^2)^n$ 的部分和曲线图形给出了一个提示。当 $n>10$ 时，在 $|x|>0.6$ 的地方曲线几乎不能彼此分离，但譬如在 $x=0.2$ 处，它们明显地不同（见图 8.1-1）。这就是说：足标 N（超出这个足标的余项 $R_n(x)$ 其大小就在给定的正数 ε 之下）一般地依赖于区间 I 中 x 的选择。在目前这个例子中，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $x\to 0$ 时，足标 $N(\varepsilon,x)$ 将无限地增大。如果能发现 N 不依赖于 x 的话，那末所说的是函数级数 $F(x)$ 的一致收敛性。如果每当 ε 固定而 x 在 I 上变化时数集 $N(\varepsilon,x)$ 有上界的话，这就是一致收敛的情况。下面

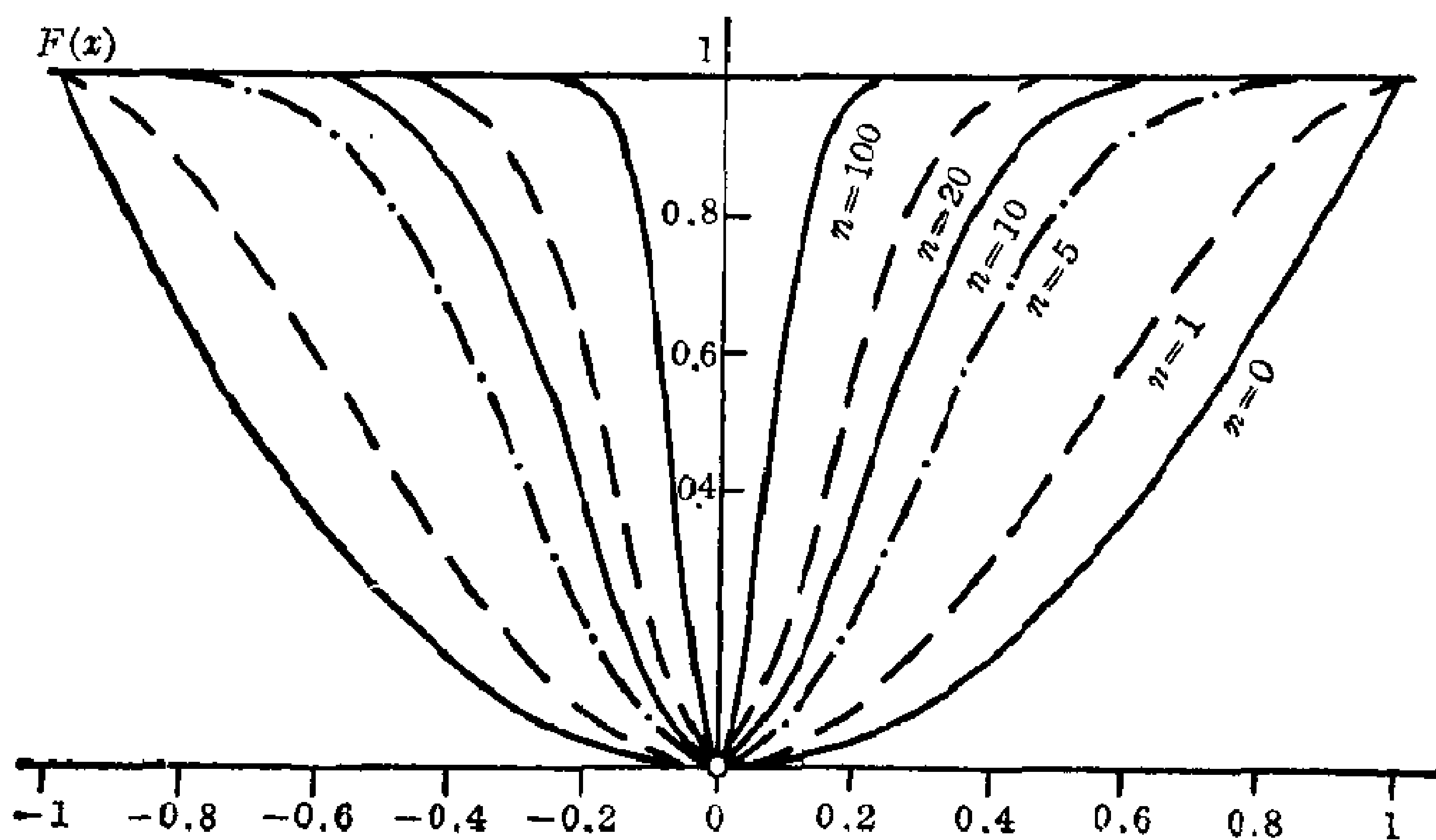


图 8.1-1　$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^2(1-x^2)^n$ 的逼近 $F_n(x)$，$n=0, 1, 5, 10, 20, 100$

将要证明，在这种情况下 $F(x)$ 是连续的，还证明级数 $F(x)$ 可"逐项"积分，若函数 $f_n(x)$ 在 I 上全是可微的并且由逐项微分而成的级数一致收敛，则级数 $F(x)$ 可"逐项"微分。另一方面，前面讨论的级数 $\sum x^2(1-x^2)^n$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上是收敛的，但不是一致收敛的。

如果对于每一个给定 $\varepsilon>0$，存在仅仅取决于 ε 而不依赖于 x 的 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，对于 I 的每一个 x 有 $|R_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots|<\varepsilon$，就称函数级数 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 在区间 I 中一致收敛。

一致收敛概念是由韦尔斯特拉斯（1815～1897 年）等人引进的；它可以象下述准则那样推广到复数情况。

韦尔斯特拉斯优敛准则（"M 判别法"）。如果级数 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 中的每一个函数 $f_n(x)$ 是有界的，即对于 I 的所有 x 有 $|f_n(x)|\leqslant M_n$，并且如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M_n$ 收敛，那末级数 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 是在区间 I 一致收敛。级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M_n$ 则称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 的一个优敛级数。

【例 1】　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(nx)/n^2$ 对于所有的 x 一致收敛，因为对于所有的 x，$|\sin(nx)/n^2|\leqslant 1/n^2$ 并且优级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^2$ 收敛。

【例 2】　几何级数 $x+x^2+x^3+\cdots$ 在区间 $-1<x<1$ 中收敛。对于固定的 $x_0(0<x_0<1)$ 和给定的 $\varepsilon>0$，总可以找到一个 $N(\varepsilon)$，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时有 $|R_n(x_0)|=|x_0^{n+1}+x_0^{n+2}+\cdots|=x_0^{n+1}/(1-x_0)<\varepsilon$。但是如果 x_0 朝着 $+1$ 增加，那末对于任意一个固定的 $n>N(\varepsilon)$，$|R_n|$ 无限地增大，亦即 $\lim\limits_{x_0\to 1}x_0^{n+1}/(1-x_0)=\infty$。这表明，几何级数在收敛区间 $-1<x<1$ 的任何一个封闭部分 $|x|\leqslant x_0<1$ 一致收敛，但在整个的收敛开区间并不一致收敛。

可以证明，可考虑用级数的任意一段 $F_{n+k}(x)-F_n(x)$ 代替余项 $R_n(x)$；于是一致收敛的条件为：对于 I 中的所有 x，所有的 $n\geqslant N(\varepsilon)$ 以及所有的 $k\geqslant 1$，有

$$|F_{n+k}(x)-F_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+k}(x)|<\varepsilon。$$

函数级数的极限　假定级数 $F(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}f_n(x)$ 在区间 $a<x<x_0$ 中一

致收敛。于是对给定的 $\varepsilon>0$, 可以找到一个足标 n_1, 使对于这个区间中所有的 x, 所有的 $n>n_1$ 以及所有的 $k\geqslant1$, 有

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+k}(x)|<\varepsilon。$$

此外，假定当 $x\to x_0-0$ 时，每个函数 $f_n(x)$ 有左极限 a_n; 那末可以将它代入不等式 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}|<\varepsilon$, 而这意味着由极限构成的级数 $\sum a_n$ 收敛。如果它的和为 s 而它的部分和为 s_n, 则可以选出足标 n_2, 使得对于所有的 $m>n_2$, $|s_m-s|<\varepsilon/3$, 同时还有 $|R_m(x)|<\varepsilon/3$。这可以用来证明，当 $x\to x_0-0$ 时，极限函数 $F(x)$ 有极限 s。实际上，对于选定的 m 和在 $a<x<x_0$ 中所有的 x, 有

$$\begin{aligned}|F(x)-s|&=|(F_m(x)-s_m)+(s_m-s)+R_m(x)|\\&<|F_m(x)-s_m|+\varepsilon/3+\varepsilon/3。\end{aligned}$$

但这里的函数 $F_m(x)$ 是固定数目函数 $f_n(x)$ 的和，当 $x\to x_0-0$ 时，它有极限 s_m; 这意味着可以找到一个子区间 $x_0-\delta<x<x_0$(正数$\delta<(x_0-a)$), 使得 $|F_m(x)-s_m|<\varepsilon/3$, 从而对于所有这样的 x, 有 $|F(x)-s|<\varepsilon$。因此和 s 是当 $x\to x_0-0$ 时 $F(x)$ 的极限。这个结果可用如下形式概括:

$$\lim_{x\to x_0-0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\lim_{x\to x_0-0}f_n(x)\right],$$

它意味着在一致收敛的函数级数中极限可以逐项实现。

类似的论证对于右极限也成立。如果函数 $f_n(x)$ 在 x_0 处连续，那末它们的左极限和右极限等于它们的值 $f_n(x_0)$, 亦即和函数 $F(x)$ 在 x_0 处连续。

如果级数 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 是在区间 I 中一致收敛并且如果项 $f_n(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，那末 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处也连续。

逐项微分和逐项积分　如果函数 $f_n(x)$ 在 I 中可微，如果用导数构成的级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f'_n(x)$ 在 I 中一致收敛。并且如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 至少在 I 中的一点 $x=x_0$ 收敛，则这个级数对于 I 中所有的 x 一致收敛。而且它的和 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 的导数是微分后的级数的和，亦即 $F'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f'_n(x)$。这些命题的详细证明略去了；它们常常被表述为不太准确的形式:

函数级数可以逐项微分，如果导出的级数一致收敛的话。

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right]=\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$$

阿贝尔虽然没有一致收敛的概念，但他曾给出如下例子来说明，逐项微分不一定导致正确的答案：

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)/n$ 对于所有的 x 收敛，但是由逐项微分而得的级数是 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$，它对于所有的 x 发散。2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)/n^2$ 对于所有的 x 一致收敛，但是微分后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)/n$ 对于 $x=0$ 发散。

如果级数的各项 $f_n(x)$ 在区间 I 上可积，并且如果这个级数在 I 中一致收敛，那末由逐项积分而得的级数也在 I 中收敛，并且它表示极限函数 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 的积分 $\int F(x)dx$，亦即 $\int F(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int f_n(x)dx$。

一致收敛的函数级数可以逐项积分。

椭圆的弧长与周长可以通过弧元素级数的逐项积分而求得。对于椭圆的弧 S（见图 8.1-2），设 $x=a\sin\varphi$，$y=b\cos\varphi$，便有 $dx=a\cos\varphi\,d\varphi$，$dy=-b\sin\varphi\,d\varphi$，并设 $\varepsilon^2=1-b^2/a^2$（ε 称做偏心率）。于是

$$S=\int_0^{\varphi}\sqrt{dx^2+dy^2}=a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

这里利用了如下事实，

$$a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi$$
$$=a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi$$
$$=a^2(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)。$$

因为 $|\varepsilon|<1$，所以平方根可以展开成一致收敛的二项级数

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}=1-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi-\frac{\varepsilon^4}{2\cdot4}\sin^4\varphi-\frac{1\cdot3\cdot\varepsilon^6}{2\cdot4\cdot6}\sin^6\varphi-\cdots。$$

逐项积分导致

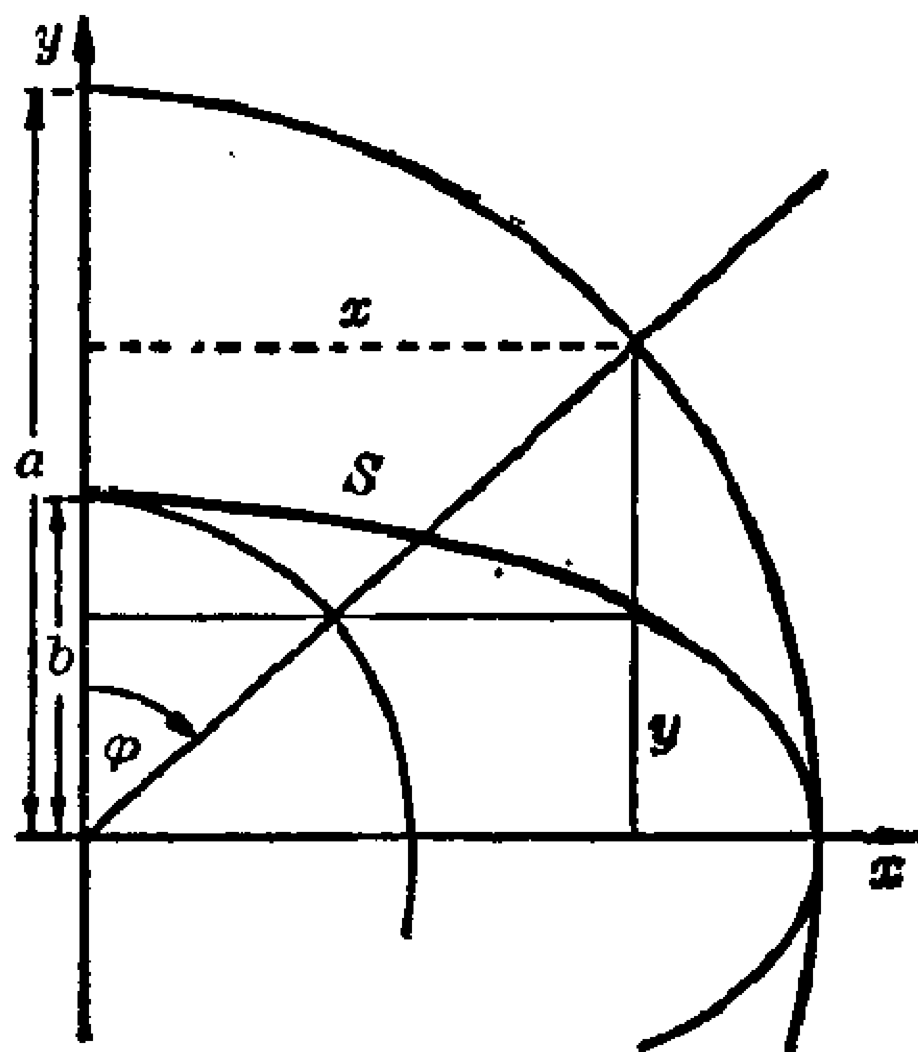


图 8.1-2 椭圆的参数表示

$$S=a\left(\varphi-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{\varepsilon^4}{2\cdot4}\int_0^\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi-\cdots\right),$$

这样就有可能对于任何一个角 φ 来计算弧长 S。为了求周长，令 $\varphi=\pi/2$ 从而算出周长的四分之一长度。利用在 **II**. 第7章导出沃利斯乘积时的递推公式得到：

椭圆的周长	$U=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5}-\cdots\right]$
近似公式	$U\approx\pi\left[\frac{3}{2}(a-b)-\sqrt{ab}\right]$　$\varepsilon^2=1-b^2/a^2$

为了估计由于利用近似公式所引起的误差 Δ，首先利用关系

$$(a+b)/2=(a/2)[1+\sqrt{1-\varepsilon^2}],\quad \sqrt{ab}=a\sqrt[4]{1-\varepsilon^2},$$

将这些表达式展开成二项级数，它们的余项 R_3' 和 R_3'' 可得到上界估计 r' 和 r''。然后从这些级数可得到 $\pi[3(a+b)/2-\sqrt{ab}]$ 的一个级数，它与精确的级数只相差 ε^8 及更高的项。如果 r 是精确级数准确度的上界估计，那末得到误差估计 $\Delta<r+3r'+r''$，而如果计算出来，其结果是 $\Delta<0.4\varepsilon^8/(1-\varepsilon^2)$。

8.2　幂级数

幂级数是特殊的函数级数。其中的函数是变量的方幂乘以系数，$f_n(x)=a_nx^n$。部分和 $F_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 是多项式，它对于所有的 x 有定义。幂级数 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 的收敛范围必须在每一种具体情况下加以考察。可能发生这样的情况，或者级数始终收敛，即对所有的 x 收敛，或者除了 $x=0$ 外决不收敛。

【例】 1．级数 $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n=x+4x^2+27x^3+256x^4+\cdots$ 是决不收敛的。2．级数 $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots$ 是始终收敛的。

幂级数的收敛性

对于每一个固定值 $x=x_0$，幂级数的项可以视为常数，于是就可运用

在 **II**、第5章中的结果。尤其是绝对收敛概念，即绝对值级数的收敛性可适用于幂级数。虽然这里将不给出证明，但可证明，如果级数 $\sum a_n x_1^n$ 收敛，那末只要 $|x|<|x_1|$，幂级数 $\sum a_n x^n$ 绝对收敛。

幂级数的收敛半径 如果级数对于每一个 $x(|x|<r)$ 收敛，而对于 $|x|>r$ 发散，则这个正数 r 就称做幂级数的收敛半径。从 $-r$ 到 $+r$ 的区间就是收敛范围或收敛区间(见图 8.2-1)。对于一个始终收敛的级数可以置 $r=\infty$ 而对于决不收敛的级数置 $r=0$。

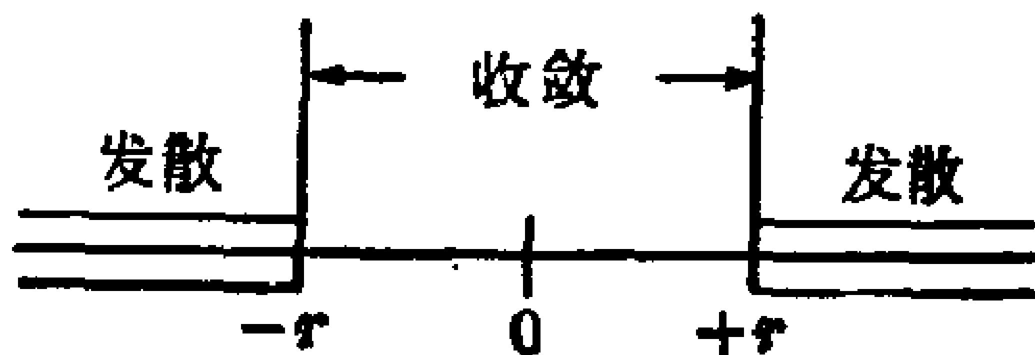


图 8.2-1 幂级数的收敛区间

阿贝尔定理。对于每一个既非始终收敛，又非决不收敛的幂级数，存在一个 $r>0$，使得对于 $|x|<r$ 级数收敛而对于 $|x|>r$ 发散。

柯西-阿达玛公式。收敛半径的公式早在1821年就由柯西表述过了，但并没有引起注意。70年之后才由阿达玛 (Hadamard, 1865～1963年)重新发现。考虑序列

$$|a_1|,\quad \sqrt[2]{|a_2|},\quad \sqrt[3]{|a_3|},\ \cdots,\ \sqrt[n]{|a_n|}$$

的上极限 $\mu=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$，即数 μ 具有这样的性质，对于每一个 $\varepsilon>0$，序列中有无限多项大于 $\mu-\varepsilon$，而只有有限多项大于 $\mu+\varepsilon$。

如果 μ 是有限的又是正的，$0<\mu<+\infty$，于是 $1/\mu$ 也是有限的并且正的，那末就可以找到这样的 x_1 和 ρ: $|x_1|<\rho<1/\mu$，结果是 $1/\rho>\mu$。这意味着，对于所有的 $n>N_1$，成立 $\sqrt[n]{|a_n|}<1/\rho$ 或 $\sqrt[n]{|a_n x_1^n|}<|x_1|/\rho<1$。因此幂级数在 x_1 处绝对收敛。另一方面，如果 $|x_2|>1/\mu$，那末对于无限多个 n，有 $\sqrt[n]{|a_n|}>1/|x_2|$ 或 $\sqrt[n]{|a_n x_2^n|}>1$，使得级数在 x_2 处发散。这样，数 $r=1/\mu$ 就是收敛半径。

收 敛 半 径	$r=\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$

不加证明地指出下面的结果，使得有可能利用序列 $(|a_{n+1}/a_n|)$ 而不是利用 $(\sqrt[n]{|a_n|})$。

如果序列 $\{|a_{n+1}/a_n|\}$ 收敛于一个极限，那末序列 $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ 也收敛而且收敛于同一个极限。

【例】 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n/n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n/n^2$，$\cdots$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n/n^p$ ($p\geqslant0$ 固定)

全都有相同的收敛半径 $r=1$。只要对于每一个 $p=0, 1, 2, \cdots$，计算下述极限就行了: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|n^p/(n+1)^p|=\lim\limits_{n\to\infty}[1-1/(n+1)]^p=1$。

关于在收敛区间端点 $x=+r$ 和 $x=-r$ 上幂级数的性态，不可能作出任何一个普遍有效的断言；必须在每一种具体情况下作分别的研究。譬如，在上面例子的前三个级数中发现:

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 对于 $x=-1$ 和 $x=+1$ 发散;

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n/n$ 对于 $x=-1$ 收敛，而对于 $x=+1$ 发散;

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n/n^2$ 对于 $x=-1$ 和 $x=+1$ 收敛。

如果一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有收敛半径 r，那末它对于 $|x|<r$ 内的任何一个 x 绝对收敛。

幂级数的一致收敛性 这归于阿贝尔的一个定理:

幂级数在每一个完全位于收敛区间内的闭区间上一致收敛。

依照这个定理，凡是假定一致收敛而得到的函数级数的所有结果对于幂级数也有效。因此在收敛区间内的每一个闭区间上 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是一个连续函数，它的积分可以由逐项积分而得。后面还将证明，它的导数可以通过逐项微分而求得。

带有复变量的幂级数。 对于带有复数系数和复变量的幂级数来说，收敛区间代之为一个圆盘，它的半径还称为收敛半径（见 II. 第 10 章）。

幂级数的重要性质

幂级数的恒等定理 幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在它的收敛区间 $|x|<r$ 内，特别地在 $x=0$ 处，是一个连续函数。如果幂级数 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 定义在同一个区间内，因而在其中连续，并且如果存在一个具有无限多个非零项的序列 x_k 以 $x=0$ 为聚点，那末由对于所有 x_k, $f(x_k)=g(x_k)$ 以及由 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=a_0$, $\lim\limits_{k\to\infty}g(x_k)=b_0$, 可推得 $a_0=b_0$。因为 $x_k\neq 0$，所以现在可考虑两个新函数

$$f_1(x_k)=(f(x_k)-a_0)/x_k=a_1+a_2x_k+a_3x_k^2+\cdots,$$

$$g_1(x_k)=(g(x_k)-b_0)/x_k=b_1+b_2x_k+b_3x_k^2+\cdots,$$

对于它们仍有 $f_1(x_k)=g_1(x_k)$，结果令 $k\to\infty$ 可得 $a_1=b_1$。可以重复这个过程得到 $a_2=b_2$，再由归纳法可推得：对于所有的 n，$a_n=b_n$，结果是这两个幂级数恒等。

如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 对于 $|x|<r$ 收敛并且如果在一个具有 $x_k\neq 0$ 又 $x_k\to 0$ 的点列 x_k 上它们的和相符，那末这两个级数恒等，亦即对于所有的 n，$a_n=b_n$。

恒等定理对于形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的幂级数也成立。如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可以表示为幂级数，那末这个表示是唯一的：如果两种计算方法导致表示给定函数的两个幂级数，那末相应幂次的系数必须相等。因此 I. 第 5 章中已经导出的系数相等法也可应用于幂级数。

【例】 对于任意的实数 a 和 b，$(1+x)^a(1+x)^b=(1+x)^{a+b}$。在收敛范围 $|x|<1$ 中，每个因式都可以表示为二项级数

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n;\quad (1+x)^b=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n;$$

$$(1+x)^{a+b}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}x^n。$$

如果现在运用幂级数的乘法定理，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}\right]x^n。$$

比较系数导致二项系数加法定理的一种简单证明。

二项系数的加法定理	
$\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\cdots+\binom{a}{n-1}\binom{b}{1}+\binom{a}{n}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{n}$	a, b 实数 $n=0, 1, 2, \cdots$

变换到一个新的中心 如果用 $(x-x_0)$ 代替 x 作为变量，对于幂级数获得的所有结果仍然有效。函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在区间 $|x-x_0|$

$<r$ 内是连续的。现在如果 x_1 位于这个区间内，它可以作为同一个函数 $f(x)$ 新的展开 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_1)^k$ 的中心。它的收敛半径 r_1 至少是 $r_1=r-|x_1-x_0|$。对于区间 $|x-x_1|<r_1$ 内的每个点，关系 $|x_1-x_0|+|x-x_1|<r$ 成立(见图8.2-2)。因此如果在用 $x-x_0$ 的幂次表示的级数中代入 $x-x_0=(x_1-x_0)+(x-x_1)$，那末不仅这个级数

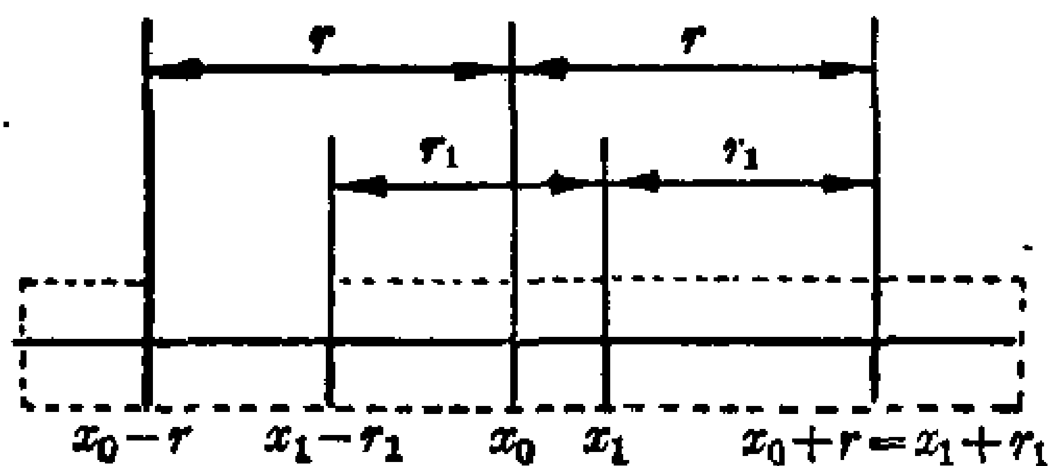


图 8.2-2 将一个幂级数变换到新的中心

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n[(x_1-x_0)+(x-x_1)]^n$$

绝对收敛，而且级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(|x_1-x_0|+|x-x_1|)^n$ 也收敛。在这些假定下级数强重排定理成立(见 **II**. 第5章)：如果对于 $n=0, 1, 2, \cdots$ 将每个项 $[(x_1-x_0)+(x-x_1)]^n$ 按二项定理展开再将 $(x-x_1)$ 的各次幂集中在一起：

$$\begin{aligned}
f(x)=&a(x_1-x_0)^0\\
&+a_1(x_1-x_0)^1+a_1\binom{1}{1}(x_1-x_0)^{1-1}(x-x_1)\\
&+a_2(x_1-x_0)^2+a_2\binom{2}{1}(x_1-x_0)^{2-1}(x-x_1)+a_2\binom{2}{2}(x_1-x_0)^{2-2}(x-x_1)^2+\cdots\\
&+a_3(x_1-x_0)^3+a_3\binom{3}{1}(x_1-x_0)^{3-1}(x-x_1)+a_3\binom{3}{2}(x_1-x_0)^{3-2}(x-x_1)^2+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+a_n(x_1-x_0)^n+a_n\binom{n}{1}(x_1-x_0)^{n-1}(x-x_1)+a_n\binom{n}{2}(x_1-x_0)^{n-2}(x-x_1)^2+\cdots\\
\hline
f(x)=&b_0\qquad\qquad+\qquad b_1\cdot(x-x_1)\qquad\qquad+\qquad b_2\cdot(x-x_1)^2+\cdots
\end{aligned}$$

这里 $b_0=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{0}a_n(x_1-x_0)^n,\quad b_1=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}a_{n+1}(x_1-x_0)^n,$

$$b_2=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}a_{n+2}(x_1-x_0)^n,\ \cdots,$$

每一列包含一个绝对收敛级数，各列之和构成一个绝对收敛级数，而对于区间 $|x-x_1|<r_1$ 内的每个 x，函数值 $f(x)$ 由 $\sum b_k(x-x_1)^k$ 给出。因此

$a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n$，这个级数绝对收敛。

乘积级数的系数可以作为乘积阵列中的对角和或按滑动带方法(见 **II**. 第5章)求出。

【例】 几何级数 $1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$ 对于 $|x|<1$ 收敛。从滑动带在乘积第三项或第四项的位置可以看出，级数自身相乘逐步导出

$$1/(1-x)^2=1+2x+3x^2+4x^2+\cdots$$

以及

$$1/(1-x)^3=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$$

$\cdots+x^3+x^2+x+1$ →　　$\cdots+x^3+x^2+x+1$ →

$1+x+x^2+x^3\cdots$　　$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$

关于正弦和余弦幂级数的进一步例子，将在推导这些级数之后给出。

一个幂级数代入另一个幂级数　如果在一个复合函数(见 **II**. 第6章)中，例如，在 $y=f[\varphi(x)]$ 中，内函数 $z=\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 表示为一个幂级数，并且如果对收敛范围内的 x，这个级数所取的值 z 位于幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 的收敛范围内，而这个级数表示函数 $y=f(z)$，那末这就定义了复合函数 $y=F(x)=f[\varphi(x)]$。于是可以问这个函数 $F(x)$ 是否能表示为一个幂级数 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，而这些系数 c_n 又怎样能借助于系数 a_n 和 b_n 求出。现在

$$F(x)=b_0+b_1(a_0+a_1x+\cdots)+b_2(a_0+a_1x+\cdots)^2+\cdots,$$

而 $z=\sum a_nx^n$ 的幂 z^k 可以按幂级数的乘法写成幂级数 $z^k=a_{k0}+a_{k1}x+\cdots+a_{kn}x^n+\cdots$。

如果现在将这些表达式代入级数 $f(z)=\sum b_kz^k$ 中再将包含 x 同次幂的项集中在一起，就得到一个幂级数 $\sum c_nx^n$，可以证明，这个级数绝对收敛并且表示函数 $F(x)=f[\varphi(x)]$。

幂级数相除　一个幂级数 $\sum b_nx^n$ 除以一个幂级数 $\sum a_nx^n$ 的课题可以化为求一个乘积，只要 $1/\sum a_nx^n$ 可以表示为一个幂级数。如果假定

$$\sum a_nx^n=a_0+(a_1x+a_2x^2+\cdots)=a_0+z$$

有收敛半径 $r>0$ 并且 a_0 不为零，则可以找出收敛区域的一个部分，在这一部分内 $|z|=|a_1x+a_2x^2+\cdots|<|a_0|$，于是 $\sum a_nx^n$ 的倒数能展开成一

个几何级数 $\frac{1}{\sum a_nx^n}=\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{1+z/a_0}=\frac{1}{a_0}-\frac{z}{a_0^2}+\frac{z^2}{a_0^3}-\frac{z^3}{a_0^4}+\cdots$，它在某个 x 区间内收敛，而在这个区间内 $z=a_1x+a_2x^2+\cdots$ 也收敛。如同早已做过的那样，将 z 的幂级数代入几何级数再并项就得到一个幂级数 $\sum c_nx^n$，它绝对收敛并表示函数 $1/\sum a_nx^n$。一旦知道了幂级数 $\sum c_nx^n$ 的存在条件，就容易由恒等式 $\sum a_nx^n\cdot\sum c_nx^n=1$ 以及比较系数求得系数 c_n。这导致一个方程组，从这个方程组可以逐步计算未知数 $c_0, c_1, c_2, \cdots$：

$$a_0c_0=1,\ a_0c_1+a_1c_0=0,\ \cdots,\ a_0c_n+a_0c_{n-1}+\cdots+a_nc_0=0,\ \cdots$$

更一般地，如果 $\sum b_nx^n$ 除以 $\sum a_nx^n$，恒等式 $\sum b_nx^n=\sum a_nx^n\cdot\sum a_nx^n$ 而比较系数就导出确定 c_n 的方程。

【例】 后面将导出的级数展开

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots,$$

可以用来通过除法求出 $\tan x=\sin x/\cos x$ 的幂级数。幂级数 $\sum c_nx^n$ 的存在条件蕴涵着只是在余弦级数定义域 $|x|<r=\infty$ 的一部分内，其中 $\cos x\neq0$，亦即在区间 $|x|<\pi/2$ 内，才能进行除法。求系数的恒等式是 $\sin x=\cos x\cdot\sum c_nx^n$。

$$\cdots+c_5x^5+c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0 \longrightarrow$$

$$1+0\cdot x-\frac{x^2}{2!}+0\cdot x^3+\frac{x^4}{4!}+0\cdot x^5-\cdots$$

上面说明了求 c_4 时滑动带的位置。得到

$$0=c_0,\ 1=c_1,\ 0=c_2-\frac{c_0}{2!},\ -\frac{1}{3!}=c_3-\frac{c_1}{2!},\ 0=c_4-\frac{c_2}{2!}+\frac{c_0}{4!},\ \cdots$$

从而，逐步有

$$c_0=0,\ c_1=1,\ c_2=0,\ c_3=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{3},$$

$$c_4=0,\ c_5=\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{3\cdot2!}=\frac{2}{15},$$

$$c_6=0,\ c_7=\frac{1}{7!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{3\cdot4!}+\frac{2}{15\cdot2!}=\frac{17}{315},\ \cdots$$

亦即对于 $|x|<\pi/2$ 展开有效：

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots。$$

伯努利数。如果利用后面将导出的指数函数展开

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

那末函数

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+x/2!+x^2/3!+x^3/4!+\cdots}$$
$$=B_0+B_1x/1!+B_2x^2/2!+\cdots$$

满足允许除法的条件，因而有幂级数展开。正如上面等式中所指出的，系数成为 $B_n/n!$ 形式。数 B_n 称做伯努利数并可根据恒等式

$$1=(1+x/2!+x^2/3!+\cdots)[B_0+(B_1/1!)x+(B_2/2!)x^2+\cdots]$$

来计算。

$$\cdots+\frac{B_3}{3!}x^3+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_1}{1!}x+B_0$$

$$1\quad+\frac{x}{2!}\quad+\frac{x^2}{3!}\quad+\frac{x^3}{4!}+\cdots$$

比较系数(见右图)导出下列关系

$B_0=1,\ B_0/2!+B_1=0,$

$$B_0/3!+B_1/(1!2!)+B_2/2!=0,$$
$$B_0/4!+B_1/(1!3!)+B_2/(2!2!)+B_3/3!=0,\ \cdots,$$

或

$$B_0=1,\ 2B_1+B_0=0,$$
$$3B_2+3B_1+B_0=0,$$
$$4B_3+6B_2+4B_1+B_0=0,$$
$$5B_4+10B_3+10B_2+5B_1+B_0=0,\ \cdots$$

这逐步导出

$$B_0=1,\ B_1=-1/2,\ B_2=1/6,\ B_3=0,\ B_4=-1/30,\ \cdots$$

从 $n=3$ 起带有奇数足标 n 的所有 B_n 都为零。

幂级数的反演定理　在适当的单调性条件下，函数 $y=f(x)$ 有反函数 $x=\varphi(y)$ (见 I. 第 5 章)。对于幂级数可以获得一个相类似的定理，这里将不予以证明。

对于一个具有收敛半径 r 以及 $a_1\neq 0$ 的幂级数 $y=f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$，确实存在一个幂级数 $x=\varphi(y)=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\cdots$，它在 $y=0$ 的某个邻域内收敛并使 $y\equiv f[\varphi(y)]$。

一旦证明了幂级数 $x=b_1y+b_2y^2+\cdots$ 有一个正的收敛半径 r_1，那末它的系数可以通过将此级数代入给定幂级数 $y=a_1x+a_2x^2+\cdots$ 的各项再与 y 的各次幂系数相等而求得。这就唯一地确定系数，使得对于 $x=\varphi(y)$ 只存在一个幂级数展开。

【例】 根据幂级数$y=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$，在

$$x=\arcsin y=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\cdots$$

中的系数 b_n 可以通过如下的代入而得:

$$y=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+b_4y^4+b_5y^5-(1/6)[b_1^3y^3+3b_1^2b_2y^4+3b_1b_2^2y^5+3b_1^2b_3y^5+\cdots]+(1/120)[b_1^5y^5+\cdots],$$

因此有 $1=b_1,\ 0=b_2,\ 0=b_3-b_1^3/6,\ 0=b_4-b_2b_1^2/2,$

$$0=b_5-b_1b_2^2/2+b_1^2b_3/2+b_1^5/120,\ \cdots$$

这就逐步导出

$$b_1=1,\ b_2=0,\ b_3=1/6,\ b_4=0,\ b_5=3/40,\ \cdots$$

或 $$x=\arcsin y=y+y^3/6+3y^5/40+\cdots。$$

泰勒级数

具有正的收敛半径 r 的幂级数 $\sum a_nx^n$ 定义一个函数 $f(x)=\sum a_nx^n$，它对于 $|x|<r$ 是 x 的连续函数。这个级数反复的逐项微分给出此函数 $f(x)$ 的任意阶导数。另一方面，如果给定一个函数 $f(x)$，诸如 $\sin x$，$\sqrt{1+x^2}$ 或 $\arctan x$ 等等，那末仍有待证明，这个函数能展开成一个收敛的幂级数以及怎样能确定这一展开中的系数。这个问题是由泰勒(Brook Taylor, 1685～1731 年）和麦克劳林 (Colin Maclaurin, 1698～1741 年)解决的。

如果给定的函数完全能展开为一个幂级数，

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

那末 $f(x)$ 必须任意阶可微。逐项微分并使 $x=0$ 相继地导致

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \longrightarrow f'(0)=a_1,$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2xa_3+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots \longrightarrow f''(0)=2a_2,$$
$$f'''(x)=3\cdot 2\cdot 1a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-2}+\cdots \longrightarrow f'''(0)=3!a_3,$$
$$\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)\cdots 2a_{n+1}x+\cdots \longrightarrow f^{(n)}(0)=n!a_n.$$

幂级数倘若收敛，则它采取所谓麦克劳林级数的形式

$$f(x)=f(0)+(f'(0)/1!)x+(f''(0)/2!)x^2+\cdots。$$

类似的考虑也成立对于以 x_0 为中心的幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 并导致所谓泰勒级数

$$f(x)=f(x_0)+(f'(x_0)/1!)(x-x_0)+(f''(x_0)/2!)(x-x_0)^2+\cdots。$$

如果用 x_0+h 代替 x, 则得到

$$f(x_0+h)=f(x_0)+(f'(x_0)/1!)h+(f''(x_0)/2!)h^2+\cdots。$$

泰勒定理　为了研究这些级数的收敛性，引进部分和以及余项 R_n (见 **II**. 第5章的泰勒形式):

$$f(x_0+h)=f(x_0)+(f'(x_0)/1!)h+\cdots+(f^{(n)}(x_0)/n!)h^n+R_n。$$

余项 R_n 表示在给定函数与近似函数之间的差，它可借助于 $f(x)$ 的 $(n+1)$阶导数来估计。这种余项形式通常立即表明，当 $n\to\infty$ 时它有极限零，因而级数收敛于 $f(x)$。

泰勒定理　如果函数 $f(x)$ 在从 x_0 到 x_0+h 的闭区间上有连续的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$, 如果在这个区间内部至少存在它的 $(n+1)$ 阶导数，那末在

$$f(x_0+h)=f(x_0)+(f'(x_0)/1!)h+(f''(x_0)/2!)h^2+\cdots+(f^{(n)}(x_0)/n!)h^n+R_n$$

中的余项 R_n 可以写成

a) 拉格朗日形式：存在一个数 ϑ 为 $0<\vartheta<1$, 使得

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h), \text{ 或}$$

b) 柯西形式：存在一个数 ϑ' 为 $0<\vartheta'<1$, 使得

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{n}(1-\vartheta')^n f^{(n+1)}(x_0+\vartheta' h)。$$

为了确定这些余项形式，利用微分中值定理的拓广，即对于两个在闭区间 $[x_0,\ x_0+h]$ 内部的连续可微函数 $F(x)$ 和 $\varphi(x)$ 及 $\varphi'(x)\neq 0$, 存在一个数 ϑ 为 $0<\theta<1$, 使得

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}=\frac{F'(x_0+\vartheta h)}{\varphi'(x_0+\vartheta h)}。$$

选择函数 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x)=(x_0+h-x)^{n+1}, \quad \text{有} \quad \varphi(x_0)=h^{n+1},\ \varphi(x_0+h)=0$$

及

$$\varphi'(x)=-(n+1)(x_0+h-x)^n。$$

函数 $F(x)$ 是从余项

$$R_n=f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)/1!-\cdots-h^nf^{(n)}(x_0)/n!$$

中将 x_0+h 写为 x_1, 将 (x_1-x_0) 写为 h, 然后使 x_0 成为变量 x 而得的。这个函数

$$F(x)=f(x_1)-f(x)-(x_1-x)\cdot f'(x_1)/1!-(x_1-x)^2\cdot f''(x)/2!$$
$$-\cdots-(x_1-x)^n\cdot f^{(n)}(x)/n!$$

在区间$[x_0,\ x_0+h]$上连续，在它的内部可微，并取值

$$F(x_0)=R_n,\ F(x_0+h)=0,\ F'(x)=-(x_1-x)^n f^{(n+1)}(x)/n!。$$

因而广义中值定理产生

$$\frac{-R_n}{-h^{n+1}}=\frac{-[h^n(1-\vartheta)n/n!]f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)}{-(n+1)h^n(1-\vartheta)^n}$$

或
$$R_n=[h^{n+1}/(n+1)!]f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h),$$

即余项的拉格朗日形式。

辅助函数的不同选择导致不同的余项形式。 柯西形式是通过选择$\varphi(x)=x_0+h-x$而得的。

麦克劳林级数中的余项。 泰勒定理对于这个级数也适用。余项取形式 $R_n=[x^{n+1}/(n+1)!]f^{(n+1)}(\vartheta x)$（拉格朗日），

$$R_n=[x^{n+1}/n!](1-\vartheta')^n f^{(n+1)}(\vartheta' x)（柯西）。$$

三角函数 函数$\sin x$和$\cos x$在$x=0$处有下列导数

$\sin x$		$\cos x$	
	$f(0)=f^{(4k)}(0)=\sin 0=0$		$f(0)=f^{(4k)}(0)=\cos 0=1$
	$f'(0)=f^{(4k+1)}(0)=\cos 0=1$		$f'(0)=f^{(4k+1)}(0)=-\sin 0=0$
	$f''(0)=f^{(4k+2)}(0)=-\sin 0=0$		$f''(0)=f^{(4k+2)}(0)=-\cos 0=-1$
	$f'''(0)=f^{(4k+3)}(0)=-\cos 0=-1$		$f'''(0)=f^{(4k+3)}(0)=\sin 0=0。$

令$n=2m$，对于任意x以及$0<\vartheta<1$或$0<\vartheta'<1$得到

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$
$$+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos(\vartheta x),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}$$
$$+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}\cos(\vartheta' x)。$$

对于任意一个x，当$m\to\infty$时，这两个余项都趋于零，从而这两个级

数始终收敛。

这些级数的自乘导致正弦和余弦函数方幂的级数。为此也可运用加法定理，例如，

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left[\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\cdots\right]。$$

前面通过除法由 $\sin x/\cos x$ 已经求得 $\tan x$ 的级数。对于 $1/\cos x$, $x/\sin x$ 和 $x\cot x$ 的级数可类似地由除法而求得。

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}-+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad r=\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\cdots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad r=\infty$$

$$\sin^2 x=x^2-x^4/3+2x^6/45-\cdots$$

$$\cos^2 x=1-x^2+x^4/3-2x^6/45+\cdots$$

$$\sin^3 x=x^3-x^5/2+13x^7/120-\cdots$$

$$\cos^3 x=1-3x^2/2+7x^4/8-61x^6/240+\cdots$$

$$\tan x=x+x^3/3+2x^5/15+17x^7/315+\cdots,\quad r=\pi/2$$

$$x\cot x=1-x^2/3-x^4/45-2x^6/945-x^8/4725-\cdots,\quad r=\pi$$

$$x\operatorname{cosec} x=x/\sin x=1+x^2/6+7x^4/360+31x^6/15120+\cdots,\quad r=\pi$$

$$\sec x=1/\cos x=1+x^2/2+5x^4/24+61x^6/720+\cdots,\quad r=\pi/2$$

指数函数和双曲函数 因为函数 e^x 的所有导数都等于 e^x，因而在 $x=0$ 处都为 1，所以得到 $e^x=1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\vartheta x}$，其中 $0<\vartheta<1$。对于一般的指数函数 $a^x=e^{x\ln a}$ 可以得出一个相似的对于所有 x 收敛的级数。

泰勒级数也可用来获得指数函数的加法定理，因为

$$e^{x_0+h}=e^{x_0}+e^{x_0}h/1!+e^{x_0}h^2/2!+\cdots$$

给出

$$e^{x_0+h}=e^{x_0}(1+h/1!+h^2/2!+\cdots)=e^{x_0}e^h。$$

定义 $\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$ 和 $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$，连同指数函数的幂级数，导致这些双曲函数的幂级数。于是 $\tanh x=\sinh x/\cosh x$ 以及 $\coth x=\cosh x/\sinh x$ 的级数可以通过分子和分母中出现的幂级数的除法而求得。

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad r=\infty$$

$$a^x=e^{x\ln a}=1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\cdots,\quad r=\infty,\ a>0$$

$$\sinh x=x+x^3/3!+x^5/5!+\cdots+x^{2n+1}/(2n+1)!+\cdots,\quad r=\infty$$

$$\cosh x=1+x^2/2!+x^4/4!+\cdots+x^{2n}/(2n)!+\cdots,\quad r=\infty$$

$$\tanh x=x-x^3/3+2x^5/15-17x^7/315+-\cdots,\quad r=\pi/2$$

$$x\coth x=1+x^2/3-x^4/45+2x^6/945-x^8/4725+-\cdots,\quad r=\pi$$

对数 对于对数函数 $\ln(1+x)$, $f(1)=0$ 并且

$$\frac{d^n\ln x}{dx^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n,$$

从而 $f^{(n)}(1)/n!=(-1)^n/n$。因此由泰勒定理产生:

$$\ln(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-+\cdots+(-1)^{n-1}x^n/n$$
$$+(-1)^n x^{n+1}/[(n+1)(1+\vartheta x)^{n+1}]。$$

这里 $0<\vartheta<1$。在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的情况下，当 $n\to\infty$ 时余项趋于零。对于区间 $|x|<1$, 可以通过几何级数 $1/(1+x)=1-x+x^2-x^3+\cdots$ 的逐项积分获得同一个级数。

对数函数	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,\quad |x|<1$

这个级数通常不适宜于计算，因为除非 x 是十分小，不然它收敛得太慢了。

由 $\ln(1-x)=-x-x^2/2-x^3/3-\cdots$ 和 $\ln[(1+x)/(1-x)]=\ln(1+x)-\ln(1-x)$, 得到一个当 $|x|<1$ 时收敛的级数; 对于 $\xi>1$, $1/\xi=x<1$, 就得到第二个公式。

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$

$$\ln\sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}}=\frac{1}{\xi}+\frac{1}{3\xi^3}+\frac{1}{5\xi^5}+\cdots$$

为了利用级数来计算对数，希望把一些快速收敛的级数组合起来。因为$\frac{81^3\cdot 24^2\cdot 10^7}{80^3\cdot 25^2\cdot 9^7}=2$，于是 $\ln 2=7\ln(10/9)-2\ln(25/24)+3\ln(81/80)$。这里所包含的收敛得最慢的级数是

$$\ln\left(\frac{10}{9}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}+\frac{1}{2\cdot 100}+\frac{1}{3\cdot 1000}+\cdots。$$

类似地　$\ln 3=11\ln(10/9)-3\ln(25/24)+5\ln(81/80)$,

$\ln 5=16\ln(10/9)-4\ln(25/24)+7\ln(81/80)$。

可以采用的数学方法的多样性，以致高斯觉得"计算对数表时有点诗意"。

二项级数　对正整数 m,

$$f(x)=(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\cdots+\binom{m}{m}x^m。$$

如果 m 不是正整数，则函数 $f(x)=(1+x)^m$ 可以展开成一个对于 $|x|<1$ 收敛的麦克劳林级数。这里 $f(0)=1$, $f'(0)=m$, $f''(0)=m(m-1)$, $\cdots$, $f^{(n)}(0)=\binom{m}{n}\cdot n!$。

二项级数	$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\cdots;\quad r=1$

这个级数是牛顿在1676年发现的，但大约100年之后才由欧拉正确地获得。对于计算带有任意指数的根和幂的近似值来说，它是有用的。对于 $m=1/2$, $1/3$, $-1/2$ 和 $-1/3$, 并且 $|x|<1$ 得到

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^n-\cdots$$
$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdots 3n}x^n+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+-\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^n+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3+-\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}x^n+\cdots$$

几何级数的幂，即 $1/(1-x)$ 的整数幂，当 $|x|<1$ 时可以十分简单地通过微分而得：

$$1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots$$
$$1/(1-x)^2=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$$
$$1/(1-x)^3=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots+(1/2)(n+1)(n+2)x^n+\cdots$$

反三角函数和反双曲函数　因为这些函数的一阶导数是简单的代数函数，它们可以展开为二项级数，于是这些函数本身的展开可以通过逐项积分而得。例如，

$$\frac{d(\arctan x)}{dx}=1/(1+x^2)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots,\quad |x|<1,$$

导致 $\int dx/(1+x^2)=x-x^3/3+x^5/5-x^7/7+\cdots+c$，而积分常数为 $c=\arctan 0=0$。因为 $\operatorname{arccot} x=\pi/2-\arctan x$，所以这也导出对于 $\operatorname{arccot} x$ 的一个展开。$1/\sqrt{1-x^2}$ 二项展开的积分导致对于 $\arcsin x$ 的幂级数，从而也导致对于 $\arccos x=\pi/2-\arcsin x$ 的幂级数。对于反双曲函数成立类似的结果，但所造成的级数并非都是幂级数。

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)x^{2n-1}}{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n-1)}+\cdots,$$
$$r=1$$

$$\arccos x=\pi/2-x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\cdots,\quad r=1$$

$$\arctan x=x-x^3/3+x^5/5-x^7/7+-\cdots+(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)+\cdots,$$
$$r=1,\ x=\pm 1$$

$$\operatorname{arc\,cot} x = \pi/2 - x + x^3/3 - x^5/5 + x^7/7 - + \cdots,\ r=1,\ x=1$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 6} - + \cdots$$
$$+(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)x^{2n-1}}{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n-1)},\quad r=1$$

$$\cosh^{-1} x = \pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \cdots\right],\quad x>1$$

$$\tanh^{-1} x = x + x^3/3 + x^5/5 + x^7/7 + \cdots + x^{2n+1}/(2n+1) + \cdots,\ r=1$$

$$\coth^{-1} x = 1/x + 1/(3x^3) + 1/(5x^5) + 1/(7x^7) + \cdots,\ |x|>1$$

特殊函数的级数

只有通过级数展开才能显式赋值的积分例子有高斯误差积分、余弦和正弦积分，以及对数积分。

【例】 对于正弦积分，通过被积函数的一致收敛级数的逐项积分而得到一个收敛级数：

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \cdots\right)dt = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots$$

高斯误差积分 $r=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=1$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \cdots\right)$$

正弦积分 $r=\infty$

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \cdots$$

余弦积分 $r=\infty$

$$\mathrm{Ci}(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t}\,dt = \ln\gamma + \ln x - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^4}{4!4} - \cdots$$

欧拉（或马雪罗尼）常数

$$\ln\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$
$$\ln\gamma = 0.57722\cdots$$

对数积分 $r=\infty$

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t},\quad t=e^{-u}$$

$$\mathrm{Li}(e^{-u}) = \ln\gamma + \ln|u| - u + \frac{u^2}{2!2} - \frac{u^3}{3!3} + \frac{u^4}{4!4} - + \cdots$$

逼近

泰勒定理应用举例 泰勒定理常常用来计算一个函数 $f(x)$ 的近似值。余项可用来确定级数需要多少项以达到指定的准确度，而当用固定的项数以及当变量限于某个特殊范围内时，余项可用来给出误差的一个界限。

数 e 的计算。 泰勒定理应用于 e^x，在 $x=1$ 处给出

$$e=1+1+1/2!+\cdots+1/n!+e^{\vartheta}/(n+1)!,\ 0<\vartheta<1。$$

如果要正确地计算 e 到 7 位小数，则可迅速确定应选择多大的 n，以达到所要求的准确度。因为 $e^0=1<e^{\vartheta}<e^1<3$，所以余项满足不等式 $1/(n+1)!<R_n<3/(1+n)!$。为了避免舍入误差，最好要求 $R_n<10^{-8}$。于是 n 必须满足 $3/(n+1)!<10^{-8}$ 或 $(n+1)!>3\cdot10^8$。因为 $12!\approx4.8\cdot10^8$，所以取 $n=11$ 就足够了。于是 $1+1+1/2!+\cdots+1/11!=2.718281826\cdots$ 余项可以由 $1/12!\approx2\cdot10^{-9}$ 与 $3/12!\approx6\cdot10^{-9}$ 来估计。于是，得到不等式 $2.718281828\cdots<e<2.718281832$ 从而给出准确到 7 位小数的 e 为 $e=2.7182818\cdots$。如果进行这个计算，会觉得增加准确度不太费力。然而面临一个在实际计算中常常出现的问题，即舍入误差的问题。用于数值计算的级数各项几乎总是循环小数，它必须截尾和舍入。这个舍入过程也许会使得不可能以绝对肯定的方式预测所达到的准确度。实际上发现可靠的是取比最终结果所要求的多一到二位小数进行计算，并且还记下每一项是向下舍入还是向上舍入，使得在最终结果舍入之前可说出舍入误差的可能最大值。为了说明这一点，这里利用泰勒定理来计算 $e^{-0.1}$：$e^{-0.1}=1-0.1+0.005-\cdots+R_n$，其中 $R_n=(0.1)^{n+1}\cdot e^{-\theta\cdot0.1}/(n+1)!$，这里 $0<\theta<1$。注意 $0.905<e^{-\theta\cdot0.1}<1$。

$e=2.718\cdots$

图 8.2-3 数 e，自然对数的底

这个级数的前四项导致旁边的计算。对于 R_3，成立不等式 $0.000004167>R_3>0.000003770$，结果是 $e^{-0.1}$ 满足 $0.904837103<e^{-0.1}<0.904837500$。因而 $e^{-0.1}=0.904837\cdots$ 准确到 6 位小数。仅仅用四项连同余项大多只能期望准确到 4 位或 5 位；在第 7 位中至多不过 4 个单位的误差，其计算的准确度是惊人的。当 $f^{(n+1)}(x_0)$ 与 $f^{(n+1)}(x_0+h)$ 相差不多并且在从 x_0 到 x_0+h 的区间中 $f^{(n+1)}(x)$ 单调

$$\begin{array}{r} 1.000000000 \\ -0.100000000 \\ +0.005000000 \\ -0.000166667 \\ \hline 0.904833333 \end{array}$$

时，运用泰勒定理总是能导致满意的结果。

数 π 的计算。反正切级数可以用来计算 π。这个级数为

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots。$$

在这个级数中，余项 R_n 不能直接采用在泰勒定理中所给出的形式。虽然函数 $f(x)=\arctan x$ 具有任何阶导数，但逐阶求导方式较为复杂难以用来给出一个显式公式。然而，直接运用中值定理可以得到如下的余项公式：

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - + \cdots + (-1)^{k-1}x^{2k-1}/(2k-1)$$
$$+ (-1)^k x^{2k+1}/[(2k+1)(1+\vartheta x^2)],\ 0<\vartheta<1。$$

对于 $x=1$，这产生

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - + \cdots + (-1)^{2k-1}/(2k-1)$$
$$+ (-1)^k/[(2k+1)(1+\vartheta)],\ 0<\vartheta<1。$$

这个等式是由格雷戈里(James Gregory, 1638～1675年)和莱布尼茨发现的，因而称做*格雷戈里-莱布尼茨等式*。余项在 $1/[2(2k+1)]$ 和 $1/(2k+1)$ 之间，结果可以看出，这个公式对于 π 的实际计算不很适宜。为了将 π 计算到 5 位小数，将需要 100000 项。因而试图寻找更适宜的自变量值代入反正切级数中去。譬如，$\arctan(1/\sqrt{3})=\pi/6$，导致

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}\cdot\frac{1}{1+\vartheta}\right],\ 0<\vartheta<1。$$

将几个不同角度的反正切级数组合起来最终导致特别方便的公式。这里引用其中的两个公式，它们已用在电子计算机上计算 π：

高斯

$$\pi = 48\arctan(1/18) + 32\arctan(1/57) - 20\arctan(1/239);$$

斯托梅尔(Störmer, 1896)

$$\pi = 24\arctan(1/8) + 8\arctan(1/57) + 4\arctan(1/239)。$$

上面两个公式在 1961 年曾用来将 π 计算到 100265 位小数。两部机器按二进制计算，每部机器采用一个不同的公式互相校验。高斯公式需要 4 小时 22 分，斯托梅尔公式要 8 小时 43 分。转换成二进制花费 42 分钟；打印结果占了 20 页。

实际上这样的"准确度"是没有意义的。知道 π 的 14 位小数，就足以计算一个半径为 6400 公里(地球的半径！)的圆周长，而误差小于 0.001 毫米。为了使这样的误差界限有意义，半径也必须按类似的准确度确定；然而以测量技术的目前水平无论怎样都不可能达到这个准确度。

二项级数的用途 二项级数常用于根的近似计算。由泰勒定理,

$$(1+x)^a=1+\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2+\cdots+\binom{a}{n}x^n+\binom{a}{n+1}x^{n+1}(1+\vartheta x)^{a-n-1},$$

其中 $0<\vartheta<1$ 且 $|x|<1$。

例如,为了将 $\sqrt[3]{999}$ 算到 12 位小数,就要在上述公式中令 $x=-1/1000$ 及 $a=1/3$,因为 $\sqrt[3]{999}=10(1-1/1000)^{1/3}$。为了达到所要求的准确度,取 $n=2$ 就足够了,因为在 $x=0$ 和 $x_0+h=-0.001$ 处 $(n+1)$ 阶导数值相差非常小。这里有 $1/(1.62\times10^{10})<R_2<1.003/(1.62\times10^{10})$,从而

$$9.996665556173<\sqrt[3]{999}<9.996665556175,$$

或

$$\sqrt[3]{999}=9.99666555617\cdots$$

这种准确程度用多位数表难以达到。它显示了这个方法的功效;较高的准确度花费比较少的额外努力。

如果二项级数用于根的近似计算,就必须将自变量取为 $1\pm\delta$ 形式,这里 δ 一般将不超过 0.1。为了做到这一点,常常需要运用一些手段,这最好用例子来说明。如果要求 $\sqrt[n]{a}$ 并且如果存在一个整数 b 使 $b^n\approx a$,那就只需写成 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^n\cdot(a/b^n)}=b\sqrt[n]{1+(a-b^n)/b^n}$;例如,$\sqrt[5]{33}=2\sqrt[5]{1+1/32}$。如果这个方法不合适,则可以找一个有理数,使它的 n 次幂接近 a。经典的例子是 $\sqrt{2}$。这里 $\sqrt{2}\approx1.4=7/5$,所以可写作

$$\sqrt{2}=\sqrt{\frac{7^2\cdot5^2\cdot2}{5^2\cdot7^2}}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}=\frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}。$$

类似地 $\sqrt[3]{92}\approx4.5=\frac{9}{2}$,这就可以写作

$$\sqrt[3]{92}=\sqrt[3]{\frac{9^3\cdot2^3\cdot92}{2^3\cdot9^3}}=\frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{736}{729}}=\frac{9}{2}\sqrt[3]{1+\frac{7}{729}}。$$

这些例子指出如何能用二项级数十分准确地计算根。这个级数也可用于任意分数指数,当 4 位、5 位甚至 7 位数表未能给出足够的准确度时它特别有用。

逼近。业已证明,在粗略的计算中使用幂级数展开的开头几项颇为有利。这在科学和技术中有众所周知的应用。例如在热力学中,当展开的三次系数成为线性系数的三倍时,往往略去小量的平方和更高次幂。对于小的角度 x,$\sin x$ 常常用 x 来代替。下面的表给出一些常用公式及其

有效范围的概述。如果采用逼近时的误差不希望超出0.001或0.01，那末引用的 $|x|$ 值就不得超出表中指出的界限。对于实用目的，常常不必用函数值表，因为将误差保持在0.1%或1%的以下就够了。例如，在那种情况下，就允许在大到10°的范围内用 x 来代替 $\arcsin x$；这样省力得多了。要是从级数展开中能导出适当的逼近公式，就可以无需去找罕有的特殊函数表；积分的近似计算也常可由适当的逼近公式来做，它很快并且具有很好的准确度。

【例】

1. $\sqrt[4]{258.3}=4\sqrt[4]{\frac{258.3}{256}}\approx4\left(1+\frac{2.3}{4\times256}\right)=4.009$。精确到五位的值为4.00895。

2. $e^{-0.1}\approx1-0.1+\frac{(0.1)^2}{2}=0.905$（精确值0.90484…）。

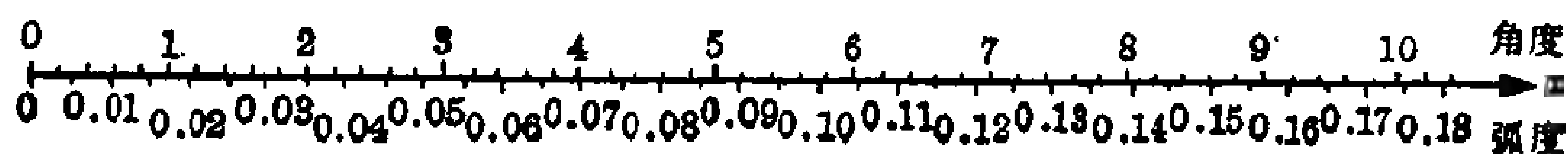
3. $e^{-0.023}\approx1-0.023=0.977$（精确值0.977226…）。

常用逼近　表下的图给出角度 x 和弧度 x 之间的关系。

函数	1次逼近	误差≤ 其中 $\|x\|\le$		2次逼近	误差≤ 其中 $\|x\|\le$	
		10^{-3}	10^{-2}		10^{-3}	10^{-2}
$1/(1+x)$	$1-x$	0.031	0.099	$1-x+x^2$	0.096	0.20
$1/(1+x)^2$	$1-2x$	0.018	0.055	$1-2x+3x^2$	0.063	0.12
$1/(1+x)^3$	$1-3x$	0.012	0.039	$1-3x+6x^2$	0.46	0.095
$\sqrt{1+x}$	$1+x/2$	0.087	0.25	$1+x/2-x^2/8$	0.25	0.48
$\sqrt[3]{1+x}$	$1+x/3$	0.095	0.27	$1+x/3-x^2/9$	0.25	0.47
$\sqrt[4]{1+x}$	$1+x/4$	0.10	0.29	$1+x/4-3x^2/32$	0.24	0.49
$1/\sqrt{1+x}$	$1-x/2$	0.050	0.15	$1-x/2+3x^2/8$	0.14	0.28
$1/\sqrt[3]{1+x}$	$1-x/3$	0.065	0.19	$1-x/3+2x^2/9$	0.17	0.34
$(1+x)/(1-x)$	$1+2x$	0.022	0.068	$1+2x+2x^2$	0.077	0.16
$[(1+x)/(1-x)]^2$	$1+4x$	0.011	0.034	$1+4x+8x^2$	0.043	0.090
$\sqrt{(1+x)/(1-x)}$	$1+x$	0.043	0.13	$1+x+x^2/2$	0.12	0.25
$\sin x$	x	0.18	0.39	$x-x^3/6$	0.63	1.04
$\sin^2 x$	0	0.031	0.10	x^2	0.23	0.41
$\cos x$	1	0.044	0.14	$1-x^2/2$	0.39	0.70
$\cos^2 x$	1	0.031	0.10	$1-x^2$	0.23	0.42

(续表)

函数	1次逼近	误差 ≤ 10^{-3} 其中 $\|x\|\leqslant$	误差 ≤ 10^{-2} 其中 $\|x\|\leqslant$	2次逼近	误差 ≤ 10^{-3} 其中 $\|x\|\leqslant$	误差 ≤ 10^{-2} 其中 $\|x\|\leqslant$
$\tan x$	x	0.14	0.30	$x+x^3/3$	0.38	0.58
$\arcsin x$	x	0.18	0.38	$x+x^3/6$	0.42	0.63
$\arccos x$	$\pi/2-x$	0.18	0.38	$\pi/2-x-x^3/6$	0.42	0.63
$\arctan x$	x	0.14	0.31	$x-x^3/3$	0.35	0.57
$\operatorname{arccot} x$	$\pi/2-x$	0.14	0.31	$\pi/2-x+x^3/3$	0.35	0.57
e^x	$1+x$	0.044	0.13	$1+x+x^2/2$	0.17	0.38
$\ln(1+x)$	x	0.044	0.14	$x-x^2/2$	0.14	0.33
$\lg(1+x)$	$0.4343x$	0.069	0.23	$0.4343x+0.2171x^2$	0.20	0.45
$\sinh x$	x	0.18	0.39	$x+x^3/6$	0.65	1.03
$\cosh x$	1	0.044	0.14	$1+x^2/2$	0.39	0.70
$\tanh x$	x	0.14	0.31	$x-x^3/3$	0.38	0.61
$\sinh^{-1} x$	x	0.18	0.40	$x-x^3/6$	0.43	0.70
$\tanh^{-1} x$	x	0.14	0.30	$x+x^3/3$	0.37	0.52



泰勒定理的几何应用

密切抛物线 假定在给定的坐标系中曲线具有方程

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots。$$

如果引进一个新的坐标系，其中的 x 轴是在 P 点与曲线相切而 y 轴沿同一点的法线方向，那末参考新坐标系，曲线在 P 点有下述的值：$x=0, f(x)=0, f'(x)=0$。曲率 $\varkappa$ 一般给出为 $\varkappa=f''/(1+f'^2)^{3/2}$，因而 $f''(0)=\varkappa$。由此得出 $f(0)=a_0=0,\ f'(0)=a_1=0,\ f''(0)=2a_2=\varkappa$，从而在这个新坐标系中曲线方程为 $f(x)=(1/2)\varkappa x^2+\cdots$。因此靠近 P 的曲线段可以由抛物线 $g(x)=(1/2)\varkappa x^2$，即密切抛物线很好地逼近。这是一个二次逼近(见图 8.2-4)。

确定圆弧长 具有圆心角 α 的圆弧长 s 可以从逼近 $s=(8b-a)/3$ 中求得，这里 a 是这段弧的弦而 b 是它的半段弧的弦(见图 8.2-5)，精确

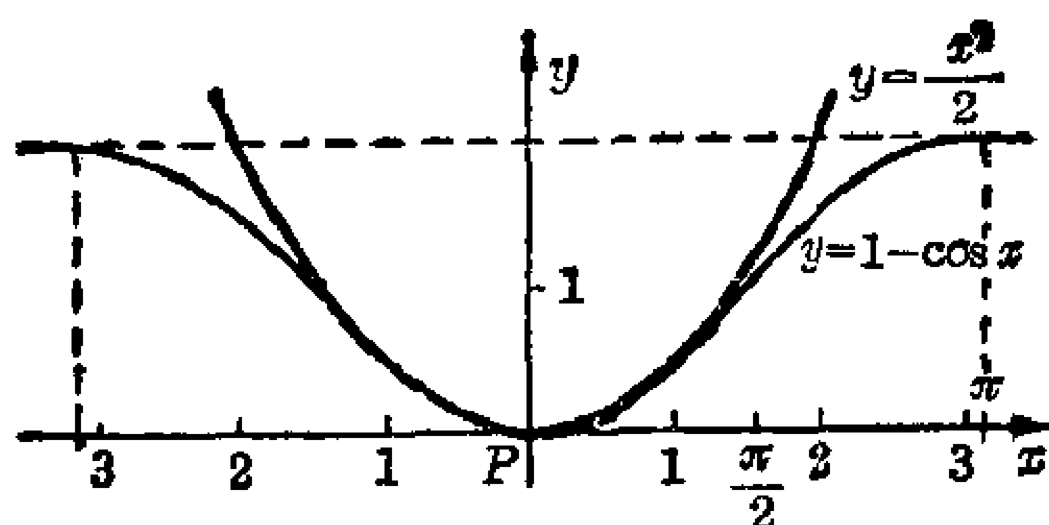


图 8.2-4　函数 $y=1-\cos x$ 的密切抛物线

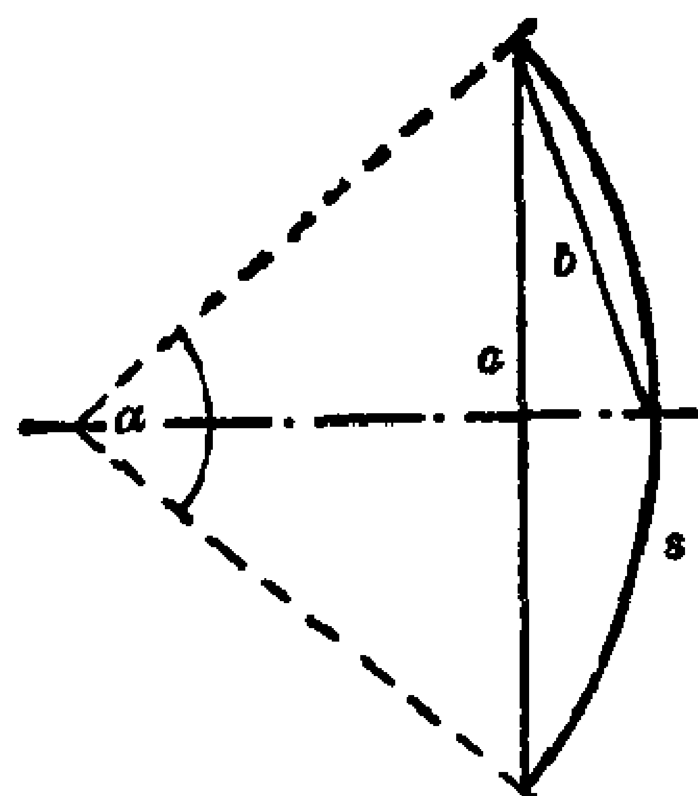


图 8.2-5　确定圆弧长

值为 $s=r\alpha$。因为 $a=2r\sin(\alpha/2)$，$b=2r\sin(\alpha/4)$，所以 $\sin x$ 的级数展开导致

$$\frac{8b-a}{3}=\frac{2r}{3}\left\{8\left[\frac{\alpha}{4}-\frac{(\alpha/4)^3}{3!}+\frac{(\alpha/4)^5}{5!}-\frac{(\alpha/4)^7}{7!}\cos\frac{\alpha\vartheta}{4}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{(\alpha/2)^3}{3!}+\frac{(\alpha/2)^5}{5!}-\frac{(\alpha/2)^7}{7!}\cos\frac{\alpha\vartheta'}{2}\right]\right\}$$

$$=\frac{2r}{3}\left[\frac{3\alpha}{2}-\frac{3\alpha^5}{2^7\cdot5!}+\frac{\alpha^7}{2^7\cdot7!}\left(\cos\frac{\alpha\vartheta'}{2}-\cos\frac{(\alpha\vartheta/4)}{2^4}\right)\right]$$

或

$$\frac{8b-a}{3}=s-\frac{r\alpha^5}{5!\cdot64}\left[1-\frac{\alpha^2}{126}\left(\cos\frac{\alpha\vartheta'}{2}-\frac{1}{16}\cos\frac{\alpha\vartheta}{4}\right)\right]。$$

如果在上面表达式方括弧中的项用 1 来代替，则误差增大，使得逼近的误差至多是 $r\alpha^5/7680$。当 $r=1$ 单位而 $\alpha=30°$ 时，误差小于 $5\cdot10^{-6}$ 单位。

梁的弯曲　梁的弯矩 $M(x)=EJ\varkappa$，其中 E 是弹性模数，J 为横断面的转动惯量，而 $\varkappa$ 是梁中心线在 x 的曲率(见图 8.2-6)。实际上角 α 是非常小的，从而等式 $\varkappa=y''/(1+y'^2)^{3/2}$ 中的分母可以按 $y'^2=\tan^2\alpha$ 的幂次展开。这给出 $\varkappa=y''(x)[1-(3/2)y'(x)^2+(15/8)y'(x)^4+\cdots]$。对于一根稍稍弯曲的梁而言，一次逼近为 $\varkappa=y''(x)$，从而得到关于梁弯曲

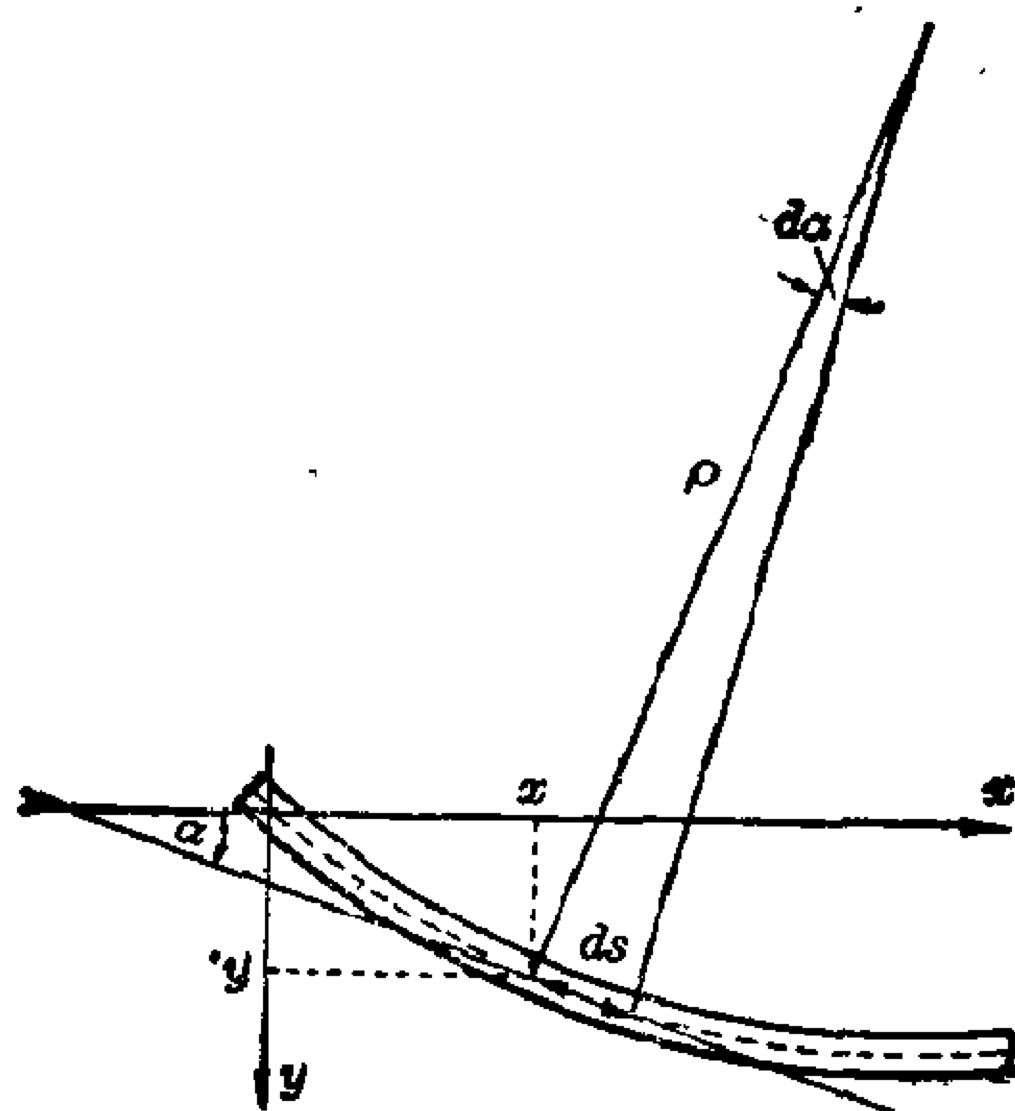


图 8.2-6　梁的弯曲

的微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ}$。

多变量的泰勒定理

泰勒定理也可对多元函数表述。对于两元函数 $f(x, y)$，$n=0$ 的情况为:

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+hf_x(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)$$
$$+kf_y(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k),\ 0<\vartheta<1。$$

这正是两元函数的中值定理。对于 $n=1$ 的情况，有 $0<\vartheta<1$，

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+hf_x(x_0, y_0)+kf_y(x_0, y_0)$$
$$+(1/2!)[h^2f_{xx}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)+2hkf_{xy}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)$$
$$+k^2f_{yy}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)]。$$

对于较大的 n 值所需要的篇幅随着 n 急速地增大，例如，$n=5$ 需要 28 个不同项，而最高阶导数的每一项有 6 个足标。因此使用一个缩写符号是有好处的，它先写成

$$hf_x(x_0, y_0)+kf_y(x_0, y_0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0),$$

然后用这个符号算子 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)$ 的幂次来记高阶项。

两元函数的泰勒定理
$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)$ $+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0, y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ $\times f(x_0, y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k),$ $0<\vartheta<1$

在所有余项中量 ϑ 取相同的值，它取决于 n, x_0, y_0, h 和 k。对于三元或更多元函数可利用相同的符号。对于三个变量得到

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l)=f(x_0, y_0, z_0)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\nu}f(x_0, y_0, z_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+1}$$
$$\times f(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k, z_0+\vartheta l),\ 0<\vartheta<1。$$

牛顿方法的拓广　如果想解一方程组 $f(x, y)=0$，$g(x, y)=0$，并且如果已知近似值 x_0，y_0，则令 $f(x_0+h, y_0+k)=0$，$g(x_0+h, y_0+k)=0$，再按泰勒定理展开。对于 $n=0$，这给出

$$f(x_0, y_0)+hf_x(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)+kf_y(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)=0,$$

$$g(x_0, y_0)+hg_x(x_0+\vartheta' h, y_0+\vartheta' k)+kg_y(x_0+\vartheta' h, y_0+\vartheta' k)=0。$$

如果令 $\vartheta=0$，$\vartheta'=0$ 作为一种逼近，就带来一个误差，从而不能得到精确值 h 和 k 而只能获得近似值 h_1 和 k_1，由这些近似值可算出新的逼近 $x_1=x_0+h_1$，$y_1=y_0+k_1$。如果必要，这个过程可以重复。对于 h_1 和 k_1 得到

$$h_1=-[(fg_y-gf_y)/f_xg_y-f_yg_x)]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},$$

$$k_1=[(fg_x-gf_x)/(f_xg_y-f_yg_x)]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},$$

它们在 $x=x_0$，$y=y_0$ 处赋值。

【例】　解方程组 $f(x, y)=x^2+y-2=0$，$g(x, y)=xy-2=0$。近似值为 $x_0=-1.8$ 和 $y_0=-1.1$。对于这些值得到 $h_1=0.031$，$k=-0.030$，从而新的近似值为 $x_1=-1.769$，$y_1=-1.130$。

8.3　三角级数与调和分析

三角级数理论的发展开始于1822年傅里叶(Joseph de Fourier，1768～1830年)的《热分析理论》一书出版。他持续数年的研究，结果发展出现在冠以他名字的一门广泛的级数理论，它在数学、科学和技术中极其重要。其基本思想是用特殊的(三角)周期函数来表示周期函数。

在声学、电动力学、光学、热力学中为了研究周期运动就使用傅里叶级数。在电气工程问题中，诸如开关元件的频率性态或脉冲的传输问题都可以借助于傅里叶级数来解决。潮汐预报对于航海是很重要的；因为它们是周期现象，所以凡是重要港口的潮汐预报和水位预报人员，都利用傅里叶级数并构造机械仪器。现在几乎没有一个物理学、数学或工程技术分支是不用傅里叶级数的。

三角级数

如果函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 中的一般项为带有常数系数 a_n 和 b_n 的

$$f_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

则此函数级数就称做**三角级数**。如果这个级数在一个长度为 2π 的区间中收敛，那末因为三角函数是周期性的，所以它对于所有 x 收敛并表示一个周期函数。然而这个函数不一定连续，实际上它常常有间断(见图 8.3-1)。另一方面，如果这个级数一致收敛，那末它的和 $f(x)$ 连续。在那种情况下，在系数 a_n, b_n 与和函数 $f(x)$ 之间可以建立一种联系。级数

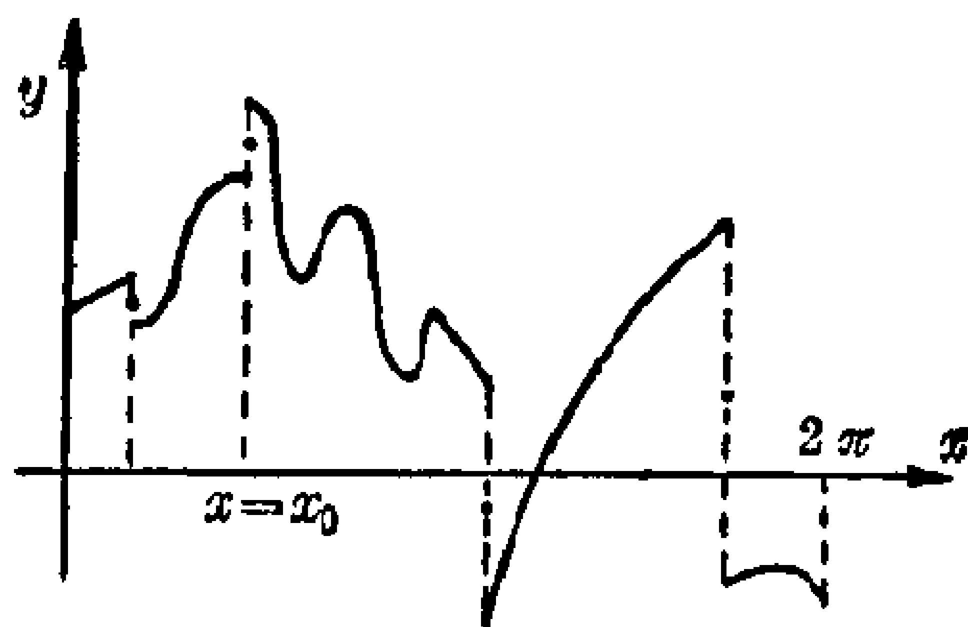


图 8.3-1 可由傅里叶级数表示的函数图形

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

乘以有界因式 $\cos px$ 或 $\sin px$，这里 p 是一个非负整数，并不影响一致收敛性，所以可由级数 $\Sigma f_n(x)\cos px$ 或 $\Sigma f_n(x)\sin px$ 的逐项积分来计算

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos px\,dx \quad 和 \quad \int_0^{2\pi}f(x)\sin px\,dx。$$

这些积分包含有函数 $\cos nx\cos px$, $\sin nx\cos px$, $\cos nx\sin px$, $\sin nx\sin px$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上的积分。按分部积分法发现，当 $n\neq p$ 时这些积分值为 0；当 $p=n$ 时，它们为

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi, \quad 当 n>0,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 nx=2\pi, \quad \int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx=0 \quad 当 n=0。$$

由于 $n=0$ 的例外性态，因此现在惯常将三角级数写成

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

这样，对于所有的 $n\geqslant 0$，系数都能写为：

欧拉-傅里叶公式	$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$

傅里叶级数 可能会提这样的问题：怎样的函数 $f(x)$ 可以表示为三角级数？如果 $f(x)$ 可积，则至少可以用欧拉-傅里叶公式算出数 a_n 和

b_n，然后写出形式级数$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$。

将此称为$f(x)$的傅里叶级数，而a_n，b_n称为函数$f(x)$的傅里叶系数。然而可能发生这样的情况：或者$f(x)$的傅里叶级数根本不收敛，或者虽然它收敛，但是其和不等于$f(x)$；即使$f(x)$连续，也可能出现这种情况。还可以想像$f(x)$具有另一个三角级数的表示。

然而，如果连续函数$f(x)$的傅里叶级数是一致收敛的，那末其和一定是$f(x)$，而且$f(x)$再也没有另外的一致收敛的三角级数表示。这只是一个充分条件：研究$f(x)$的傅里叶级数收敛的充分和必要条件的问题尚未完全解决。

因为傅里叶级数的各项$f_n(x)$是周期为2π的周期函数，所以和函数也具有周期2π，所以考虑周期为2π的周期函数的傅里叶级数才有意思。从一个周期为$2l$的函数，可以通过用$\pi x/l$代替变量x的办法而得到一个周期为2π的函数。假如需要将一个定义在长度为2π的某个区间I中函数$f(x)$的傅里叶展开，则适当的办法是按要求：$f(x+2k\pi)=f(x)$（$x\in I$；k为整数），将此函数延拓到这个区间外部使延拓了的函数具有周期2π。

狄利克雷条件 $f(x)$的傅里叶级数收敛于$f(x)$的一个充分条件应归于狄利克雷(Dirichlet, 1805～1859年)。对于实用目的来说它已足够了。它包括很大一类函数，其中有下图所描述的这种函数。不失一般性，函数$f(x)$可以假定为具有周期2π的周期函数。

假定函数$f(x)$是一个周期2π的周期函数并且对于$0\leqslant x<2\pi$有定义和有界，再假定区间$(0, 2\pi)$可以分成有限多个子区间，在每一个子区间中函数是连续和单调的。于是$f(x)$的傅里叶级数在每一个连续点x_0上收敛于$f(x_0)$，而在跳跃间断点x^*上，它收敛于其左右极限的平均值

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left[\lim_{x\to x^*-0}f(x)+\lim_{x\to x^*+0}f(x)\right]。$$

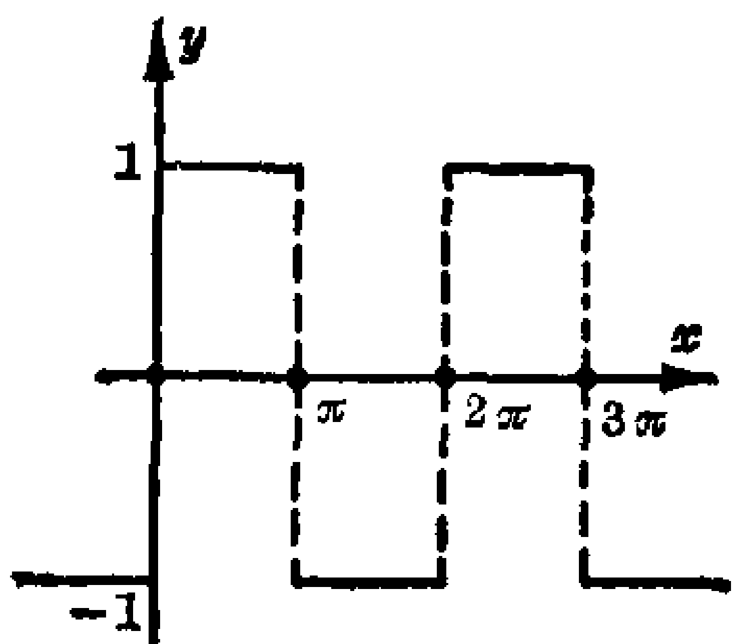


图 8.3-2 矩形曲线

因此，如果预先规定在具有

$$\lim_{x\to x^*-0}f(x)\neq\lim_{x\to x^*+0}f(x)$$

的"跳跃"点x^*上，

$$f(x^*)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\lim_{x\to x^*-0}f(x)+\lim_{x\to x^*+0}f(x)\right],$$

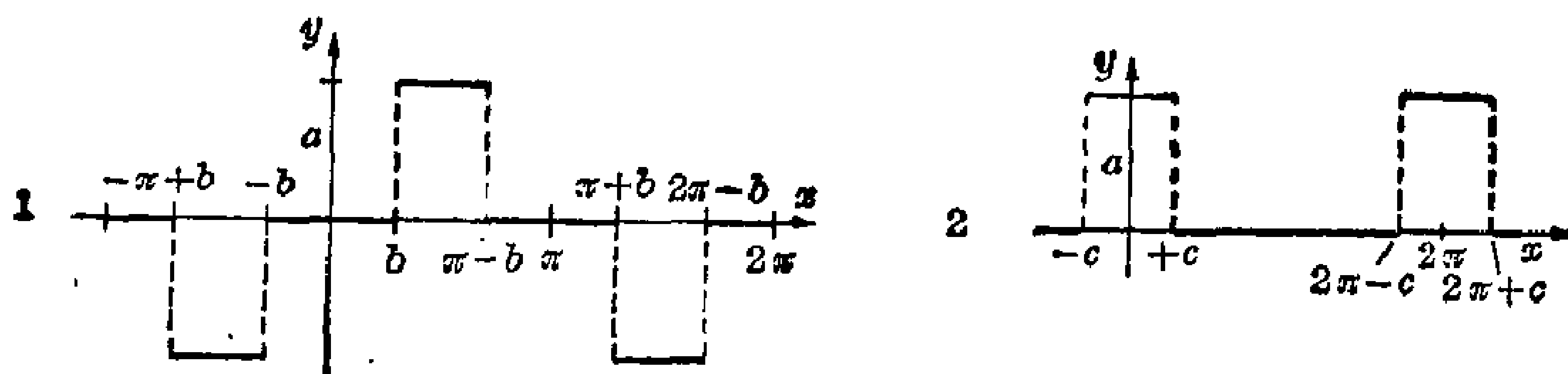
那末$f(x)$的傅里叶级数在定义域内所有的点上收敛于$f(x)$。要求区间

$(0, 2\pi)$可分成有限多个子区间，在每一个子区间中 $f(x)$ 连续且单调，这意味着函数只有有限多个间断和有限多个极值点。

【例】 设 $f(x)$ 给定为：对于 $0<x<\pi$，$f(x)=1$，对于 $\pi<x<2\pi$，$f(x)=-1$，$f(x+2k\pi)=f(x)$，$k=\pm1$，±2，±3，… 在跳跃点上，设 $f(0)=f(k\pi)=0$。狄利克雷条件显然成立(见图 8.3-2)。

欧拉-傅里叶公式中的积分得出对于所有的 n，$a_n=0$，又 $b_{2n}=0(n=1, 2\cdots)$；以及当 $n=0, 1, 2, \cdots$ 时，$b_{2n+1}=4/[\pi(2n+1)]$。

傅里叶级数为 $f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right]$。

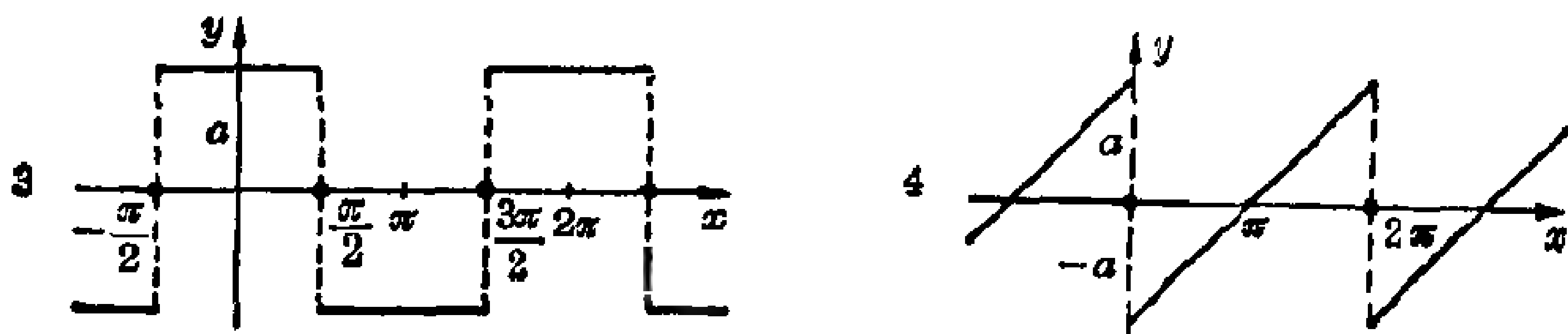


1．第一类矩形脉冲：

$$f(x)=\frac{4a}{\pi}\left[\frac{\cos b}{1}\cdot\sin x+\frac{\cos 3b}{3}\cdot\sin 3x+\frac{\cos 5b}{5}\cdot\sin 5x+\cdots\right]。$$

2．第二类矩形脉冲：

$$f(x)=\frac{2a}{\pi}\left[\frac{c}{2}+\frac{\sin c}{1}\cos x+\frac{\sin 2c}{2}\cdot\cos 2x+\frac{\sin 3c}{3}\cdot\cos 3x+\cdots\right]。$$

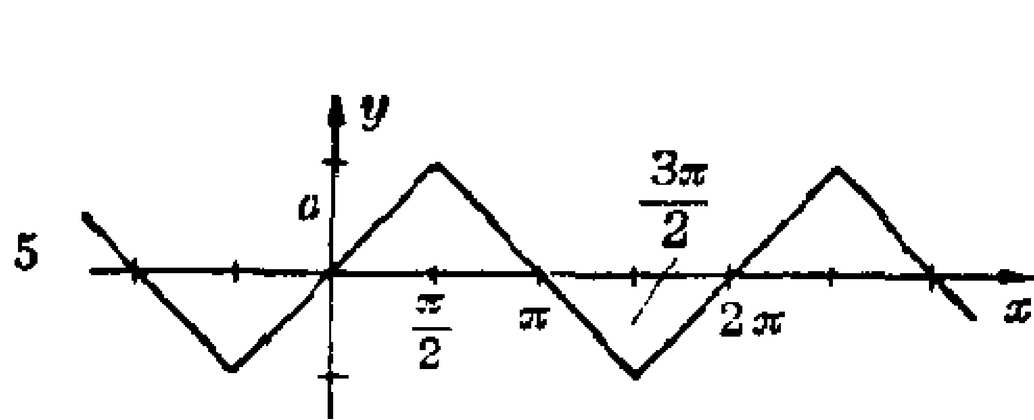


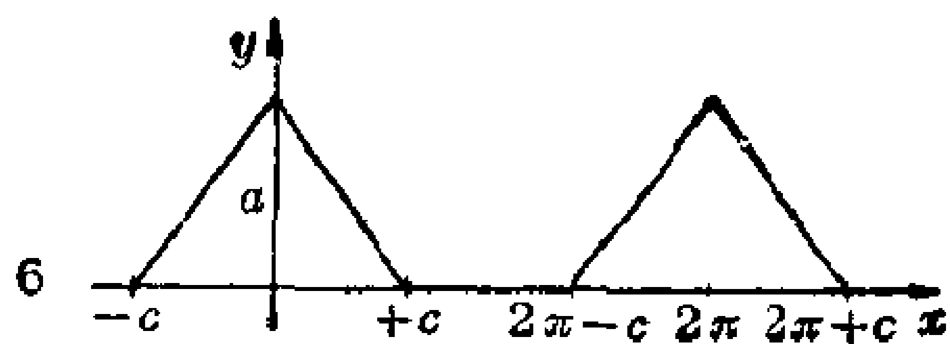
3．矩形曲线：$f(\pi/2)=f(3\pi/2)=\cdots=0$，

$$f(x)=\frac{4a}{\pi}\left[\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-+\cdots\right]。$$

4．锯齿形曲线：$f(0)=f(2\pi)=\cdots=0$，

$$f(x)=-\frac{2a}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right]。$$

5 

6 

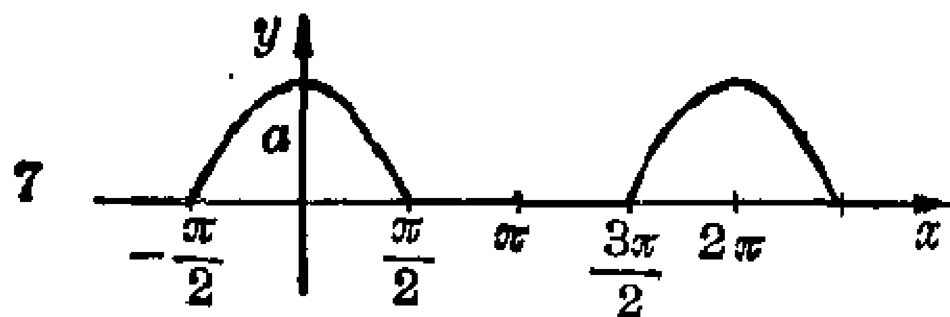
5．三角形曲线：

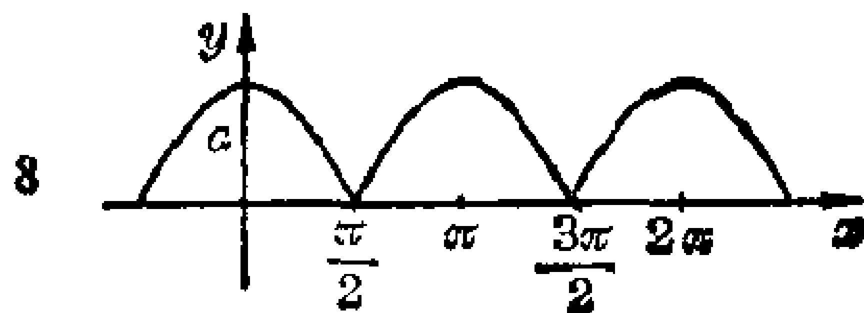
$$f(x)=\frac{8a}{\pi^2}\left[\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-+\cdots\right]。$$

6．三角形脉冲：

$$f(x)=\frac{ac}{2\pi}+\frac{2a}{\pi^2}\left[\frac{1-\cos c}{1^2}\cos x+\frac{1-\cos 2c}{2^2}\cos 2x\right.$$

$$\left.+\frac{1-\cos 3c}{3^2}\cos 3x+\cdots\right]。$$

7 

8 

7．单向整流的交流电，余弦曲线半波：

$$f(x)=\frac{a}{\pi}\left[1+\frac{\pi}{2}\cos x+\frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x-\frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x\right.$$

$$\left.+\frac{2}{5\cdot 7}\cos 6x-+\cdots\right]。$$

8．双向整流的交流电：

$$f(x)=|\cos x|,$$

$$f(x)=\frac{2a}{\pi}\left[1+\frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x-\frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x+\frac{2}{5\cdot 7}\cos 6x-+\cdots\right]。$$

调和分析与调和综合

调和分析 这就是确定傅里叶系数 $a_0, a_1, a_2\cdots, b_1, b_2, \cdots$ 在工程技术中常常用来分析周期现象。一个振动通过调和分析而分成纯粹正弦振动(调和振动)和一个常数部分之和。除了基本振动以外，还出现所谓“调和”振动，它的频率是基频的两倍、三倍等。通常个别调和振动的位相相比于基本振动有一个位移。一般总是令 $a_n\cos nx+b_n\sin nx=c_n\cos(nx-x_n)$；这导致 $a_n=c_n\cos x_n$ 和 $b_n=c_n\sin x_n$，因此

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\ x_n=\arctan(b_n/a_n)。$$

作出矩形曲线的傅里叶系数的过程就是调和分析一例。

如果注意到所分析的函数 $f(x)$ 具有某些对称性质，那末在调和分析中可以节省许多工作：

在偶函数 $f(x)=f(-x)$ 的傅里叶展开中，所有的正弦项空缺，亦即 $b_n=0$。对于奇函数 $f(x)=-f(-x)$ 所有的余弦项空缺，亦即所有的 $a_n=0$（包括 a_0）。对于一个具有性质 $f(x+\pi)=-f(x)$ 的函数，绝对项是 $a_0=0$，并且仅出现奇数足标的系数（$a_2=a_4=\cdots=b_2=b_4=\cdots=0$）。

假如要对周期函数 $f(x)$ 找一个由正弦和余弦函数的有限和 $\Phi_n(x)=\sum_{j=0}^{n}(a_j\cos jx+b_j\sin jx)$ 组成的尽可能好的逼近，则类似于最小二乘法选择积分 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-\Phi_n(x)]^2dx$ 作为差 $f(x)-\Phi_n(x)$ 的一种量度。当 a_j 和 b_j 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数时，这就取到它的极小值。这是傅里叶系数的又一个重要性质。

调和综合 这是调和分析的逆过程。个别的纯粹振动迭加起来产生一个结果。下图表明矩形曲线傅里叶展开的前三项及和曲线 y 与原曲线 y_R 的比较（见图 8.3-4）。

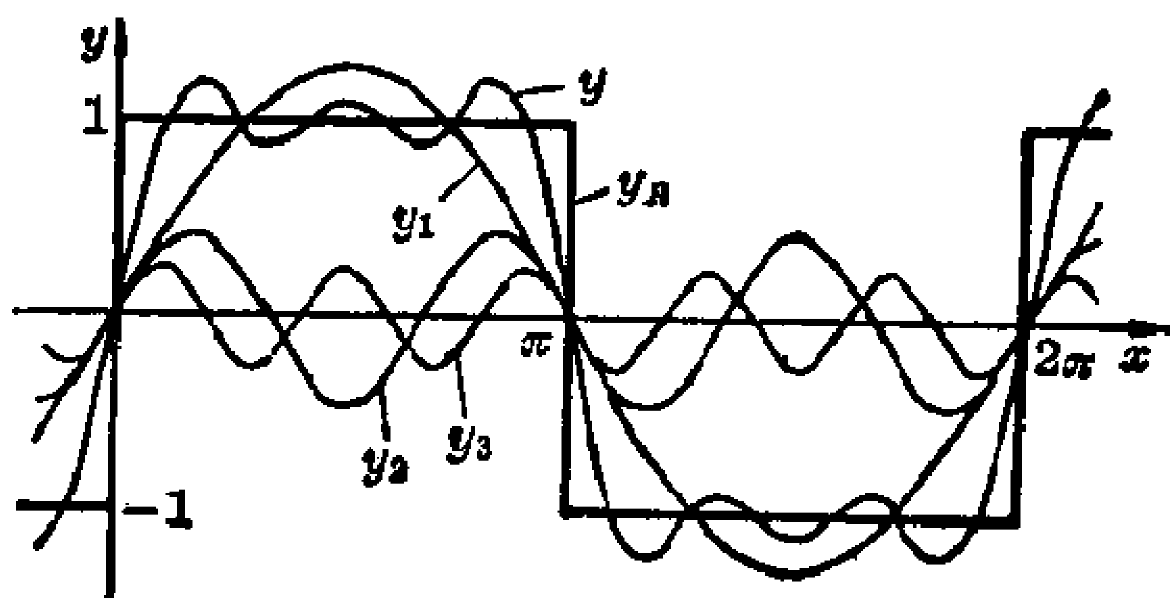


图 8.3-4 矩形曲线调和综合的图形表示

傅里叶系数的近似计算 实际上要展开为傅里叶级数的函数常常不是由一个解析表达式来给出的。它们是由一些配有笔的测量仪器画出来的曲线，诸如活塞发动机的切向力图、泵内压强分布图、机械振动或电机振动记录曲线等。在这些情况下也能作傅里叶分析。于是在欧拉-傅里叶公式中的积分就近似地进行计算。为了这个目的，区间分成 $2m$ 个相等部分（见图 8.3-5）。最好选取等分数为 4 的倍数并利用 12, 24, 36, 72… 等值，因为这样的划分就有可能利用正弦和余弦函数的对称性质，从而节省计算工作。固定坐标系之后，在 $x_0, x_1, x_2\cdots, x_{2m-1}$ 位置上测量函数值；它们记为 $y_0, y_1, y_2\cdots y_{2m-1}$。于是

$$a_0=\frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{2m-1}y_i,$$

$$a_n=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{2m-1}y_i\cos\frac{ni}{m},$$

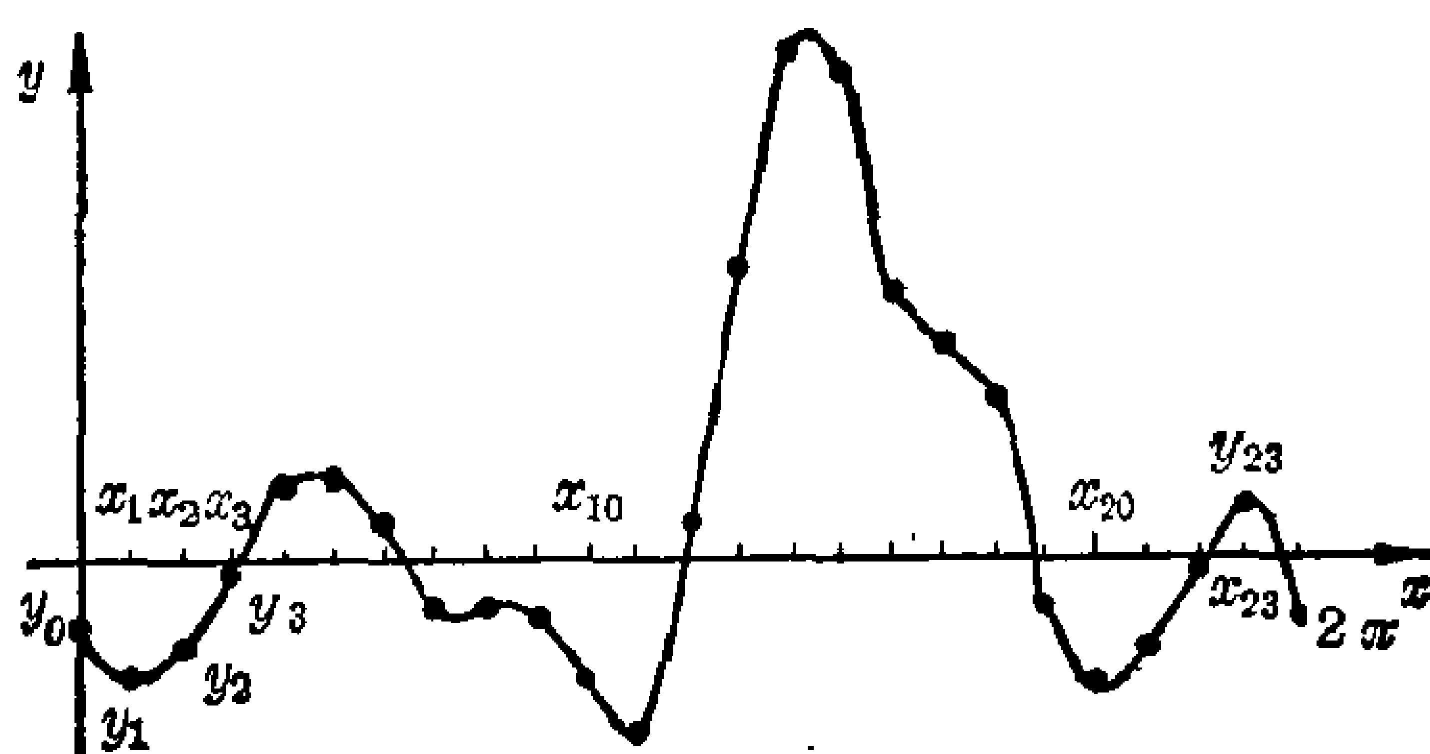


图 8.3-5　经验给出曲线的傅里叶分析

对于 $n=1, 2, \cdots m$,

$$b_n=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{2m-1} y_i \sin\frac{ni}{m},$$

对于 $n=1, 2\cdots, (m-1)$。

如果选取 $2m=24$，则得到 24 个系数 $a_0, a_1, a_2\cdots, a_{12}, b_1, b_2, \cdots b_{11}$。所得的函数 $a_0+\sum_{n=1}^{11}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+a_{12}\cos 12x=f(x)$ 在 x_i 位置上有值 $f(x_i)=y_i(i=0, 1, 2, \cdots, 23)$。

在调和分析中工作量是相当大的。借助于电子计算机和专门技巧，一个训练有素的操作者大约用半个小时可以完成具有 12 个点的调和分析，具有 24 个点的大约用 2 个小时，具有 36 个点的用大约 6 个小时，而具有 72 个点的大约用 16 个小时。如果不凭专门技巧，那末对于 72 个点必须形成大约 5000 个乘积并组合成 72 个和。一台中等速度的电子计算机进行 36 个点的计算约用 2 分钟。打印结果所需的时间通常要多于计算的时间。

调和分析仪　由于曲线的傅里叶分析需要大量时间，就导致了机械仪器仪表的发展。操作这些仪器如同操作求积仪一样。给定的曲线由一支动笔跟踪，随着计算工作，可以读出傅里叶系数或与之成比例的值。这类仪器就称做调和分析仪。

第9章　常微分方程

许多高等分析问题是以常微分方程的知识为必要前提的；例如势论、变分演算、理论物理以及偏微分方程(见 **II.** 第24章)等问题。除此而外，常微分方程开辟了广阔的应用领域；例如摆振动、卫星轨道、载荷机翼、水坝、地震震动、热传导、化学反应与放射性衰变速度的计算，以及电工和造船中的计算等等。这里只考察实变量与实值函数的微分方程，并且不拘于完满的数学严格性，而将给出实践中经常出现的解法。另外还要就这个领域的典型问题对其广泛而又困难的理论以最初的一瞥。

9.1 初步考察

基本概念

微分方程　如果在一元或多元函数与它的某些导数之间，存在一种以方程为形式，方程中也可以出现自变量的关系，那末就称之为*微分方程*。微分方程的每一个解叫做*解*或*积分*；例如微分方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=1$ 具有解 $y=\sin x$，因为代入方程会给出恒等式 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$，它对于所有 x 都成立。反之，对于两个自变量 x 和 y 的函数 $z=f(x, y)$ 可以建立一个微分方程，譬如具有解 $z=xy$。因为在这种情况下 $\frac{\partial z}{\partial x}=y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x$，所以 $z=xy$ 满足微分方程 $\frac{\partial z}{\partial x}y+\frac{\partial z}{\partial y}x=x^2+y^2$。

如果微分方程中出现的函数仅仅依赖于一个自变量，从而也出现仅仅关于这一个变量的导数，那末所讨论的就是*常微分方程*。下面例子都

属于此:

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,\quad \frac{d^2y}{dx^2}+y^2=3xy,\ y'^3-y'xy=0。$$

另一方面，如果所要求的函数依赖于几个自变量并且相应地出现偏导数，那末讨论的是*偏微分方程*。例如

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad 以及 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4xy\frac{\partial z}{\partial x};$$

要找 x 和 y 的函数 $z=f(x, y)$。下面只论述常微分方程。

微分方程的阶与次　微分方程的阶定义为其中所包含的导数的最高阶。n 阶微分方程可以表示成形式 $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0$，其中 F 是括号中那些变元的函数。特别地，$y'=f(x, y)$ 为一般的一阶*显式微分方程*，而 $F(x, y, y')=0$ 为一般的一阶*隐式微分方程*。如果 F 是变元 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的多项式函数，那末它的*次*等于微分方程的次；F 依赖于 x 的情况于此不起作用。无论如何，在微分方程 $y'=x+\sin y'$ 的场合下谈不到什么次数。

微　分　方　程	阶	次
$y'=x+\sin y'$	1	—
$y'^2=x\sin x$	1	2
$y''=3x^2y$	2	1
$y''+3y'+y\cos x=\sin x$	2	1
$y'''y''=y$	3	2

一次微分方程或线性微分方程　在应用方面特别重要。这种方程中的未知函数及其导数只出现一次幂并且也不相乘。因此，一般的 n 阶线性微分方程具有形式 $f+f_0y+f_1y'+f_2y''+\cdots+f_n y^{(n)}=0$，其中 $f, f_0, f_1, \cdots, f_n$ 记 x 的给定函数。

微分方程的积分　如果方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ 在代入函数 $y=\varphi(x)$ 及其导数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 之后变成 x 的一个恒等式，对于某个区间内的所有 x 都成立，那末 $y=\varphi(x)$ 就叫做*解*或*积分*；获得它的过程叫做*求积*，$y=\varphi(x)$ 在 x, y 平面的图象为*积分曲线*。解常常不是初等函数，甚至也不是初等函数的闭合形式。相反地，对应用来说是重要的某些非

初等函数恰恰作为特殊类型微分方程的解而定义出来。例如，1785 年勒让德(Legendre) 研究椭球体在其外一点的引力时，发现了一个后来以他命名的微分方程，它的解就表示为*勒让德多项式*。通常并不强调全部解，而只要能确定解在点 x_0 的某个邻域内的解析性质，研究积分曲线的形状和解的唯一性等等问题就行了。最后，*存在定理*关系到微分方程能肯定地推论出解存在的这种性质。

初步考察微分方程的积分本性 需要将*通解*、*特解*和*奇解*区分开来。解的本性可大致概括如下：

n 阶微分方程的通解正好包含 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$；通解仅在这些常数的范围内确定。

相应地，在积分演算中作为微分方程 $y'=f(x)$ 的解得到积分

$$y=\int f(x)dx+C_{\circ}$$

如果对 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 指定任意固定的数值，那末就获得一个*特解*。因此，所有的特解可以说是包含在通解之中的。

【例】 微分方程 $y'^2+y^2=1$，作为它的通解有 $y=\sin(x+C)$。当 $C=\frac{\pi}{2}$ 时就得到特解 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$。代入微分方程不难看到它事实上确是一个解。

除了通解及特解，微分方程还可能有奇解，它通常对应于所给方程的某种间断性。奇解不能从通解由选取常数而得到。例如刚才提到的微分方程 $y'^2+y^2=1$ 有奇解 $y=\pm1$，这通过微分并代入即可明白。

【例】 二阶微分方程 $y''+y=0$ 具有通解 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$。适当地选取常数 C_1 和 C_2 可得特解 $y=0$，$y=\cos x$，$y=2\cos x$，$y=\sin x$，$y=\pi\sin x$。奇解则不存在。

微分方程与几何

一阶微分方程的方向场 微分方程以隐式 $F(x, y, y')=0$，特别地以显式 $y'=f(x, y)$，对于 x, y 平面里 $f(x, y)$ 有定义的点，指定所求函数 $y(x)$ 的导数值 $p=y'=f(x, y)$，它给出表示函数 $y(x)$ 的曲线的切线方向。一阶微分方程的*方向场*就是以这种方式引出来的。三数组 x, y, p 称为*线素*；点(x, y)是它的承载子。至少借助于方向场可以获得一阶微分方程积分曲线走向的一个大致概念，方向场中在点 (x, y) 的切线方向

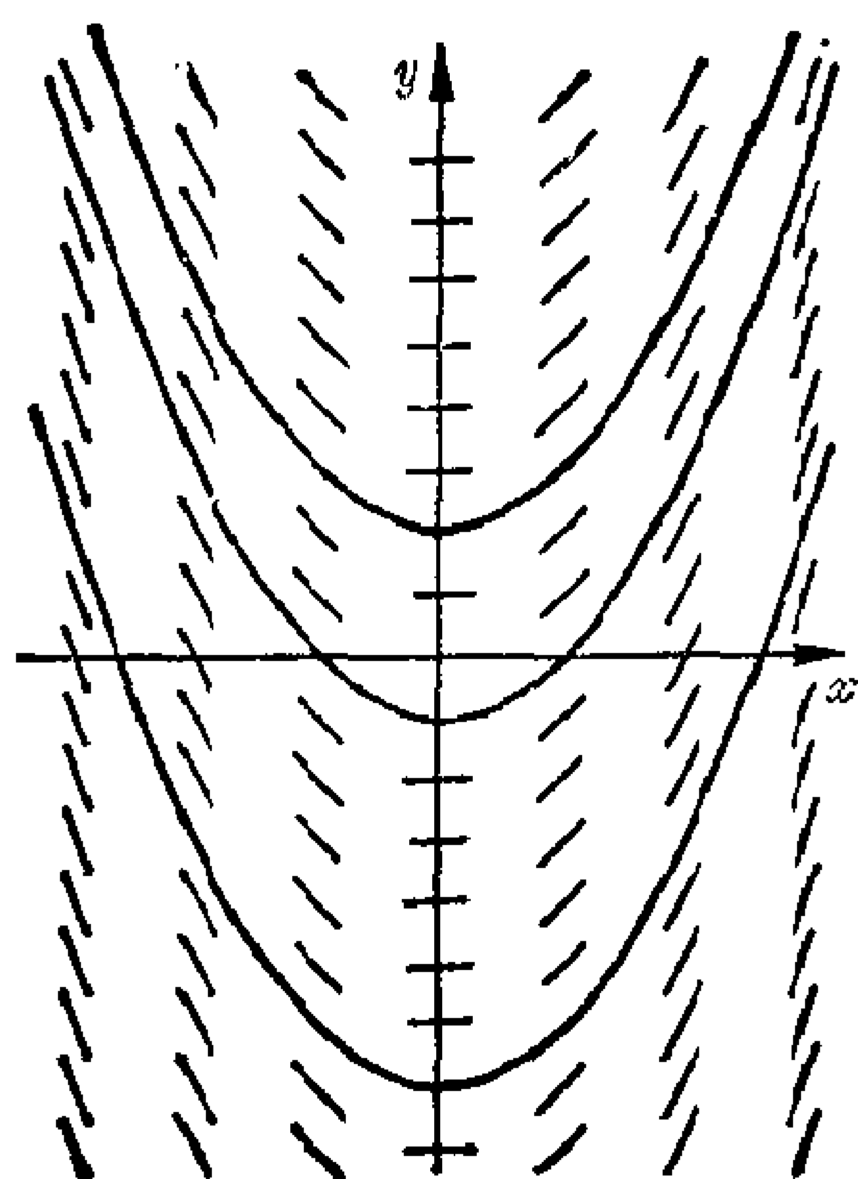


图 9.1-3 微分方程 $y'=x$ 的方向场

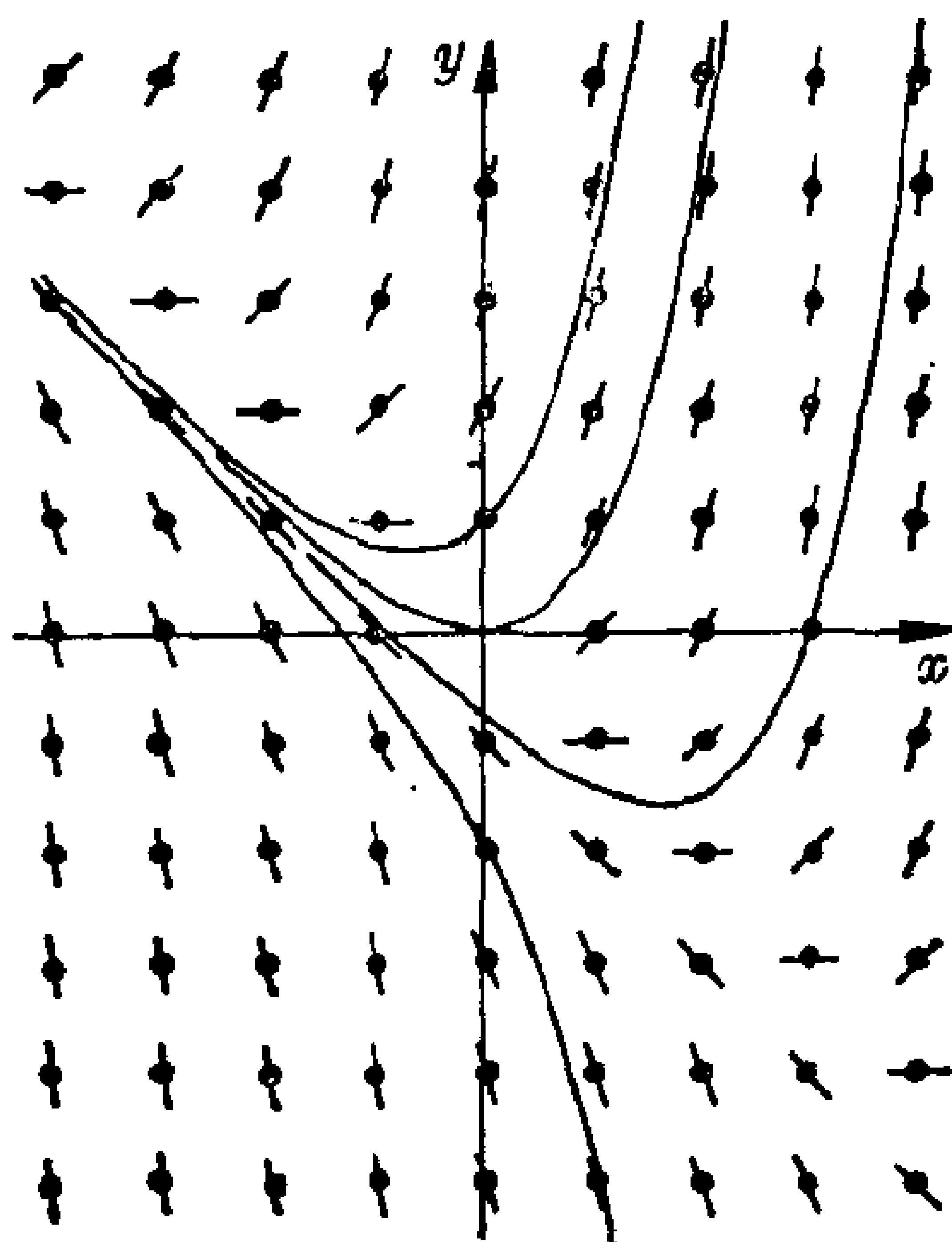


图 9.1-4 微分方程 $y'=x+y$ 的方向场

【例 2】 固定半径 a 的所有圆族具有方程 $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2$。通过微分得到 $(x-C_1)+(y-C_2)y'=0$, 二次微分给出 $1+y'^2+(y-C_2)y''=0$。从这些方程由消去获得 $C_2=(1/y'')(1+y'^2+yy'')$ 及 $C_1=x-(1+y'^2)(y'/y'')$，然后由代入获得微分方程 $y''^2a^2=(1+y'^2)^3$。

族中的所有曲线都包含在相应的微分方程的解之中。然而，还会发生这样的情况，微分方程的解包含不属于原来族中的附加曲线；例如，曲线族 $y=C_1x+C_2$, $C_1>0$, 由所有正斜率的直线组成，它导致微分方程 $y''=0$; 但在这个方程的解之中不仅有所有正斜率的直线，而且还有所有负斜率的直线。

奇解，曲线族的包络 中心位于 x 轴上、半径为 1 的所有圆族 $y^2+(x-C)^2=1$, 满足微分方程 $y^2y'^2+y^2-1=0$, 因为 $yy'+x-C=0$, $C=x+yy'$(见图 9.1-5)。这也为函数 $y=1$ 和 $y=-1$ 所满足，它们并不包含在通解 $(x-C)^2+y^2=1$ 之中，而表现为奇解。几何上它们是圆族的切线并拟合微分方程给定的方向场，即使它们不包含在圆族内。从方向场的线素可以象表示解那样地构造出附加曲线。在图 9.1-6 中画出了这无限多条曲线中的一条曲线。

抛物线 $y=x^2$ 的切线族(见图 9.1-7)。抛物线 $y=x^2$ 在点(x_0, y_0)的

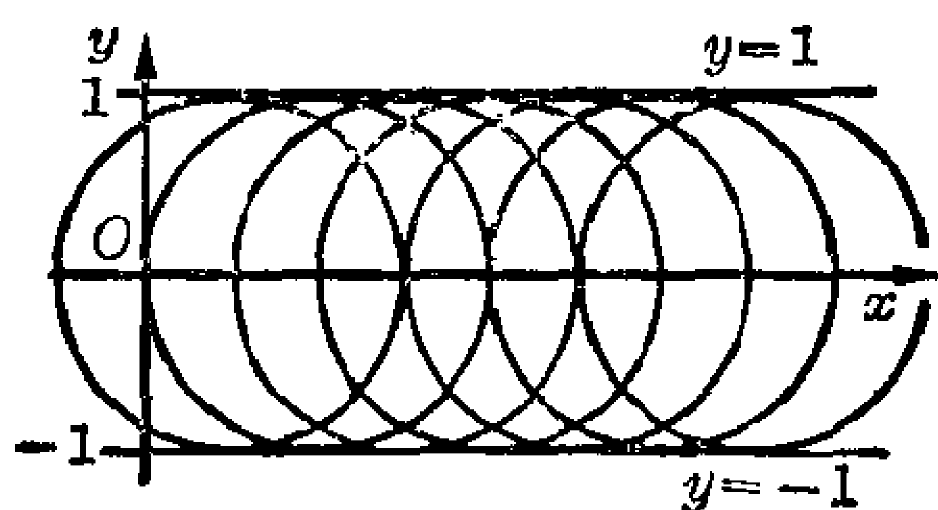


图9.1-5　中心位于x轴上、半径为1的所有圆族

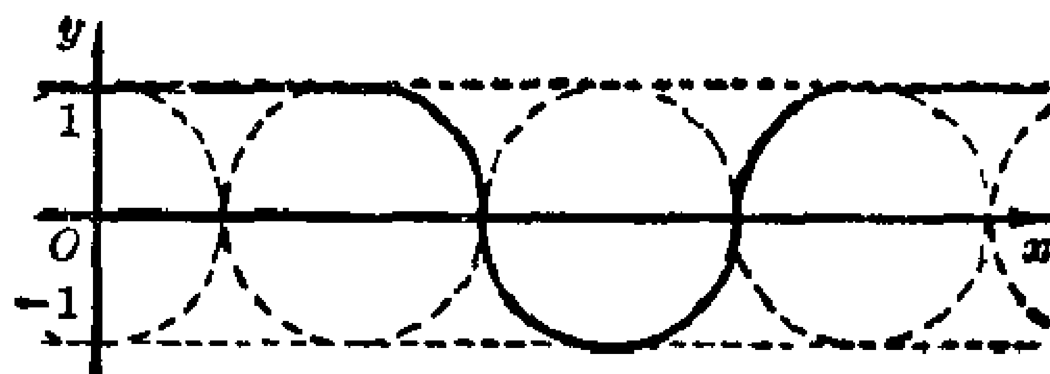


图9.1-6　拟合微分方程 $y^2y'^2+y^2-1=0$ 方向场的合成解曲线

切线方程为 $y+y_0=2x_0x$。因为 $y_0=x_0^2$，而 x_0 可以看作参数 C，所以对于此族得到方程 $y=2Cx-C^2$。从 $y'=2C$, $C=\frac{y'}{2}$，给出此族的微分方程为 $y=xy'-y'^2/4$。与族中每一条曲线相切的该族的包络显然即抛物线 $y=x^2$ 本身。它并不包含在微分方程 $y=xy'-y'^2/4$ 的通解 $y=2Cx-C^2$ 之中。但它满足微分方程，是这个微分方程的奇解。

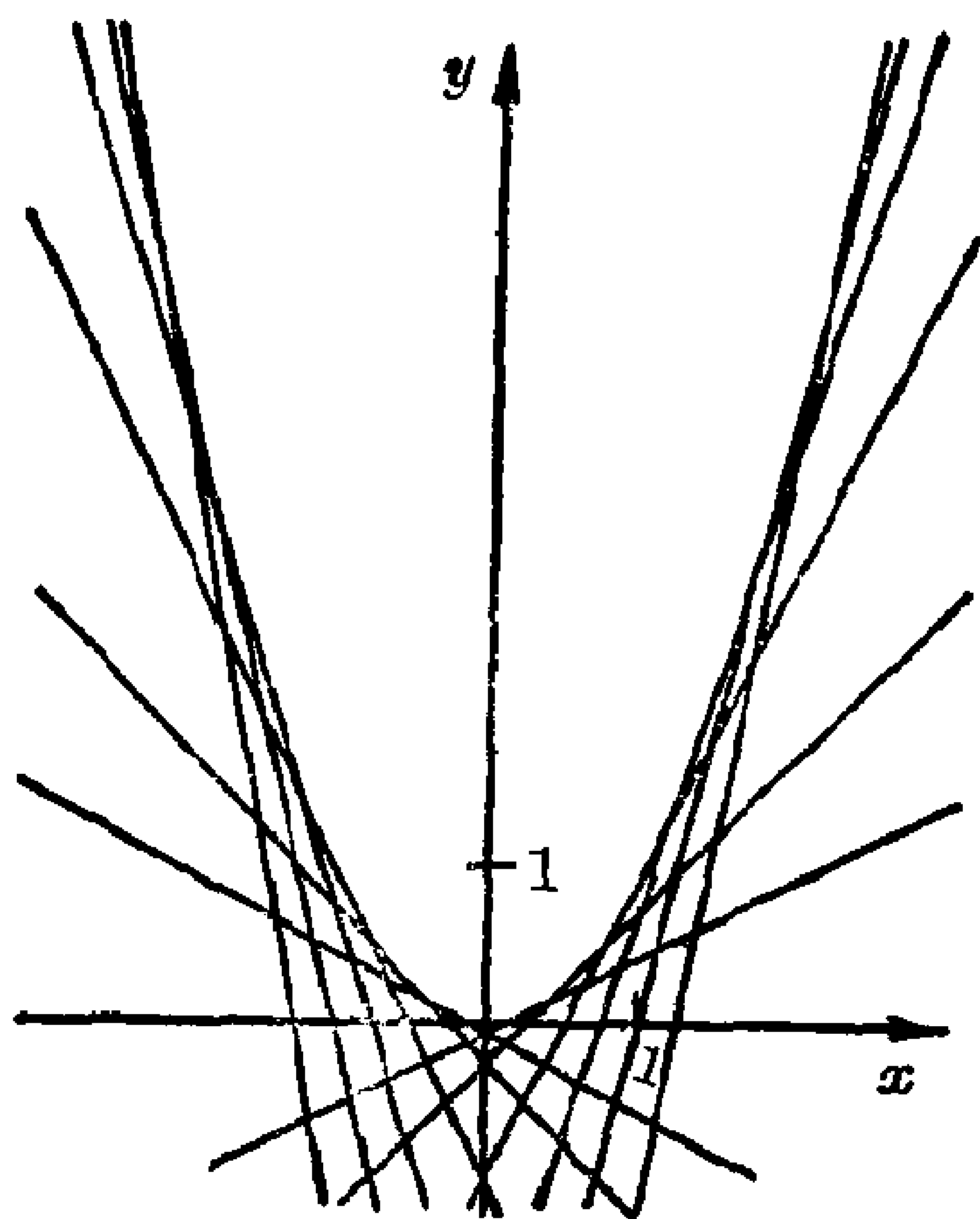


图9.1-7　抛物线 $y=x^2$ 的切线族

曲线族的包络总是该族的微分方程一个解。

由此事实还得出一个寻找单参数曲线族包络的方法，这里假定包络存在，并且只介绍方法而不加以证明。若已知对应于族的微分方程通解 $\Phi(x, y, C)=0$，则从方程 $\Phi(x, y, C)=0$ 及其关于 C 偏微分所

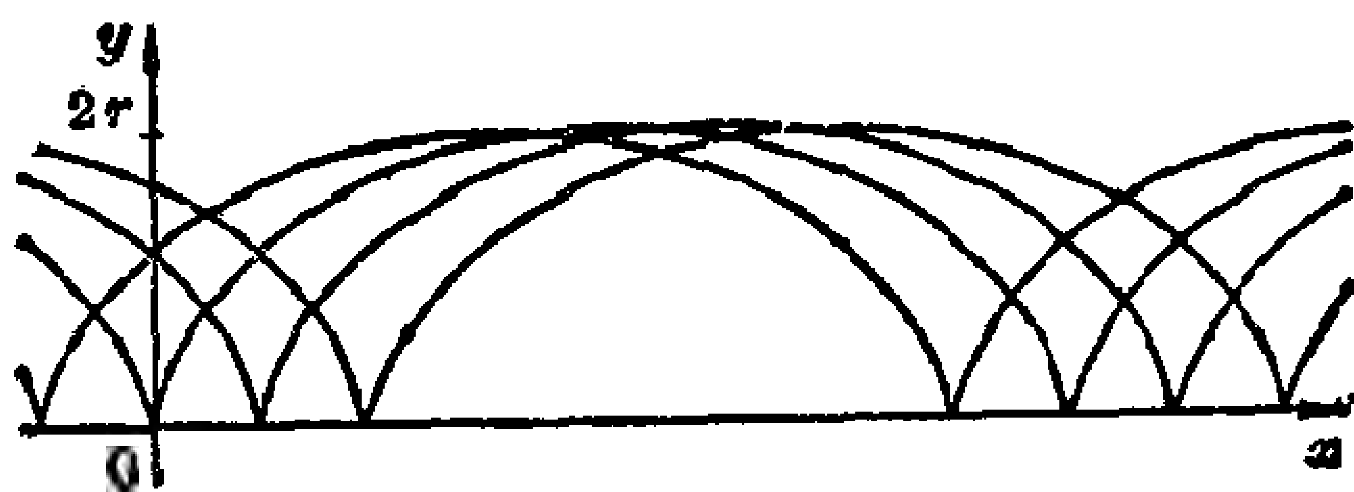


图9.1-8　旋轮线族，直线 $y=0$ 不是包络

得的方程 $\frac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C}=0$ 两者消去 C。有时这个过程也会产生包络以外的其他曲线，它们对于曲线族具有几何意义；例如旋轮线族的尖点轨迹（见图 9.1-8）或者在族中个别曲线自身相交情况下的结点轨迹。

等斜线，正交轨线 一阶微分方程方向场内具有相同场方向的点位于一条曲线上，此曲线称为*等斜线*。在方程 $y'=f(x, y)$ 中代入

$$y'=\text{常数}=a$$

即得等斜线方程。从等斜线可以获得方向场的图象，从而获得微分方程解曲线的图象；例如微分方程 $(x+y)y'+x-y=0$ 用 $y'=a$ 所得的等斜线满足下列方程：当 $a=0$ 时为 $y=x$；当 $a=1$ 时为 $x=0$；当 $a=\infty$ 时为 $y=-x$；当 $a=-1$ 时为 $y=0$。解曲线形成一个所谓的*旋涡*（见图 9.1-9）。

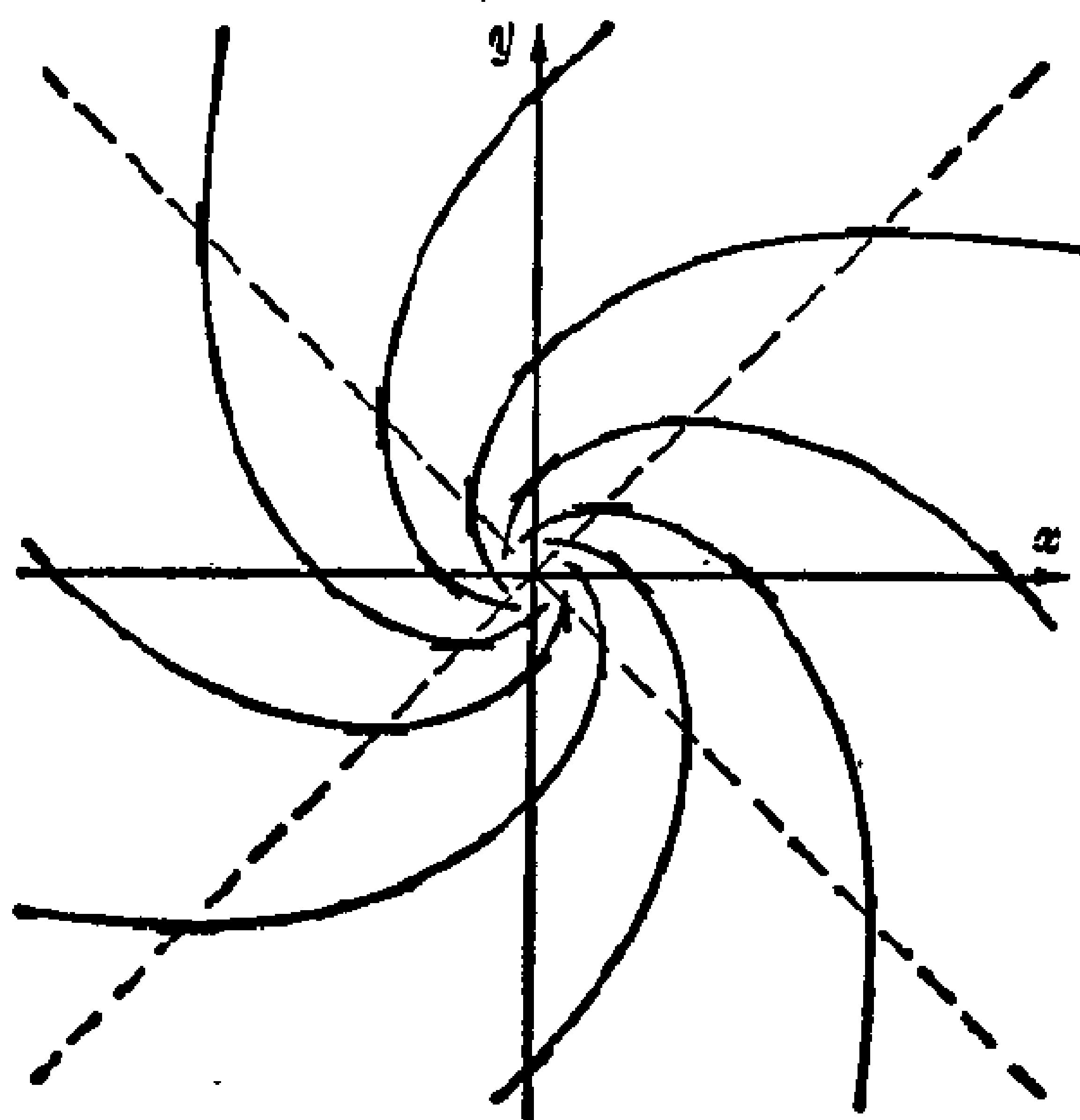


图 9.1-9 由等斜线方法得到微分方程 $(x+y)y'+x-y=0$ 的解曲线

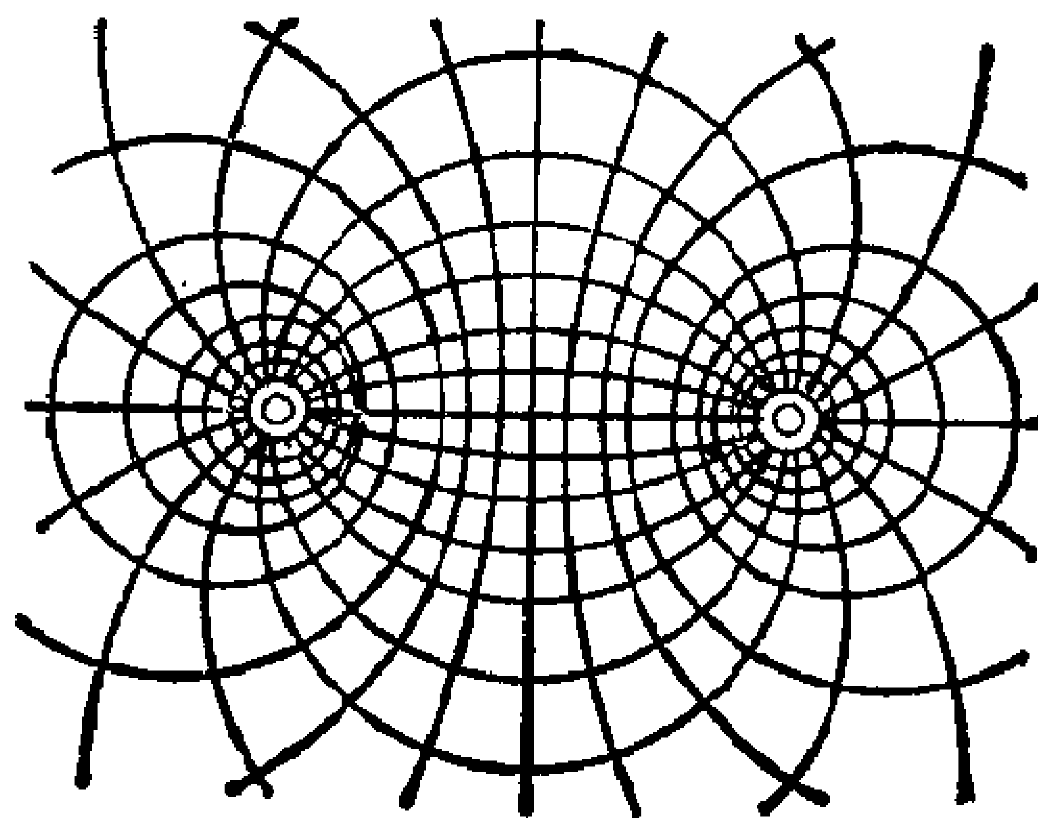


图 9.1-10 双极的力线以直角切割等势线；一族曲线组成另一族的正交轨线

在几何上尤其在物理上常常提出寻找曲线族的*正交轨线族*问题。它们是以直角切割第一族中每一条曲线的那些曲线。磁双极或者电双极的力线形成场线族，它们被等势线正交切割（图 9.1-10）。分析上，在属于曲线族 $\varphi(x, y, C)=0$ 的微分方程 $y'=f(x, y)$ 中用 $-1/y'$ 替代 y' 就得出正交轨线的微分方程。这个方法是基于如下事实：两条正交曲线斜率的乘积为 -1。

【例】 *抛物线族* $y^2=-2(x+C)$ *的正交轨线*。这个抛物线族的微分

方程为 $yy'=-1$，因而正交轨线满足微分方程 $y'=y$，具有通解 $y=Ce^x$。指数曲线族形成抛物线族的正交轨线族，反之亦然。

9.2 初等可积类型

如果一个微分方程的通解可以由通常的求积作为有限多个初等函数的组合而得到，就称其为*初等可积的*。这仅对于应用中常出现的某些类型微分方程才是可能的。通过下面要讲的求解过程，解的存在性问题由实际给出解来解决。

初等可积的一阶微分方程的特殊类型

一般的隐式一阶微分方程 $F(x, y, y')=0$ 在点 (x_0, y_0, y'_0) 的邻域内可以应用隐函数定理解出 y'，只要在该点 $\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$；这就得到显式 $y'=f(x, y)$。

$y'=g(x)$ 类型的微分方程　在这种类型的微分方程中，右端仅仅依赖于 x。如果 $g(x)$ 在开区间 (a, b) 内可积，例如它连续，那末对于区间 (a, b) 内的任意固定点 ξ，函数

$$y=\int_{\xi}^{x} g(t)\,dt+C,\ a<x<b,$$

当常数 C 为任何值时都满足微分方程 $y'=g(x)$。积分演算已经证明这些是满足微分方程的全部函数；这样，y 就表示通解。

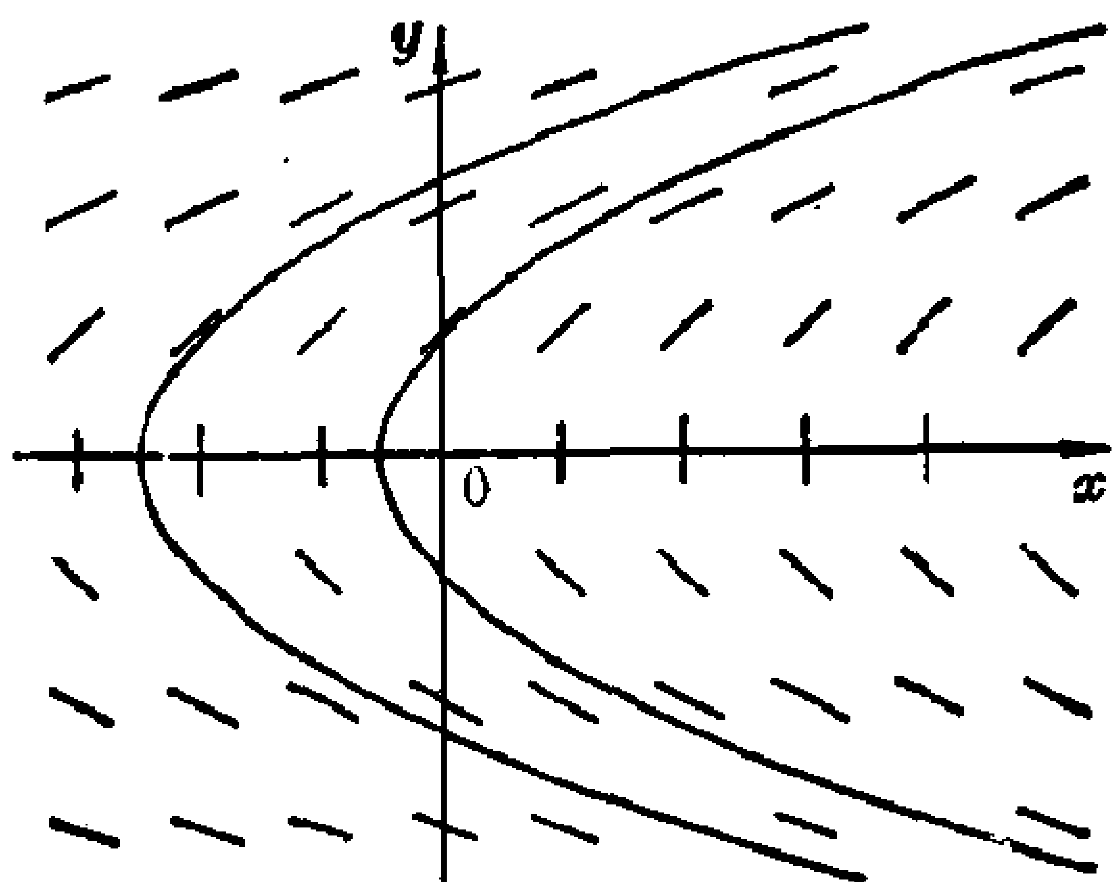


图 9.2-1　微分方程 $y'=1/y$ 的方向场

$y'=h(y)$ 类型的微分方程

如果仅依赖于 y 的函数 $h(y)$ 对于 $c<y<d$ 连续，且在此开区间内处处不等于零，那末这个微分方程可以归结为刚才讨论过的类型。若 $y=y(x)$ 为微分方程 $y'=h(y)$ 的一个解，则*反函数* $x=\psi(y)$ 满足微分方程 $\psi'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{h(y)}$。于是 $x=\int\frac{1}{h(y)}dy$ 在相应于区间 (c, d) 的反函数区间内产生函数 $x=\psi(y)$，它是解 $y=y(x)$ 之反函数。

【例】 微分方程$y'=\frac{1}{y}$在区间$0<c<y<d$内有解，因为$h(y)=\frac{1}{y}$满足所有的条件。它的等斜线是平行于x轴的直线。通过带$\{-\infty<x<+\infty;\ c<y<d\}$内$\eta>0$的点$(\xi,\ \eta)$，$\frac{dx}{dy}=y$的积分曲线是从

$$x=\xi+\int_{\eta}^{y}y\,dy=\xi+\frac{1}{2}(y^2-\eta^2)$$

对于$y>0$解出y而得到。当$x>\xi-\frac{\eta^2}{2}$时这给出$y=\sqrt{\eta^2+2(x-\xi)}$。正象从方向场所预期的，积分曲线为抛物线(见图 9.2-1)。

可分离变量的微分方程　在微分方程

$$y'=e^x\sin y,\ y'=\frac{y}{x^2},\quad y'=\frac{y+1}{x-1}$$

中，右端以特殊的方式依赖于变量x和y；这是两个函数的乘积，其中一个$g(x)$仅依赖于x，另一个$h(y)$仅依赖于y。可是并不都是这种情况，例如由$y'=\sin(xy)$或$y'=x+y$所显示的就非如此。如果微分方程的右端能写成乘积$g(x)\cdot h(y)$，那末就称**变量为可分离的**。在这种情况下假如$g(x)$和$h(y)$为连续函数并且$h(y)$在整个区间$(c,\ d)$内不为零，微分方程$y'=g(x)\cdot h(y)$就容易求解。从$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$得到$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$，两边积分，

$$\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx+C;$$

由上式解出y即得$c<y<d$内的通解。

【例 1】 对于$x>0, y>0$，$y'=-\frac{y}{x}$。这里$g(x)=\frac{-1}{x}$，$h(y)=y$。于是得到

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}+C,$$

$$\ln y+\ln x=C,$$

$$\ln xy=C,$$

$$xy=e^C=c。$$

积分曲线为双曲线。

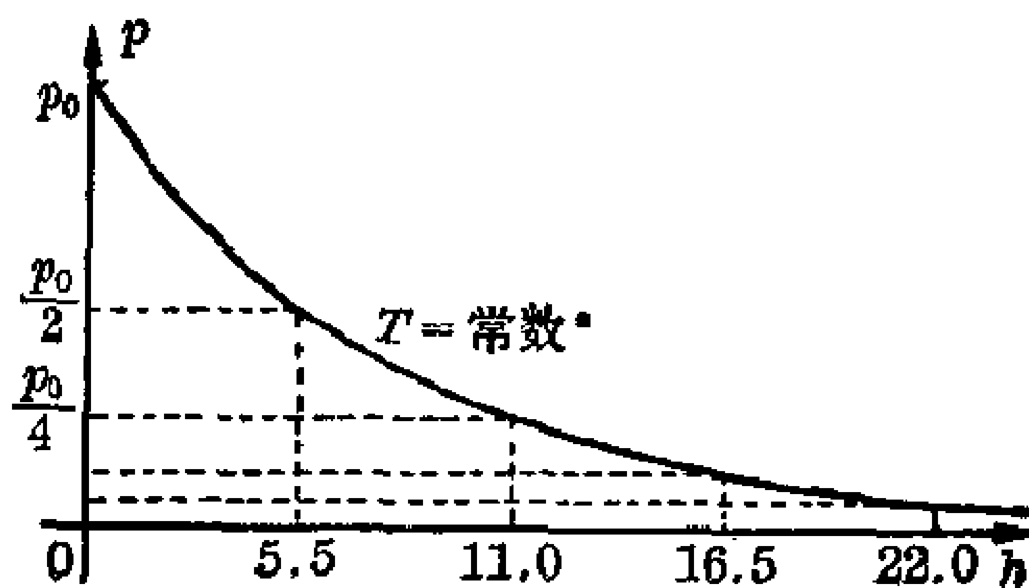


图 9.2-2　常温下以 atm 计量的大气压p作为地面之上以 km 计量的高度h的函数而减少

【例2】 大气压力 p 随着地面之上高度 h 而变化(见图9.2-2)。高度增加 dh，则 p 增加 $dp=-\rho g\,dh$，其中 ρ 为大气的密度而 g 为重力加速度。由波义耳(Boyle)定律，比值 $\frac{\rho}{p}=\frac{\rho_0}{p_0}=a$ 是常数，因而

$$dp=-pag\,dh,\quad \int\frac{dp}{p}=-\int ag\,dh+C,$$

$$\ln p=-agh+C。$$

气压高度公式
$p=p_0e^{-\rho_0gh/p_0}$

当 $h=0$ 时大气压力为 p_0，这是地平面的压力，所以 $C=\ln p_0$。由此得出 $\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)=-agh$，或者 $p=p_0e^{-agh}=p_0e^{-\rho_0gh/p_0}$。随着高度增加，压力按指数减少；假定大气温度均匀一致，则每5.54公里大约减少一半气压。

齐次微分方程 如果 $f(x,y)$ 是商 $\frac{y}{x}$ 的函数 $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，那末微分方程 $y'=f(x,y)$ 称为齐次的；例如

$$y'=\sin\left(\frac{y}{x}\right),\quad y'=\frac{\left(\frac{y}{x}-1\right)x}{y}$$

以及 $y'=-\frac{x^2}{y^2}$。为解此方程就在 $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 内通过代入 $\frac{y}{x}=t$ 而引进一个新变量。于是 $y=tx$，$y'=\frac{dy}{dx}=t'x+t$。这导致微分方程 $t'x+t=\varphi(t)$，或者说 $\frac{dt}{dx}=\frac{\varphi(t)-t}{x}$，其中变量为可分离的。通解是

$$\int\frac{dt}{\varphi(t)-t}=\ln x+C。$$

对 t 求解得 $t=t(x)$，再由此得出所要求的函数 $y=y(x)$。如果被积函数的分母 $(\varphi(t)-t)$ 等于零，那末这个方法就失效，这时 $\varphi(t)=t$，亦即给定的方程为 $y'=\frac{y}{x}$。而在这种情况下，它首先作为可分离变量的微分方程是能处理的。

【例】 为了找出以相同角度 α 切割每一条径向量的所有曲线 $y(x)$，选取与 x 轴成角度 φ 的一条向量。在它与所求曲线 $y(x)$ 的交点上，曲线的切线斜率为

$$y'=\tan(\varphi+\alpha)=\frac{\tan\varphi+\tan\alpha}{1-\tan\varphi\tan\alpha}=\frac{\frac{y}{x}+\tan\alpha}{1-\frac{y}{x}\tan\alpha}。$$

令 $\tan\alpha=a$, 就得到微分方程

$$y'=\frac{a+\frac{y}{x}}{1-a\left(\frac{y}{x}\right)},$$

它是齐次的并且有解

$$\left(\frac{2}{a}\right)\arctan\frac{y}{x}+C=\ln(x^2+y^2)。$$

在极坐标 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ 之下，解为 $\varphi=a\ln r-\left(\frac{a}{2}\right)\cdot C$ 或写为 $r=e^{\frac{\varphi}{a}+\frac{C}{2}}$。

所求的曲线是等角螺线(见图 9.2-3)。

线性微分方程 $y'+p(x)y+q(x)=0$ 在此方程中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 假定为 x 的连续函数。如果 $q(x)\equiv 0$ 亦即如果没有不含 y 或 y' 的项，就称为**线性齐次微分方程**。可以将它作为可分离变量的微分方程处理来求解。从 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 得到 $\ln y=-\int p(x)\,dx+c_1$ 或者 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$。为了由此得出原来非齐次微分方程 $y'+p(x)y+q(x)=0$ 的解，利用拉格朗日的参数变值法。C 不是作为常数，而是 x 的函数，$C=C(x)$。从 $y=C(x)e^{-\int p(x)\,dx}=C(x)\psi(x)$ 得到 $y'=C'(x)\psi(x)+C(x)\psi'(x)$，代入非齐次方程为

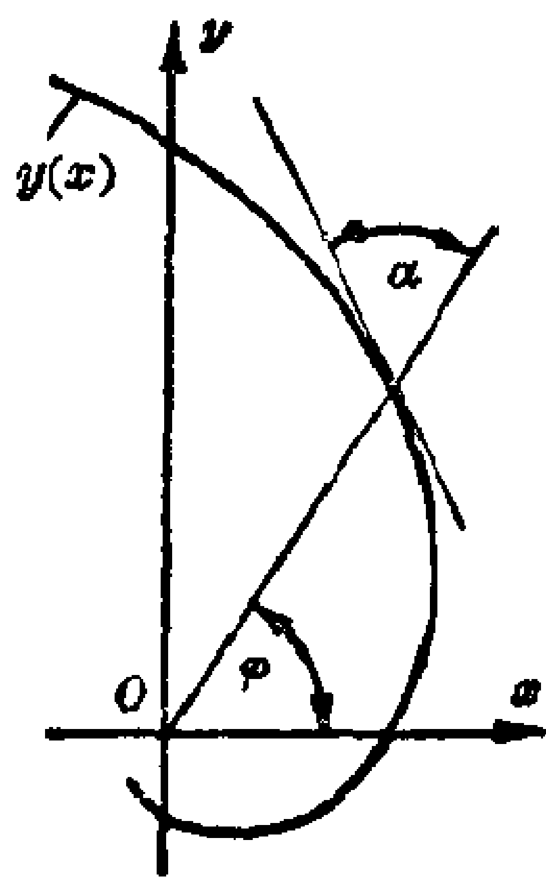


图 9.2-3 等角螺线微分方程的由来

$$C'\psi+q+C[\psi'+p\psi]=0。$$

因为 ψ 满足齐次方程，所以方括号内的表达式为零。这样就得到确定 $C(x)$ 的微分方程 $C'(x)\psi(x)+q(x)=0$。由此得出

$$C(x)=C_1-\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx。$$

$y=z^{1/(1-\frac{1}{2})}=z^2$，由 $y'=2zz'$ 得到线性微分方程 $z'-2\frac{z}{x}-\frac{x}{2}=0$ 及其通解 $z=x^2\left[\frac{1}{2}\ln x+c\right]$。给定方程的积分就为 $y=z^2=x^4\left[\frac{1}{2}\ln x+C\right]^2$。

任意的一阶微分方程的积分

每个一阶微分方程都是可积的，如果其中所含的函数满足某些条件，例如有关连续性的条件，这在存在定理中将说得更加明确。还将假定下述所有的运算，诸如解出给定的隐函数、微分、积分、反函数的形成等都是可能的。

恰当微分方程 显式一阶微分方程 $y'=f(x, y)$ 可表示为形式 $y'=-h(x, y)/g(x, y)$，或者为了避免分式而表示为

$$y'g(x, y)+h(x, y)=0。$$

如果左边为某个函数 $F(x, y)$ 的全微分，即若

$$y'g(x, y)+h(x, y)=\frac{d}{dx}F(x, y),$$

那末这个微分方程称为**恰当的**，方程就容易求积。从 $\frac{d}{dx}F(x, y)=0$ 得到 $F(x, y)=C$，解出 y 得到通解 $y=y(x, C)$。若

$$h(x, y)+g(x, y)y'=\frac{d}{dx}F(x, y)=\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}y'$$

是一个全微分，则必须有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=h(x, y) \quad 和 \quad \frac{\partial F}{\partial y}=g(x, y)。$$

可积性条件	$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$

从 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$ 得出**可积性条件**，微分方程 $y'g(x, y)+h(x,y)=0$ 为恰当的**充分必要**条件。

【例】 给定方程 $y'(6xy+x^2+3)+3y^2+2xy+2x=0$。这里 $g(x, y)=6xy+x^2+3$，$\frac{\partial g}{\partial x}=6y+2x$；$h(x, y)=3y^2+2xy+2x$，$\frac{\partial h}{\partial y}=6y+2x$。因为 $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial y}$，所以这个微分方程是恰当的。

解法。如果给定一个微分方程 $y'g(x, y)+h(x, y)=0$，首先借助于

可积性条件检验它是否恰当。若是这种情况，则存在相应的函数 $F(x,y)$。由 $F(x, y)=C$ 解出 y 就获得微分方程的通解。下面说明怎样找出 $F(x, y)$。

一般情况

$$y'g(x, y)+h(x, y)=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=h(x, y),$$

$$F=\int h(x, y)dx+\varphi(y)。$$

【例】

$$y'(6xy+x^2+3)+3y^2+2xy+2x=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3y^2+2xy+2x,$$

$$F=3y^2x+x^2y+x^2+\varphi(y)。$$

关于 x 积分的结果在一个函数 φ 的范围内完全确定了，φ 此刻尚为未知并且仅依赖于 y。

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int h(x, y)dx+\varphi'(y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=g(x, y),$$

$$\varphi'(y)=g(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int h(x,y)dy。$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=6xy+x^2+\varphi'(y);$$

不过还有 $\frac{\partial F}{\partial y}=6xy+x^2+3,$

这就是说 $6xy+x^2+3=6xy+x^2+\varphi'(y)$。

这是 $\varphi(y)$ 的一个微分方程。

因为可积性条件满足，可以证明右端不依赖于 x；于是

$$\varphi(y)=\int\left[g-\frac{\partial}{\partial y}\int h\,dx\right]dy,$$

$$F(x, y)=\int h(x, y)dx+\varphi(y)。$$

显然　$\varphi'(y)=3$

不依赖于 x。

$$\varphi(y)=3y+\text{常数},$$

$$F(x, y)=3y^2x+x^2y+x^2+3y。$$

由此通解为

$$\int h(x, y)dx+\varphi(y)=C, \qquad 3y^2x+x^2y+x^2+3y=C。$$

积分因子法　如果形如 $y'g(x, y)+h(x, y)=0$ 的微分方程不是恰当的，那末按照欧拉提出的方法乘以函数 $\mu(x, y)$，它要选得使方程变成恰当的，换句话说

$$y'g(x, y)\mu(x, y)+h(x, y)\mu(x, y)=0$$

的左边是一个全微分。这样的函数 $\mu(x, y)$ 叫做欧拉乘子或者叫做积分因子。

【例】　微分方程 $y'(xy-x^2)+y^2-3xy-2x^2=0$ 不是恰当的，因为

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-2x \quad 而 \quad \frac{\partial h}{\partial y}=2y-3x。$$

但是，简单函数 $\mu(x,\ y)=2x$ 是一个积分因子，因为在乘以 $2x$ 之后就得到

$$y'(xy-x^2)2x+(y^2-3xy-2x^2)2x=0,$$

而现在

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy-x^2)2x=4xy-6x^2$$

同时

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2-3xy-2x^2)2x=4xy-6x^2。$$

用上面的方法，这个恰当微分方程的积分给出通解 $y^2x^2-2x^3y-x^4=C$。

$y'g\mu+h\mu$ 成为全微分的条件显然是 $\frac{\partial(g\mu)}{\partial x}=\frac{\partial(h\mu)}{\partial y}$，或者

$$h\frac{\partial\mu}{\partial y}-g\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\right),$$

这是确定 $\mu(x,\ y)$ 的一个偏微分方程。看起来似乎积分问题反而更加困难了。然而，因为只需要这个偏微分方程的个别特解，所以无论如何已达到了实际的好处。可以证明它总是有积分的，即对于 $y'g+h=0$ 总是至少存在一个积分因子。

高阶线性微分方程

在应用中常常出现高阶线性微分方程。一般的 n 阶线性微分方程 $b_0(x)y+b_1(x)y'+b_2(x)y''+\cdots+b_n(x)y^{(n)}=g(x)$，其中的系数 $b_i(x)$ 和扰动函数 $g(x)$ 取 x 的连续有界实函数，并且假定 $b_n(x)$ 在所考虑的区间内不为零。除以 $b_n(x)$ 就得到形式 $a_0(x)y+a_1(x)y'+a_2(x)y''+\cdots+y^{(n)}=f(x)$，其中 $a_i(x)$ 和 $f(x)$ 同样是连续有界的。如果 $f(x)$ 恒等于零，那末方程称为*齐次的*；否则是*非齐次的*。从解齐次微分方程入手，当系数 $a_i(x)$ 为常数时这是最容易办到的。二阶线性微分方程用来作为任意阶线性微分方程的模型。

二阶线性齐次微分方程 $\boldsymbol{a_0(x)y+a_1(x)y'+y''=0}$ 这里不讨论平凡解 $y\equiv0$。

因为这个微分方程就 y 及其导数来说是线性的和齐次的，如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是任意两个特解，那末 $C_1y_1(x)$ 和 $C_2y_2(x)$ 与每一个线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是解，其中 C_1 和 C_2 为任意常数。

为了使微分方程两个特解的线性组合 $C_1y_1+C_2y_2$ 表示通解，y_1 和 y_2

必须线性无关。如果它们线性相关，那末可以找到两个不全为零的常数 α_1 和 α_2，使 $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2=0$。若 $\alpha_1\neq 0$，则 $y_1=-(\alpha_2/\alpha_1)y_2=\bar{\alpha}_1 y_2$，而若 $\alpha_2\neq 0$，则 $y_2=-(\alpha_1/\alpha_2)y_1=\bar{\alpha}_2 y_1$。于是，这两个函数 y_1 和 y_2 只不过表示同一个特解，因为一个正好是另一个的若干倍。

【例】 $y_1=\cos^2 x-\cos 2x$ 和 $y_2=1/2\sin^2 x$ 是线性相关的，因为对于所有的 x 成立 $y_1-2y_2=0$。但 $y_1=x$ 和 $y_2=x^2$，或者 $y_1=\sin x$ 和 $y_2=\cos x$ 是线性无关的。

如果两个特解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性无关，那末它们形成微分方程的一个基本系。在这种情况下商 y_1/y_2 不再是常数，因而它的导数

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)=\frac{y_1' y_2-y_2' y_1}{y_2^2}$$

不恒等于零。行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix}=y_1' y_2-y_2' y_1$$

称为朗斯基(wronski)行列式。成立下列定理:

微分方程 $a_0(x)y+a_1(x)y'+y''=0$ 的两个特解 y_1 和 y_2 形成一个基本系，从而它们的线性组合 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 表示通解，当且仅当由这两个特解形成的朗斯基行列式不为零。

【例】 线性微分方程 $xy''+2y'+axy=0$，其中 a 为任意一个数，通过代入 $u=xy$ 而变换成一个常系数微分方程。应用微分，从 $u=xy$ 逐步得到 $u'=y+xy'$ 或者 $y'=u'/x-u/x^2$，进而 $y''=(u''x-u')/x^2-(u'x-2u)/x^3$。将 y，y' 和 y'' 的表达式代入给定的方程，就得到 $u''+au=0$。后面会证明，当 $a=-1$ 时得 $u_1=e^x$ 和 $u_2=e^{-x}$ 作为解，由此得出 $y_1=e^x/x$ 和 $y_2=e^{-x}/x$ 表示微分方程的一个基本系。

对于任意的系数 $a_0(x)$ 和 $a_1(x)$，不存在找出微分方程

$$a_0(x)y+a_1(x)y'+y''=0$$

基本系的一般过程。不过有参考书可查到解或者查到适当的解法。而如果系数是常数，那末存在一个方法，它总能成功地建立基本系。

常系数二阶线性齐次微分方程　微分方程具有形式 $y''+c_1y'+c_2y=0$。代入 $y(x)=e^{rx}$，于是得 $y'=re^{rx}$，$y''=r^2e^{rx}$，方程就变为 $(r^2+c_1r+c_2)e^{rx}=0$。因为指数函数处处不为零，所以从二次方程就可确定 r 的值。

特征方程	$r^2+c_1r+c_2=0$

如果 r_1 和 r_2 为它的根，那末 $y_1=e^{r_1x}$ 和 $y_2=e^{r_2x}$ 是微分方程的特解。按下列情况得到通解。

1. 根 r_1 和 r_2 是实的且不同。于是 $y_1/y_2=e^{(r_1-r_2)x}$ 不是常数，y_1 和 y_2 线性无关，从而 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ 表示通解，其中 C_1 和 C_2 为任意常数。

2. 特征方程具有重根 $r_1=r_2=-c_1/2$；于是 y_1 和 y_2 线性相关。通过代入可以发现 $y_2=xe^{r_1x}$ 也满足微分方程 $y''+c_1y'+c_2y=0$。因为商 $y_2/y_1=x$ 不是常数，所以特解 y_1 和 y_2 形成基本系，从而 $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$ 是通解，其中 C_1 和 C_2 为任意常数。

3. 根 r_1 和 r_2 是复的。因为按假定 c_1 和 c_2 是实的，所以 r_1 和 r_2 为共轭复数：$r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$。两个特解 $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$ 和 $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$ 形成一个基本系，从而通解是 $y^*=y_1C_1+y_2C_2$ 或者代入 $C_1^*=C_1+C_2$ 和 $C_2^*=i(C_1-C_2)$，得

$$y^*=e^{\alpha x}(C_1^*\cos\beta x+C_2^*\sin\beta x)。$$

在振动问题中会出现这种类型的微分方程。

【例】 微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 具有特征方程 $r^2-3r+2=0$，根为 $r_1=1$ 和 $r_2=2$。由此得出通解 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$。

【例】 数学摆。一个摆，它的总质量 m 假定集中在 A 点(见图 9.2-4)，从 O 点用长度 $l=|OA|$ 的丝线悬挂着。它在重力的影响下来回振荡，其中摩擦及其他影响忽略不计。若在时刻 t 摆与垂线之间的角度为 φ，力 mg 垂直向下作用于质量 m，使得力 $mg\sin\varphi$ 作用在切线方向；g 为重力加速度。由牛顿第二定律，这个力等于质量 m 与加速度 $l\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ 的乘积；这样，对于倾角 $\varphi(t)$ 就获得微分方程

$$ml\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-mg\sin\varphi,$$

或者

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0。$$

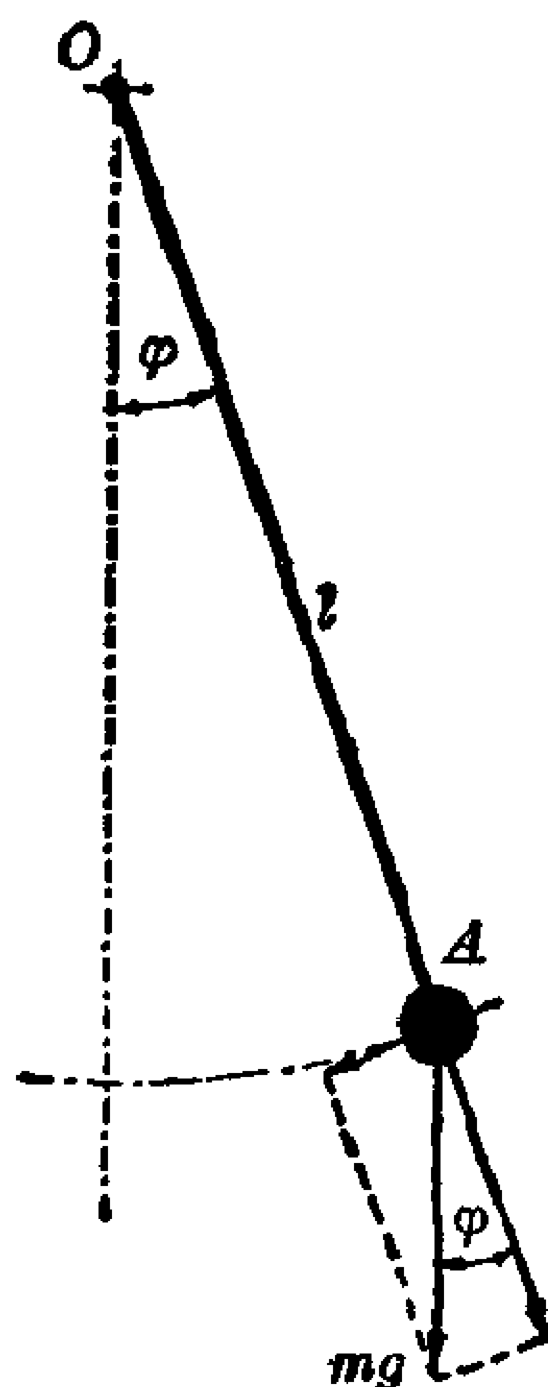


图 9.2-4 数学摆

这不是线性的，通过分离变量导出一个椭圆积分，它可用级数展开或者查表求值。采取常常应用的尤其在物理中常用的线性化，得到一个较容易解的线性微分方程。现在局限在与垂线小的偏差φ，使得可取$\sin\varphi\approx\varphi$，从而有$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0$，解为

$$\varphi=\alpha\cos(\omega t+\delta),$$

其中$\omega=\sqrt{g/l}$为角频率，因此$\tau=2\pi/\omega$为周期，而α和δ为积分常数。这个解的公式表达了伽利略早就注意到的这个事实：周期与振动的量无关。当然，这只是大致成立；对于量比较大的振动，周期给定为

$$\tau=2\pi\sqrt{(l/g)}\,[1+(1/2)^2\sin^2(\varphi_0/2)$$
$$+[(1\cdot3)/(2\cdot4)]^2\sin^4(\varphi_0/2)+\cdots],$$

其中φ_0为最大的倾角，即振动的幅度。与这个求解非线性微分方程所得的精确公式相比，当$\varphi_0=1°$时误差只不过0.002%，当$\varphi_0=5°$时仅仅0.05%。

不取圆周而取这样的一条曲线，使在它上面振动的物体总是具有与振动(大小)的量无关的周期，这样的曲线叫做等时曲线。1673年惠更斯(Huygens)发现圆滚(旋轮)线具有这个性质，借助于这一点他就有可能构造出一只摆钟。他所构造的圆滚摆的丝线被裹在两个圆滚曲面内来回振荡，因为圆滚线的渐屈线也是一条圆滚线，于是摆锤就描绘出一条圆滚线，摆按等时曲线来回振荡。

二阶线性非齐次微分方程 $a_0(x)y+a_1(x)y'+y''=f(x)$。

二阶线性非齐次的微分方程，其通解等于相应的齐次微分方程通解与非齐次方程任一特解之和。

这样，若$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$为齐次微分方程的通解，$p(x)$为非齐次方程的一个特解，则$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+p(x)$表示非齐次微分方程的通解。非齐次微分方程的特解可以从齐次方程的通解运用拉格朗日的参数变值法求得。在表达式

$$p(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

中，系数C_1和C_2看作x的函数。因为有两个函数$C_1(x)$和$C_2(x)$需要确定，所以可使它们满足一个附加条件；选得使它们有$C_1'y_1+C_2'y_2=0$。将$p(x)$，$p'(x)$和$p''(x)$代入非齐次微分方程中去，再考虑到y_1和y_2假定为齐次方程的解，于是得到方程

$$C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)。$$

$$\boxed{\begin{aligned}&C_1'y_1+C_2'y_2=0,\\&C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)\end{aligned}}$$

这连同附加条件，给出了一组方程以确定 C_1' 和 C_2'；这组方程总是有解的，因为它的系数行列式即朗斯基行列式，由于 y_1 和 y_2 线性无关而恒不等于零。通过积分就得到 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$，从而得到非齐次微分方程的通解。不过进行参数变值过程在实践上常常很不便，根本原因在于它一般导致不能以闭合形式赋值的积分。

【例】 对于微分方程 $xy''+2y'-xy=e^x$，函数 $y_1=e^x/x$ 和 $y_2=e^{-x}/x$ 形成齐次方程的**基本系**。参数变值要求相当的计算量产生 $p(x)=1/2e^x$ 作为非齐次方程的一个**特解**。由此得出**通解**为

$$y=C_1e^x/x+C_2e^{-x}/x+1/2e^x。$$

对于特殊的扰动函数，二阶常系数非齐次线性微分方程的特解 如果系数 C_1 和 C_2 为常数，那末微分方程 $y''+c_1y'+c_2y=f(x)$ 对于某些类型的扰动函数 $f(x)$ 来说不必应用参数变值法就可找到特解。

类型 1: 若扰动函数为多项式，$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$a_n\neq0$，则当 $c_2\neq0$ 时令 $p(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n$；而当 $c_2=0$ 时还要将 $b_{n+1}x^{n+1}$ 这一项也引进表达式，通过等化系数就得出所求的系数 b_0, b_1, $\cdots$。

【例】 $y''+y=x^2$，其中 $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=1$, $c_2=1$。令 $p(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$，于是 $p'=b_1+2b_2x$, $p''=2b_2$。代入方程给出 $(b_0+2b_2)+b_1x+b_2x^2=x^2$，等化系数得 $b_0=-2$, $b_1=0$, $b_2=1$。因此 $p(x)=-2+x^2$ 是一个特解而 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$ 为微分方程的通解。

类型 2: 若扰动函数为指数函数 $f(x)=ae^{kx}$，则代入 $p(x)=be^{kx}$，它只包含扰动函数中出现的那种指数函数。b 的值是待定的。

【例】 $y''+y=2e^{3x}$，其中 $a=2$, $k=3$。令 $p(x)=be^{3x}$。通过代入得到确定 b 的方程 $9b+b=2$，因此特解为 $p(x)=1/5e^{3x}$，从而通解是 $y=1/5e^{3x}+C_1\cos x+C_2\sin x$。

类型 3: 若扰动函数为三角函数，$f(x)=a\cos mx+b\sin mx$，则令 $p(x)=a^*\cos mx+b^*\sin x$，即使扰动函数里只出现两个三角函数之中的

一个，即 a 或 b 为零，但正弦和余弦两个函数也都要加入 $p(x)$。这里 a^* 和 b^* 由等化系数来确定。

【例】 $y''+y=2\sin 3x$，其中 $a=0$，$b=2$，$m=3$。令 $p(x)=a^*\cos 3x+b^*\sin 3x$。代入再等化系数得到 $a^*=0$，$b^*=-1/4$。由此得出通解为 $y=-1/4\sin 3x+C_1\cos x+C_2\sin x$。

类型 4：若扰动函数为类型 1，2，3 中出现的那些函数的线性组合，则其特解是相应的个别特解的线性组合。换句话说，必须对齐次方程的通解逐个加上依次略去扰动函数其他各项而只留下一项所得的特解。

【例】 $y''+y=x^2+2e^{3x}+2\sin 3x$，从前面的几个例子中得出通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2+1/5e^{3x}-1/4\sin 3x$。

所有这些确定非齐次微分方程特解的过程遇到共振的情况就失效，即若扰动函数或者其中的一项同时也是齐次微分方程的一个积分，则上述过程失效。例如在微分方程 $y''+y=\cos x$ 和 $y''-y=e^x$ 中就出现共振。

9.3 进一步的考虑

积分过程实践

正如早已强调过的，初等可积的微分方程是少见的。但是在最困难的情况下也有办法找解，至少可近似地找解，例如用差分方程来逼近微分方程再应用差分方程的计算方法近似地找解。下面将表述某些别的重要过程。

用幂级数求积 将微分方程 $y'=f(x, y)$ 所要求的解 $y=y(x)$ 表示成幂级数形式 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 其中的系数 a_i 是未定的，再将 y 及其导数代入微分方程。在一定条件下，级数的系数 a_i 可通过等化系数而计算得出。

【例】 $y'=x^2+y$。令 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$，$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots$；由此得出 $a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots=a_0+a_1x+(a_2+1)x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$。等化系数产生 $a_1=a_0$，$a_2=a_0/2$，$a_3=(a_0+2)/6$，$a_4=(a_0+2)/24$，$\cdots$ 因而得出解 $y=a_0+a_0x+a_0x^2/2+(a_0+2)x^3/6+(a_0+2)x^4/24+\cdots$ 由此重新排列 $y=(a_0+2)/1+(a_0+2)x/1!+(a_0+2)x^2/2!+(a_0+2)x^3/3!+\cdots-2-2x-x^2$，或者 $y=(a_0+2)e^x-2-2x-x^2$。

在这个特例中，最后的重新排列导致了积分的闭合形式。通过微分

研究了特殊的二阶微分方程，它出现于物理和技术以及尤其是有关振荡的许多问题中。这就是微分方程

$$xy''+(1+n)y'-y=0,\quad n\text{为常数。}$$

幂级数展开 $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 在此为 $a_{k+1}=\frac{a_k}{(k+1)(k+1+n)}$，因而

$$y=a_0\left(1+\frac{x}{1!(1+n)}+\frac{x^2}{2!(1+n)(2+n)}+\cdots\right)=a_0j_n(x)。$$

级数 $j_n(x)$ 依赖于 n（出现在括号中），当 $n\neq-1$, $n\neq-2$, … 时总是收敛的。它们叫做第一类贝塞尔函数（柱函数）。

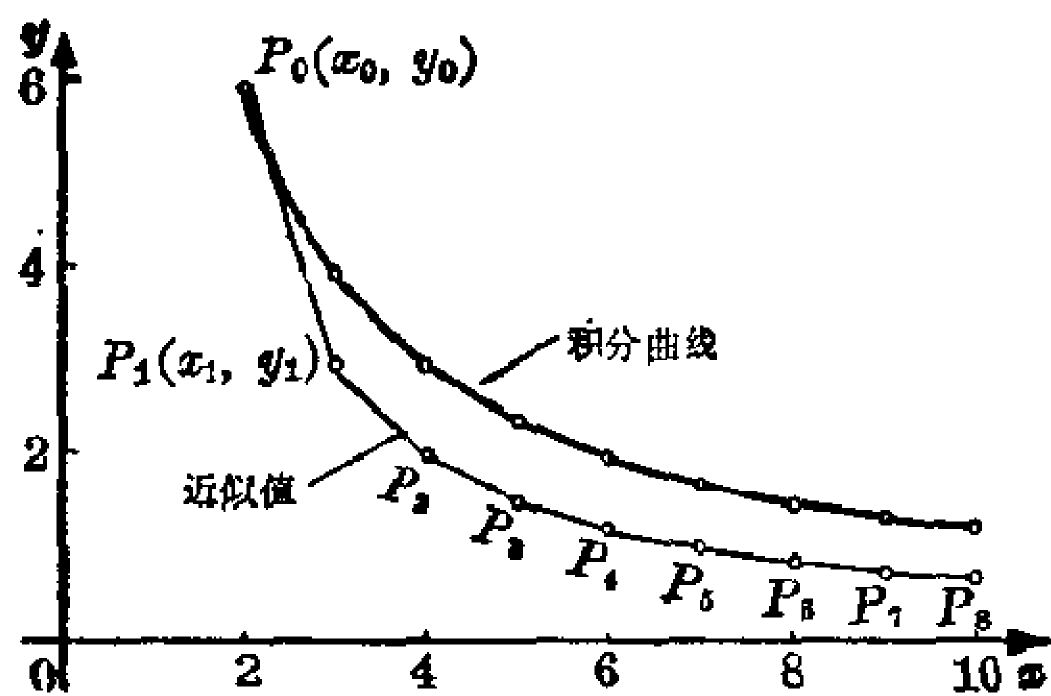


图 9.3-1　微分方程 $y'=-y/x$ 用多角弧法所得的图示积分

图示积分法　对于微分方程的图示解法，发展了大量的求积过程，它们适用于各种特殊类型的方程并达得所要求的准确程度。这里限于篇幅只对一阶微分方程作一个基本的讨论。

多角弧法　如果想要画出微分方程 $y'=f(x,y)$ 通过固定点 $P_0(x_0,y_0)$，即满足初始条件的积分曲线，那末 $y'_0=f(x_0,y_0)$ 给出所要求的曲线在这一点的切线方向。在这条切线上从 P_0 开始以某个距离取定一点 $P_1(x_1,y_1)$，再重复刚才的过程；所选

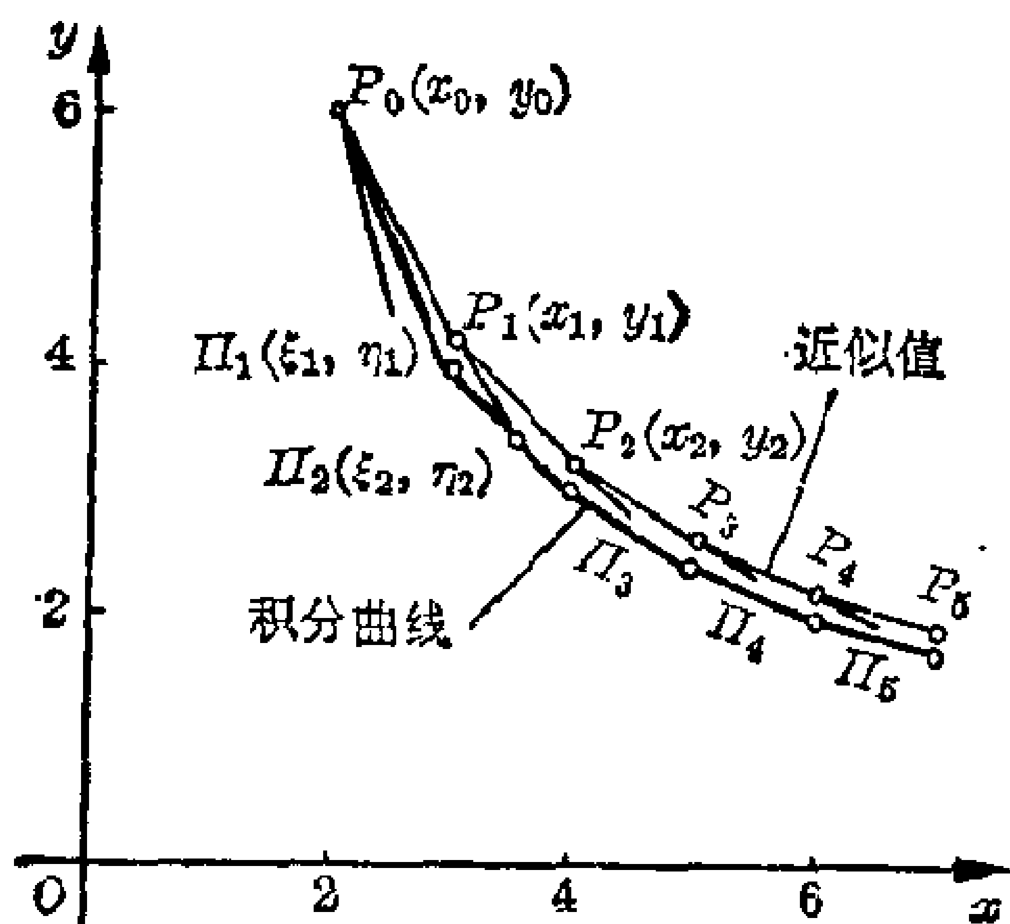


图 9.3-2　微分方程 $y'=-y/x$ 及初始条件 $x_0=2$, $y_0=6$ 用内插半步法得到的图示解；积分曲线用细线显示

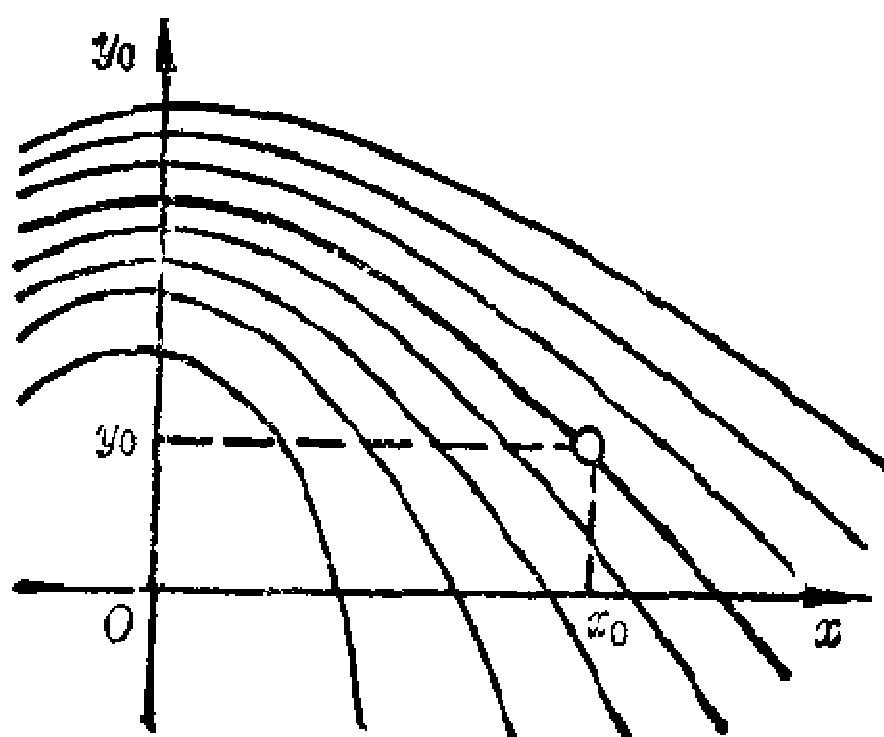


图 9.3-3　考虑初始条件 $y(x_0)=y_0$ 所选取的特定积分曲线

取的距离越小，解曲线就会越准确。这样得出了积分曲线的一个逼近。图9.3-1显示微分方程 $y'=-y/x$ 及初始条件 $x_0=2,\ y_0=6$ 的求积过程。用小圈线显示出位于真实积分曲线上的相应点，偏差是相当大的。*内插半步法*更为准确(见图9.3-2)。在这个方法中，对于点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 算出的方向 $y_0'=f(x_0,\ y_0)$ 只是用来计算中点 $H_1(\xi_1,\ \eta_1)$(半步)的方向 $\eta_1'=f(\xi_1,\ \eta_1)$。从 P_0 到折线第一个点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 的第一个整步是以这个方向 η_1' 做出来的。下一个半步从 P_1 沿着 $y_1'=f(x_1,y_1)$ 到 $H_2(\xi_2,\eta_2)$，而下一个整步从 P_1 沿着 $\eta_2'=f(\xi_2,\ \eta_2)$ 到 $P_2(x_2,\ y_2)$。比较这两条折线可以看出，在第二种方法中对于用粗线标出的真正积分曲线的逼近要好多了。通过缩小步长，尤其是在曲线迅速改变方向的那些区域内缩小步长，可以进一步得到改善。

理论一瞥

初值问题，边值问题 二阶微分方程通解的图象是二参数曲线族。在应用上，*特解的积分曲线*必须从特殊情况下挑选出来。例如，若 g 为重力加速度，则 $\frac{d^2y}{dt^2}=g$ 就是自由落体的微分方程。通过积分得出

$$\frac{dy}{dt}=gt+C_1,\quad y=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2。$$

现在要知道落体在时刻 t 后位于何处，设在下落开始时即在时刻 $t_0=0$，它位于高度 y_0 处，并设它的初始速度为 v_0。从这些*初始条件*就能确定积分常数 C_1 和 C_2。由 $y'=gt+C_1$ 当 $t=t_0=0$ 时得等式 $v_0=C_1$，再由 $y=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 得等式 $y_0=C_2$。因此所求的特解为 $y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$。

一阶微分方程 $y'=f(x,\ y)$ 具有通解 $y=\varphi(x,\ C)$，其图象是单参数曲线族。如果规定初始条件 $y_0=\varphi(x_0,\ C)$，那末就能从这个方程确定常数 C，$C=\psi(x_0,\ y_0)$。所求的特解 $y=\varphi[x;\psi(x_0,\ y_0)]=\Phi(x;x_0,\ y_0)$ 依赖于初始条件(图9.3-3)。对于物理和技术研究来说重要的一点在于 $\Phi(x;x_0,\ y_0)$ 应是*初始值的连续函数*，因为实际上初始值只能近似地知道。因此，在微分方程理论中要考察这样一个问题：为了使 $y=\Phi(x;x_0,\ y_0)$ 是初始条件的连续函数，必须对方程 $y'=f(x,y)$ 的右端加上些什么要求。对于这个问题(也就存在性与唯一性定理)的一个充分条件，连同函数 $f(x,\ y)$ 的连续性，还要满足李普希茨(Lipschitz)条件。

对于二阶微分方程规定初始条件 $y(x_0)=y_0$ 及 $y'(x_0)=y_0'$；这要求积

分曲线通过点(x_0, y_0)并且在这一点切线具有规定的方向y'_0。一般地，n阶微分方程的初始条件要求积分曲线通过某个点(x_0, y_0)，并且在该点开头的$(n-1)$阶导数取规定的值。对于高阶微分方程也必须研究解关于初始条件的连续依赖性。

对于高于一阶的微分方程，不仅可以规定初始条件，也可以规定边界值，于是出现新的问题。例如，假设在区间$0\leqslant x\leqslant \pi$上要求微分方程$y''+\lambda y=0$的解$y(x)$，它涉及振荡问题；可以设想在点$0$和$\pi$之间张着一根弦，在这两点上，弦不能从静止位置有位移；必须加上（第一类）边界条件$y(0)=0$，$y(\pi)=0$，从解$y(x)=C_1\sin(x\sqrt{\lambda}+C_2)$得到方程组

$$y(0)=C_1\sin C_2=0,\ y(\pi)=C_1\sin(\pi\sqrt{\lambda}+C_2)=0。$$

若$\sqrt{\lambda}$不是整数，则由此得出$C_1=C_2=0$，解就为$y\equiv 0$，弦不作振荡，保持静止。然而，若$\sqrt{\lambda}$是整数，则由此得出λ是完全平方，$\lambda=1, 4, 9, \cdots$，就得到无限多个解$y(x)=C_1\sin(x\sqrt{\lambda})$满足方程，弦在两个边界点之间以正弦振荡方式运动$y=C_1\sin x$，$y=C_1\sin 2x$，$y=C_1\sin 3x$，$\cdots$；它们是弦的**基本振荡**以及各个可能的高次谐波；一旦弦受扰动，它就能在没有外界影响之下来回振荡。这些振荡通过调和分析可以迭加又可以重新分离出来，因此称它们为**特征（或本征）振荡**，而数$\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=9, \cdots \lambda_n=n^2, \cdots$叫做该问题的**本征值**。

在**第二类边值问题**中，规定在边界点x_1和x_2处的导数值$y'(x_1)=a$，$y'(x_2)=b$。理论和实践要求确定**本征函数**与**本征值**。这种问题的特点在于，仅仅某些离散的参数值即本征值才存在非平凡解$y\neq 0$。

存在性定理，唯一性定理　一阶微分方程$y'=f(x, y)$借助于方向场的几何解释提示下面**存在性**定理的正确性：

若$f(x, y)$是两个变量的连续函数，则通过其连续性区域D的每一点(x_0, y_0)，有一条积分曲线。

这个定理事实上是由皮亚诺证明的。积分的存在性问题一般地说首先是由柯西在1820至1830年间提出来的，也是由他在$f(x, y)$连续且具有连续偏导数$f_y(x, y)$的假定下予以证明的。应当看到，皮亚诺的存在性定理比柯西的更加深刻，因为积分的存在性可以从比较弱的假定下推论出来。

对于理论和实践同等重要的问题是，微分方程$y'=f(x, y)$的右端在什么样的假定之下也能推论出解的**唯一性**。几何上讲，例如若积分曲线

$$\varphi_2(x)=1+\int_0^x\left(x+\frac{x^3}{2}\right)dx=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot4},\ \cdots$$

$$\varphi_n(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot4}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}$$

$$=1+(x^2/2)+(x^2/2)^2/2!+\cdots+(x^2/2)^n/n!,$$

最后
$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(x^2/2)^k/k!=e^{x^2/2}。$$

对于隐式一阶微分方程 $F(x, y, y')=0$，保证微分方程解的存在性与唯一性条件问题是比较困难的。对于高阶微分方程一般更难以解答。

如果在一点 (x_0, y_0)，存在性与唯一性定理的条件不满足，那末通过 (x_0, y_0) 可以有几条甚至无限多条积分曲线，或者根本没有。这样的点称为微分方程的奇点(见图 9.3-4)。积分曲线在奇点的邻域内性态异常具有理论意义。而奇点对于物理学家或者技术专家也是重要的，它是在数学上表征物理事件的过渡点和临界的技术数据：梁在弯曲下的折裂、绳在张力下的断裂、状态的改变等等。



图 9.3-4　在奇点的邻域内积分曲线性态

a) 结点；b) 中心点；c) 焦点；d) 鞍点

高阶微分方程和微分方程组　n 阶微分方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$$

通过引进新的函数 $y_1=y'$, $y_2=y''$, $\cdots y_{n-1}=y^{(n-1)}$，总是可以写为 n 个一阶微分方程的系统，得到方程组 $y_1=y'$, $y_2=y_1'$, $y_3=y_2'$, $\cdots$, $F(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}, y_{n-1}')=0$。

类似地，高阶微分方程组总是能写成一阶微分方程组。因此高阶微分方程解的存在性与唯一性证明也可归结为一阶微分方程组解的存在性与唯一性问题，而在这种方式下证明就容易得多了。

在力学中的应用　这些概念在力学中非常重要。加速度这个基本概念在数学上是用质点的空间坐标 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 关于时间 t 的二阶导数来表达的。由此得出，为了确定质量为 m 的质点运动必须求积方程组

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=P(x, y, z),\ m\frac{d^2y}{dt^2}=Q(x, y, z),\ m\frac{d^2z}{dt^2}=R(x, y, z),$$

P, Q, R 为作用在质点上的力的各个分量，它们依赖于该点的空间坐标 (x, y, z)。如果将这个系统化为一阶微分方程组，就得到6个微分方程的系统:

$$u=\dot{x},\ v=\dot{y},\ w=\dot{z},\ m\dot{u}=P(x, y, z),$$
$$m\dot{v}=Q(x, y, z),\ m\dot{w}=R(x, y, z),$$

其中的新函数 u, v, w 为速度。常见的微分方程组，里面所求函数的个数与微分方程的个数总是相符的。一般地，变量 t 的 *n 个函数的 n 个微分方程系统*在方程已解出导数的情况下具有形式

$$(dx_i)/(dt)=f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n); i=1, 2, \cdots, n。$$

这个系统的*解*或*积分*是一组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，当代入给定系统的时候使每一个方程成为 t 的恒等式。可以看出，求积的真正困难在于这样的事实：不可能将某个微分方程放到别的方程后面去积分，因为这个所求的函数 x_i 也包含在别的微分方程右端。物理上讲，由 $x_i(t)$ 表达的个体运动彼此有影响；物理学家叫做*耦合*，例如可以设想两个摆并非彼此独立地振荡，而是用一根弹簧缚在两个摆杆上使之耦合起来(见图 9.3-5)。

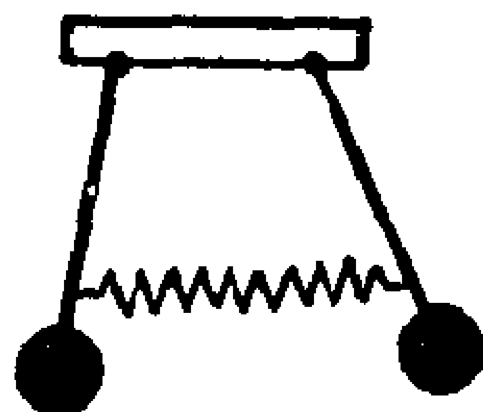


图 9.3-5 两个振荡摆的耦合导致微分方程组

为了简化问题的叙述并保持直观，采用微分方程理论中的多维几何概念。如果一阶微分方程的积分在几何上用 x, y 平面的积分曲线来表示，那末系统 $(dx_i)/(dt)=f_i, i=1, 2, \cdots, n$ 的积分可以看成 n 维空间的积分曲线，其中 $x_i(t), i=1, 2, \cdots, n$ 描述一个点运动的坐标。

初积分理论 有了这种术语的帮助，我们可以谈一下*初积分理论*，它对于物理也是特别重要的。方程 $F(x_1, \cdots, x_n)=C$，这里 C 为常数，在 n 维坐标空间 x_i 内确定一个$(n-1)$维超曲面，而当变化 C 的时候就得出单参数超曲面族。如果给定 $n-1$ 族超曲面

$$F_i(x_1, \cdots, x_n)=C_i; i=1, 2, \cdots, n-1,$$

再从每一族中选取一张超曲面，于是一般地说它们将相交成 n 维空间的一条曲线，总起来得到一族曲线，它依赖于 $n-1$ 个参数 $C_i, i=1, 2, \cdots, n-1$。什么时候这一族表示系统 $(dx_i)/(dt)=f_i, i=1, 2, \cdots, n$ 的积分

曲线呢？为此，该族的每一条积分曲线必须完全落在各超曲面族的一张特定的超曲面之上；这样，每一个$F_i(x_1, \cdots, x_n)$必须为常数。沿着系统的所有积分曲线为常数的各个函数$F(x_1, \cdots, x_n)$叫做这个系统的*初积分*。对于具有全微分的函数$F(x_1, \cdots, x_n)$来说，它是初积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}f_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}f_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}f_n=0。$$

所有函数F_i, $i=1, 2, \cdots, n-1$, 必须满足这个条件；因此要解方程组

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}f_k=0,\ i=1, 2, \cdots, n-1。$$

$f_k=\frac{dx_k}{dt}$是已知的。由此得出，用$n-1$个初积分的知识来求积这个系统一般地说是可能的。如果已知的不是全部$n-1$个而只是$m<n-1$个初积分，那末通过固定

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=C_i,\ i=1, 2, \cdots, m,$$

确定一个$(n-m)$维流形。要定出落在此流形上的积分曲线，于是就有$n-1-m$个一阶微分方程的系统；m个初积分的知识将系统的方程个数减少m。

这种可能性在力学中，例如在天体力学中有重要的意义。有名的三体问题研究三个互相吸引着的质点，例如太阳与两个行星的运动，它导致有18个未知函数即9个坐标函数和9个速度分量的18个微分方程。因为有12个已知初积分的帮助，这个问题就归结为研究6个一阶微分方程。

第10章 复 分 析

10.1 复值函数的微分和积分

复值函数 定义在 x, y 平面的集 M 上的两个实值函数 u 和 v, 对于每一点 $(x, y)\in M$ 指定 u, v 平面的一个点 (u, v)。如果将这些点 (x, y) 和 (u, v) 看作复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $w=u+\mathrm{i}v$, 那末对于每一个复数 $z\in M$ 对应着一个复数 $w=f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$, 这种对应表示为复值函数 f (见图 10.1-1)。它在点 $z_0\in M$ 为连续的, 若每一个收敛于 z_0 的序列 $\{z_n\}$, 对于 $n=1, 2, \cdots$, $z_n\in M$, 其相应的序列 $f(z_n)$ 收敛于 $f(z_0)$。这里, 复数序列 $\{z_n\}$, $n=1, 2, \cdots$ 为收敛的, 如果复数序列的实部序列 $\{\mathrm{Re}z_n\}$ 和虚部序列 $\{\mathrm{Im}\,z_n\}$ 收敛。这意味着当且仅当 u 和 v 在 (x_0, y_0) 连续, f 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续。若一个定义在 M 上的函数在 M 的每一点为连续, 就称为在 M 上连续。

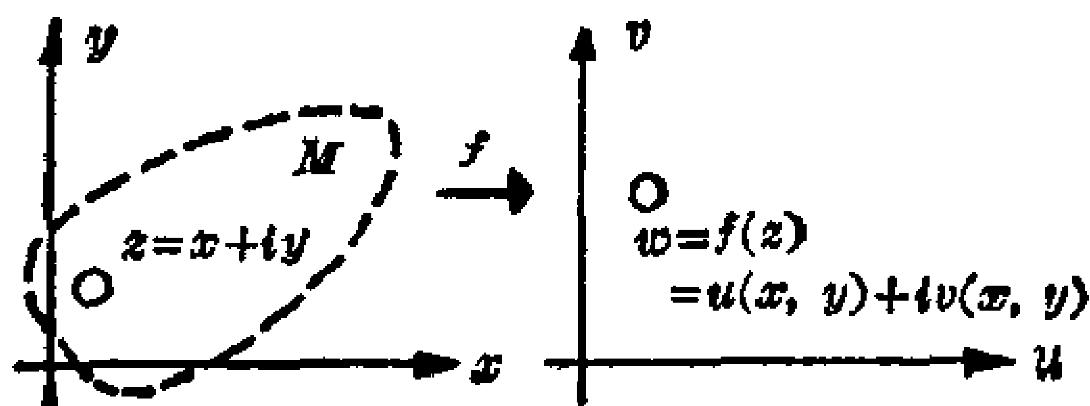


图 10.1-1 在复值函数 $w=f(z)$ 下点 $z=x+\mathrm{i}y$ 与点 $w=u+\mathrm{i}v$ 之间的对应

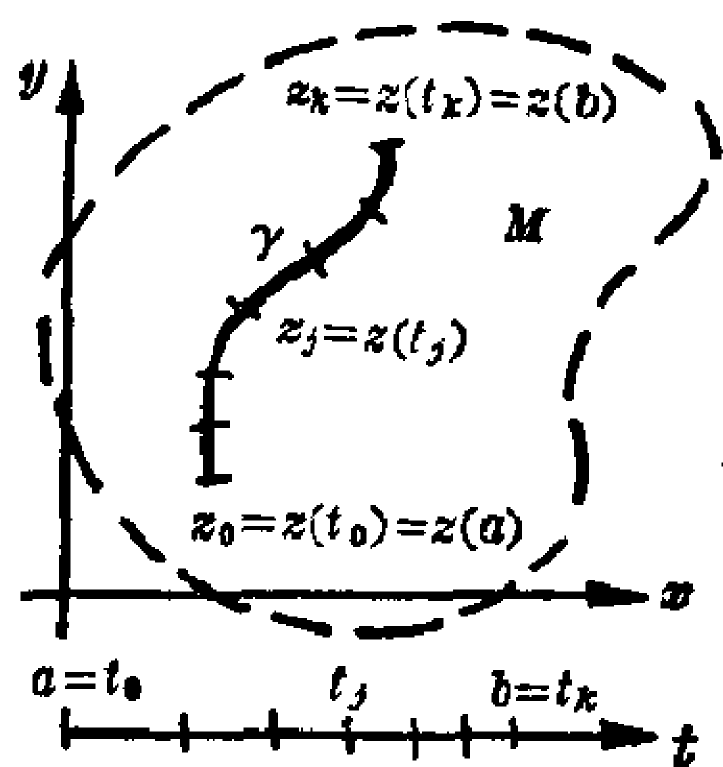


图 10.1-2 由 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ 表示的曲线 γ 的细分

复曲线积分 z 平面的一条连续曲线是一个点集 γ, 它可表示成形式 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$, 这里 $a\leqslant t\leqslant b$ 而 $x(t)$, $y(t)$ 是 t 的连续实值函数。如果函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 具有连续的一阶导函数, 则曲线称为连续可微

的；这时曲线就具有有限的长度 $l(\gamma)$（见 II. 第7章3节——弧长和曲面面积）。现在假设区间 $[a, b]$ 用点 t_j, $j=0, 1, \cdots, k$, $t_0=a$, $t_k=b$, 分成 k 个子区间 $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\cdots$, $[t_{k-1}, b]$, 曲线上对应有点 $z_j=f(t_j)$（见图 10.1-2）。若这个点集包含在复值函数 f 的定义域 M 内，且 f 在 M 上连续，则对于正规分法，和式 $\sum_{j=1}^{k} f(z_j)(z_j-z_{j-1})$ 收敛于一个复数，叫做 f 沿 γ 的复曲线积分 $\int_\gamma f(z)dz$。这里一系列分法称为**正规的**，如果最长的子区间长度当 $k\to\infty$ 时形成一个零序列。极限不依赖于正规分法序列的选取。由于 $f=u+\mathrm{i}v$ 以及 $z_j=x(t_j)+\mathrm{i}y(t_j)$，对于和式中的乘积有

$$f(z_j)(z_j-z_{j-1})=u(x_j, y_j)(x_j-x_{j-1})-v(x_j, y_j)(y_j-y_{j-1})$$
$$+\mathrm{i}[v(x_j, y_j)(x_j-x_{j-1})+u(x_j, y_j)(y_j-y_{j-1})],$$

再按第二类实曲线积分的定义（见 II. 第7章3节——线积分和面积分）得到

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma (u\,dx-v\,dy)+\mathrm{i}\int_\gamma (u\,dy+v\,dx)$$
$$=\int_{t=a}^{b}\left(u\frac{dx}{dt}-v\frac{dy}{dt}\right)dt+\mathrm{i}\int_{t=a}^{b}\left(v\frac{dx}{dt}+u\frac{dy}{dt}\right)dt,$$

这是因为 $$\int_\gamma u(x, y)dx=\int_{t=a}^{b} u(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt}dt。$$

由定义 $$\frac{dx(t)}{dt}+\mathrm{i}\frac{dy(t)}{dt}=\frac{dz(t)}{dt},$$

最后得到 $$\int_\gamma f(z)dz=\int_{t=a}^{b} f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt。$$

设 $\bar{z}=\alpha-\mathrm{i}\beta$ 为共轭于 $z=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 的复数；这意味着 $\alpha=(z+\bar{z})/2$ 和 $\beta=(z-\bar{z})/(2\mathrm{i})$。从和式 $\sum_{j=1}^{k} f(z_j)(\bar{z}_j-\bar{z}_{j-1})$ 相应地得出曲线积分

$$\int_\gamma f(z)d\bar{z}=\int_{t=a}^{b} f(z(t))\left(\overline{\frac{dz(t)}{dt}}\right)dt。$$

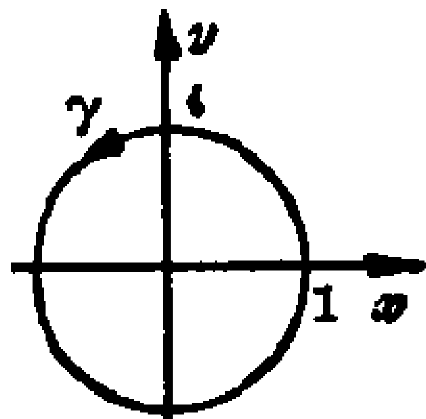


图 10.1-3　积分 $\int_\gamma \frac{dz}{z}=2\pi\mathrm{i}$，其中单位圆周 γ 按正向旋转

【例】 γ 是中心在 $z=0$, 半径 $r=1$ 的圆周（图 10.1-3），按正向旋转，它能表示为 $z(t)=\cos t+\mathrm{i}\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$。对于这种表示就有 $\frac{dz(t)}{dt}=-\sin t+\mathrm{i}\cos t$, 从而

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz=\int_{t=0}^{2\pi}\frac{1}{z(t)}\frac{dz(t)}{dt}dt=\int_{t=0}^{2\pi}\frac{-\sin t+\mathrm{i}\cos t}{\cos t+\mathrm{i}\sin t}dt=\mathrm{i}\int_{t=0}^{2\pi}dt=2\pi\mathrm{i},$$

这是因为 $\mathrm{i}(\cos t+\mathrm{i}\sin t)=-\sin t+\mathrm{i}\cos t$。

复偏微分 定义在 z 平面开集 M 内并具有一阶连续偏导数的两个实值函数 u 和 v, 在 $(x_0, y_0)\in M$ 可以线性化,即用一次多项式逼近:

$$\bar{u}(x, y)=u(x_0, y_0)+\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

和 $$\bar{v}(x, y)=v(x_0, y_0)+\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0)。$$

因此 $f=u+\mathrm{i}v$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 可线性化为

$$\bar{f}(z)=f(z_0)+\left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\right](x-x_0)$$
$$+\left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\right](y-y_0)。$$

代入 $(x-x_0)=[(z-z_0)+\overline{(z-z_0)}]/2$ 和 $y-y_0=[(z-z_0)-\overline{(z-z_0)}]/(2\mathrm{i})$, 并注意到关系 $\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}$, 这个线性化就变成

$$\bar{f}(z)=f(z_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z_0)}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}\right](z-z_0)$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z_0)}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}\right]\overline{(z-z_0)}。$$

由此出发,定义 f 关于 z 和 $\bar{z}$ 在点 z_0 的一阶复偏导数:

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z_0)}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}\right]$$

和 $$\frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z_0)}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}\right]。$$

对于这种微分,实值函数的那些标准规则依然有效,例如

$$\frac{\partial[f(z)+g(z)]}{\partial z}=\frac{\partial f(z)}{\partial z}+\frac{\partial g(z)}{\partial z}$$

或者 $$\frac{\partial[f(z)\cdot g(z)]}{\partial \bar{z}}=f(z)\cdot\frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}}+g(z)\cdot\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}。$$

【例】 1. 当 $f(z)=$常数时得出 $\frac{\partial f(z)}{\partial x}=0$ 和 $\frac{\partial f(z)}{\partial y}=0$, 由此可见 $\frac{\partial f(z)}{\partial z}=0$ 和 $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$。

2. 当 $f(z)=z=x+\mathrm{i}y$ 时得出 $\frac{\partial f(z)}{\partial x}=1$ 和 $\frac{\partial f(z)}{\partial y}=i$, 因此 $\frac{\partial f(z)}{\partial z}=1$ 和 $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$。

3．当 $f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 时得出 $\frac{\partial f(z)}{\partial x}=1$ 和 $\frac{\partial f(z)}{\partial y}=-\mathrm{i}$，所以 $\frac{\partial f(z)}{\partial z}=0$ 和 $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=1$。

4．乘积的微分规则应用到 $z^2, z^3, \cdots, z^n$ 由归纳法产生

$$\frac{\partial z^2}{\partial z}=2z,\quad \frac{\partial z^3}{\partial z}=3z^2,\ \cdots,\quad \frac{\partial z^n}{\partial z}=nz^{n-1},$$

以及

$$\frac{\partial z^2}{\partial \bar{z}}=0,\quad \frac{\partial z^3}{\partial \bar{z}}=0,\ \cdots,\quad \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}}=0。$$

5．对于多项式 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$，其中系数 a_j 为常数，得到 $\frac{\partial f(z)}{\partial z}=0+a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}$ 和 $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$。

幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$ 的部分和 $s_n(z)=\sum_{j=0}^{n}a_j(z-z_0)^j$ 组成的序列 $\{s_n(z)\}$ 当 $n\to\infty$ 时，或只在 $z=z_0$ 处收敛，或在一个圆盘 $|z-z_0|<R$ 内收敛，或在全平面收敛。极限函数 f 满足 $\frac{\partial f(z)}{\partial z}=\sum_{j=1}^{\infty}ja_j(z-z_0)^{j-1}$ 和 $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$（见 II. 第8章）。一个特殊情况是定义复指数函数

$$\exp z=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!};$$

它的收敛圆为整个 z 平面，而它的偏导数为 $\frac{\partial \exp z}{\partial z}=\exp z$。

指数函数满足欧拉公式 $\exp(i\varphi)=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$。函数等式 $\exp(z_1+z_2)=\exp z_1\cdot\exp z_2$ 或者说 $\exp z_0=\exp(z_0-z)\cdot\exp z$ 来自

$$\frac{\partial}{\partial z}[\exp(z_0-z)\cdot\exp z]=-\exp(z_0-z)\cdot\exp z+\exp(z_0-z)\exp z=0,$$

因为这表明

$$\exp(z_0-z)\exp z=常数=\exp z_0。$$

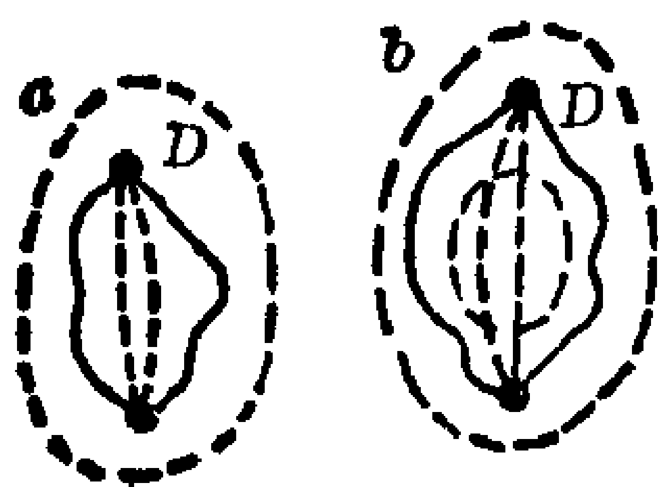


图 10.1-4 a) 单连通区域 D
b) 多连通区域 D

全纯函数 如果定义在开集 M 内的函数 f 对于每一点 $z\in M$ 有 $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$，则称 f 为全纯的。对于全纯函数来说就不写 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 而写为 $\frac{df}{dz}$ 或者 f'。已经指出，幂级数的极限函数是全纯的。所谓区域 D 是这样的一个开集，其中的任意两点

可由一条完全在 D 内的曲线连接起来。在单连通区域 D 内具有相同始点和终点的两条曲线总是可以在彼此之间连续地变形而不会离开区域 D（见图 10.1-4）。

对于每一个定义在单连通区域 D 内的全纯函数 f，存在一个且除加性常数外只存在一个全纯的原函数 F，使得 $f(z)=\frac{dF(z)}{dz}$。沿着 D 内从 z_1 走向 z_2 的任意曲线 γ 具有 $\int_\gamma f(z)dz=F(z_2)-F(z_1)$。

【例】 对于函数 $f(z)=z^2$，一个原函数 F 是 $F(z)=\frac{1}{3}z^3$，若 γ 将点 $z_1=1$ 连接到点 $z_2=2+\mathrm{i}$，则

$$\int_\gamma z^2 dz=(1/3)(2+i)^3-(1/3)\cdot 1^3=1/3+11/3\,\mathrm{i}。$$

设 γ 为 D 的一部分 B 的边界。于是成立奥斯特洛格拉特斯基(Ostrogradskii)-高斯定理：

$$\int_\gamma (u\,dx+v\,dy)=\iint_B\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy。$$

从这个定理得出

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz&=\int_\gamma (u\,dx-v\,dy)+\mathrm{i}\int_\gamma (u\,dy+v\,dx)\\&=-\iint_B\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+\mathrm{i}\iint_B\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy\\&=\iint_B\left[\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\mathrm{i}^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\\&=\mathrm{i}\iint_B\left[\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right]dx\,dy=2\mathrm{i}\iint_B\frac{\partial f(z)}{\partial \bar z}\,dx\,dy。\end{aligned}$$

因为对于全纯函数有 $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar z}=0$，由此得出 $\int_\gamma f(z)dz=0$。这是证明柯西积分定理的一种方式。

柯西积分定理：若 γ_0 是单连通区域 D 内的一条闭曲线，则对于每一个 D 内全纯的函数 f 有 $\int_{\gamma_0} f(z)dz=0$。

柯西定理亦来自单连通区域内对于 f 的原函数 $F(z)$ 的存在定理。若 γ 是闭曲线，则始点 z_1 与终点 z_2 相同，因此

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = 0。$$

全纯函数 f 在完全包含于 M 内的圆盘 $|z-z_0| \leqslant R$ 内部的值，按照柯西积分公式，由 f 在此圆盘边界 γ_0 上所取的值 $f(\zeta)$ 来确定，此时 γ_0 走正向（见图 10.1-5）。因为由柯西积分定理，沿着闭曲线 γ_{01} 和 γ_{02}:

$$\int_{\gamma_{01}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad \int_{\gamma_{02}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0。$$

将这两个积分相加，再让半径 ρ 趋于零，应用复曲线积分的例子（见图 10.1-3），就得到柯西积分公式。

柯西积分公式	$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

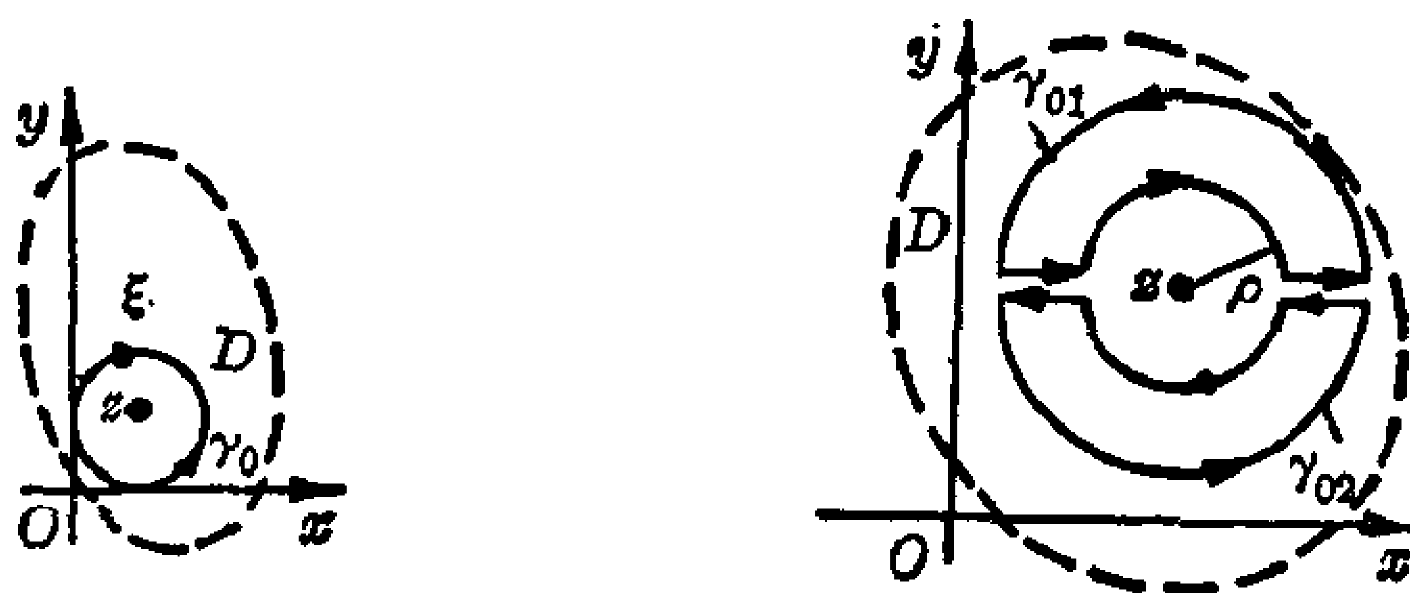


图 10.1-5　柯西积分公式

在圆盘 $|z-z_0| < R$ 内全纯函数 f 可以表示成唯一确定的幂级数的极限函数 $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$，它有收敛圆 R 并具有仍然全纯的导函数 $\frac{df(z)}{dz} = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j (z-z_0)^{j-1}$。通过反复微分就得到每一个 k 阶的全纯导函数，它们也可从柯西积分公式通过微分而得。令 $z=z_0$，再比较等式两边就得确定 $f(z)$ 的级数系数 a_j，开头即 $a_0 = f(z_0)$。

在 $|z-z_0| < R$ 内全纯的函数 f，唯一地表示为幂级数

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j,$$

具有每一个 k 阶的全纯导函数 $\frac{d^k f(z)}{dz^k} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$，幂级数的系数确定为 $a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{j+1}}$，其中 γ_0 是在收敛圆盘内部的一条曲线，它正向环绕 z 或 z_0 一圈。

全纯函数的孤立奇点 设 M 是包含有孔圆盘 $0<|z-z_0|<R$ 的一个开集(见图 10.1-6)，但不必是以 z_0 为中心的某个圆盘。设 f 是一个在 M 内的全纯函数。于是 f 在圆盘内可表示为唯一确定的**罗朗**(Laurent)**展开**，它的**主部**由那些负幂项组成，其第一项系数 $a_{-1}=\operatorname{Res} f$ 称为 f 在 z_0 处的**残数**，点 z_0 称为 f 的**孤立奇点**。

罗朗展开:

$$f(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-z_0)^j=\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}$$
$$+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots,$$

其中 $$a_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{j+1}},\quad a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} f(\zeta)d\zeta;$$

此地 γ_0 是圆周 $|\zeta-z_0|=r,\ 0<r<R$, 正向旋转。

若对所有负的 j 来说 $a_j=0$, 即若主部为零，则罗朗级数就化为一个幂级数，从而只要令 $f(z_0)=a_0$, f 就在整个圆盘 $|z-z_0|<R$ 内全纯，在这种情况下 z_0 称为 f 的**可去奇点**。若 $a_{-n}\neq 0$, 而 $a_{-n-1}=0,\ a_{-n-2}=0,\ \cdots$, 即若只有有限多个负的 j 其 a_j 不为零，则此点称为 f 的 **n 阶极点**。于是在充分接近 z_0 的 z 处 $|f(z)|$ 变得任意地大。若对于无限多个负的 j 来说 $a_j\neq 0$, 则出现 f 的**本性奇点** z_0。于是由喀索拉第(Casorati)-韦尔斯特拉斯定理，f 在 z_0 的每一个邻域内可任意地接近每一个复数值。

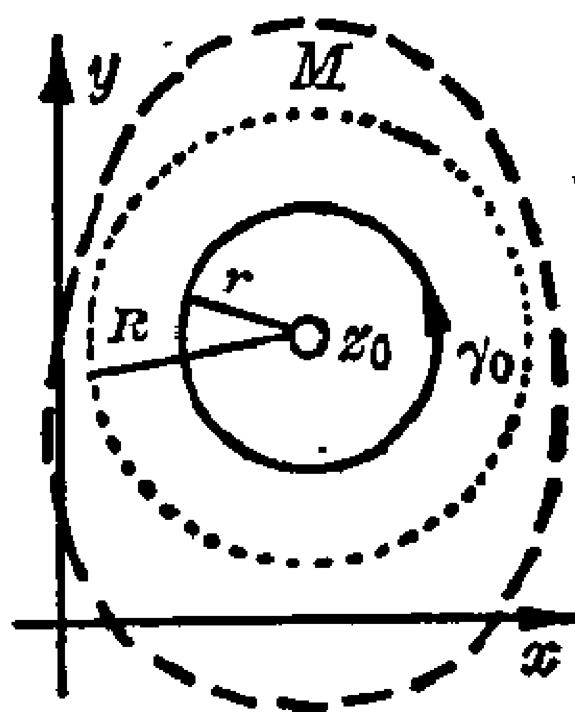


图 10.1-6 在有孔开圆盘内的罗朗展开

如果一个函数 f 在开集 M 内除了可去奇点或者极点外是全纯的，就称为在 M 内**亚纯的**。

【例】 由 $f(z)=\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{z}{2i(z-i)}-\dfrac{z}{2i(z+i)}$ 表示的函数 f 在全平面亚纯；它在 $z_1=-1,\ z_2=i$ 和 $z_3=-i$ 的每一处具有一阶极点。

如果对一个在 z_0 处具有至多 n 阶极点的亚纯函数 f 乘以 $(z-z_0)^n$, 那末就引出一个幂级数，其中 a_{-1} 为 $a_{-1}(z-z_0)^{n-1}$ 项的系数。通过反复微分由此得到函数 f 的残数 a_{-1}:

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}[(z-z_0)^n f(z)]}{dz^{n-1}}。$$

若 γ_0 是亚纯函数 f 定义域 M 内部的一条闭曲线，又若 z_0 是 f 的一个孤立奇点，它不在 γ_0 上，则对于 γ_0 上的每一点 ζ，可由 $\zeta - z_0 = |\zeta - z_0| \cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ 计算出从 z_0 到 ζ 的方向与正实轴的夹角 φ（见图 10.1-7）。这个角只是确定到可以差 2π 的整数倍 $2k\pi$ 的程度，而 k 能被选取得当 ζ 沿着 γ_0 连续移动时使 φ 亦连续地变化。当 ζ 沿着 γ_0 回到始点时，φ 变化了 $2n\pi$。分支数 $n=n(\gamma_0, z_0)$ 是一个整数，它依赖于曲线 γ_0，它的走向及 z_0 相对于曲线的位置（见图 10.1-8）。若 γ_0 围绕 z_0，没有重点，且为正向，则由罗朗展开 $\int_{\gamma_0} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i a_{-1}$。更一般地，可以导出下面的定理：

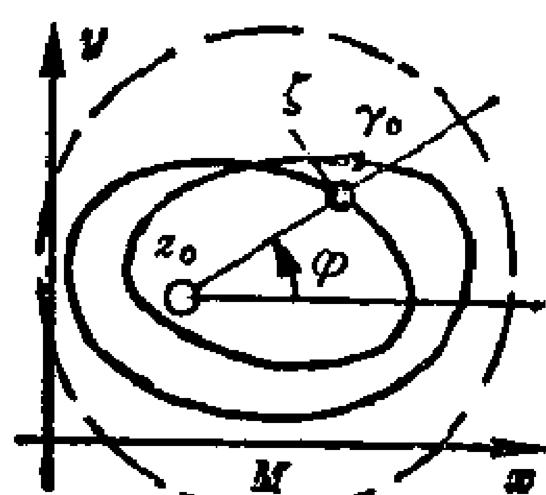
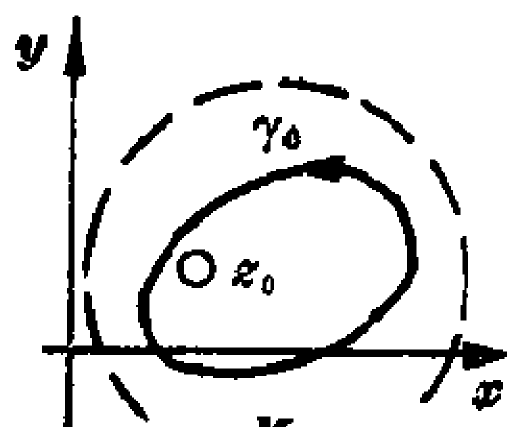
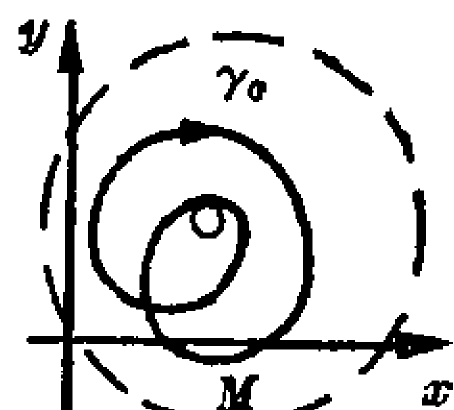


图 10.1-7　分支数 $n(\gamma_0, z_0)$ 的定义





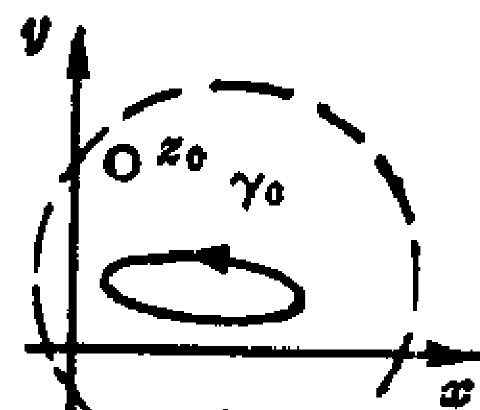


图 10.1-8　分支数的例子

残数定理。 $\int_{\gamma_0} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{z_0} n(\gamma_0, z_0)\operatorname*{Res}_{z_0} f$，只要 γ_0 是单连通区域内的一条闭曲线，并且 f 在 M 内除孤立奇点 z_0 外为全纯。和式取所有的 z_0。

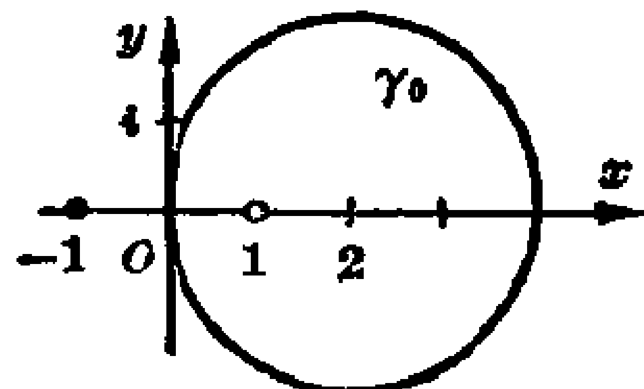


图 10.1-9　残数定理应用于 $f(z) = \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z-1}$

【例】 由 $f(z) = 1/(z+1) - 1/(z-1)$ 表示的亚纯函数 f 具有极点 $z_1 = -1$ 和 $z_2 = +1$。在 z_1 的邻域内 $-1/(z-1)$ 是全纯函数，从而可展开为幂级数 $\boldsymbol{P}_1$，类似地 $1/(z+1)$ 在 z_2 的邻域内可展开为幂级数 $\boldsymbol{P}_2$。从 $f(z) = 1/(z+1) + \boldsymbol{P}_1 = -1/(z-1) + \boldsymbol{P}_2$ 得到 $\operatorname*{Res}_{z_0=-1} f = +1$ 和 $\operatorname*{Res}_{z_0=+1} f = -1$。如果 γ_0 是中心在 $z=2$ 半径为 2 的圆周，负向旋转（见图 10.1-9），那末 $n(\gamma_0, -1) = 0$ 和 $n(\gamma_0, +1) = -1$；因此残数定理产生

$$\int_{\gamma_0}\left(\frac{1}{\zeta+1}-\frac{1}{\zeta-1}\right)d\zeta=2\pi\mathrm{i}[1\cdot0+(-1)(-1)]=2\pi\mathrm{i}。$$

多复变量的全纯函数 定义在由所有的 n 重复数组 $(z_1, \cdots, z_n)$ 构成的集 $\mathbf{C}^n$ 的一个开集 D 内的函数 f 称为全纯的，如果仅让 z_j 之中的一个为变量而其余的 $n-1$ 个固定所形成的每一个函数 f 为全纯。因此它们满足微分方程 $\frac{df}{d\bar{z}_1}=0, \cdots, \frac{df}{d\bar{z}_n}=0$。点集 $\{(z_1, \cdots, z_n): |z_j-z_j^0|\leqslant R_j, j=1, 2, \cdots, n\}$ 称为闭多圆柱，这里 $(z_1^0, \cdots, z_n^0)$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中的选定点。如果它完全落在 D 内，那末在它内部 $\{(z_1, \cdots, z_n): |z_j-z_j^0|<R_j, j=1, \cdots, n\}$ 的所有点上函数 f 可以由广义柯西积分公式来表示，其中的决定曲面 $\mathbf{S}$: $\{(z_1, \cdots, z_n): |z_j-z_j^0|=R_j, j=1, \cdots, n\}$ 是多圆柱边界的一个子集。

广义柯西积分公式

$$f(z_1, \cdots, z_n)=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_S\frac{f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n。$$

若 D 是一个区域，即一个连通开集，则在 D 内全纯的两个函数在 D 的每一点上相等，如果它们的值在 D 内一个多圆柱的决定曲面上相符。

全纯函数局部地可以表示为幂级数

$$\sum_{\nu_1, \cdots, \nu_n}c_{\nu_1, \cdots, \nu_n}(z_1-z_1^0)^{\nu_1}\cdots(z_n-z_n^0)^{\nu_n}$$

的极限函数。全纯函数的进一步推广在于代替单复变量或多复变量的全纯函数也考虑作为一般的复偏微分方程解的复值函数，例如维库阿(Vekua)微分方程 $\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}=A(z)w+B(z)\bar{w}$ 的解的复值函数。这里微分还能在分布理论的意义下解释。

10.2 复分析应用

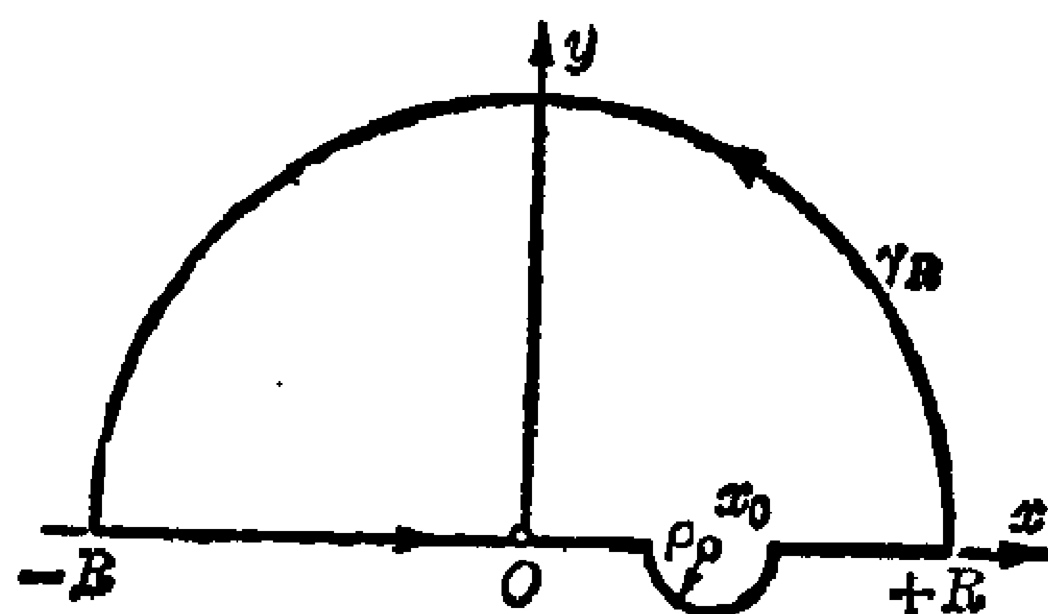


图 10.2-1 围道积分的路径

实积分计算 某些定积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 可以用"围道积分"来求值。首先，只要极限存在，这种积分的柯西主值定义为 $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$。现在想象实轴在 $-R$ 与 $+R$ 之间的部分成为亚纯函数 $f(z)$ 定义域内一条闭曲线 γ_R 的一部分，当 z 为实数时 $f(z)$ 的值与给定函数 $f(x)$ 的值相

合，并且沿着 γ_R 其余部分的线积分当 $R\to\infty$ 时以零为极限。如果 f 在实轴上，例如在 x_0 处具有极点，那末用一个半径为 ρ（小）的半圆周可将点 x_0 排除或包含在 γ_R 的内部，而沿着围道 γ_R 的积分必须对 $\rho\to 0$ 求值（见图 10.2-1）。因此对于具有 $\operatorname{Im} z_0=0$ 的这种极点出现 $\mp\pi i$ 因子，以此替代对于具有正虚部 $\operatorname{Im} z_0>0$ 的极点成立的 $2\pi i$。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[p_1(x)/p_2(x)]dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_0>0}\operatorname*{Res}_{z_0}[p_1(z)/p_2(z)]$$

$$+\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_0=0}\operatorname*{Res}_{z_0}[p_1(z)/p_2(z)],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[p_3(x)/p_4(x)]\cos x\,dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}[p_3(x)/p_4(x)]\sin x\,dx$$

$$=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_0>0}\operatorname*{Res}_{z_0}\{[p_3(z)/p_4(z)]\exp iz\}$$

$$+\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_0=0}\operatorname*{Res}_{z_0}\{[p_3(z)/p_4(z)]\exp iz\}。$$

只要 z 平面内由 $p_1(z)/p_2(z)$ 和 $p_3(z)/p_4(z)$ 定义的函数在实轴上只有一阶极点，p_2 的次数超过 p_1 的次数至少为 2，而 p_4 的次数超过 p_3 的次数至少为 1。

【例 1】 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$。如果在上面公式中令 $p_1(z)=1$，$p_2(z)=1+z^2=(z+i)(z-i)$，找到

$$\operatorname*{Res}_{z_0=i}\frac{1}{1+z^2}=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{1+z^2}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2},$$

从而得出结果。

【例 2】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$。残数定理应用于由 $(1/z)\exp iz$ 表示的亚纯函数，它只是在 $z_0=0$ 具有一阶极点。它在 $z_0=0$ 处的残数为

$$\operatorname*{Res}_{z_0}\left[\frac{\exp iz}{z}\right]=\lim_{z\to 0}\left[z\,\frac{\exp iz}{z}\right]=\lim_{z\to 0}\exp iz=1。$$

从

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi i\cdot 1$$

导出 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx=0$ 以及上面的结论。

复分析与偏微分方程之间的联系　对于全纯函数 $f=u+\mathrm{i}v$，按定义有 $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z)}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f(z)}{\partial y}\right]=0$，$\frac{\partial f(z)}{\partial x}=-\mathrm{i}\frac{\partial f(z)}{\partial y}$，分别地为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$。这导致柯西-黎曼微分方程。

柯西-黎曼微分方程	$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$

【例】　由 $f(z)=z^2=(x^2-y^2)+2\mathrm{i}xy$ 定义的函数是全纯的，因此 $u(x, y)=x^2-y^2$ 和 $v(x, y)=2xy$ 是柯西-黎曼微分方程的一个解。

逆定理。若实值函数 u 和 v 的一阶偏导数存在且满足柯西-黎曼微分方程，则 $f=u+iv$ 是全纯的。

第一个柯西-黎曼微分方程对 x 微分，第二个对 y 微分，就得到拉普拉斯微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。因为全纯函数 f 具有任何阶导数，所以 u 和 v 的任意高阶偏导数都存在。

全纯函数 $f=u+iv$ 的实部 u 和虚部 v 分别地满足拉普拉斯微分方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 和 $\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$。反过来，在单连通区域 D 内，对于拉普拉斯微分方程在 D 内解的函数 u，存在除加性常数外唯一地确定的函数 v，它和 u 一起定出 D 内的全纯函数 $f=u+iv$。

【例】　由 $f(z)=z^2$ 定义的全纯函数 f，其实部 $u(x, y)=x^2-y^2$ 是拉普拉斯微分方程的一个解。

保形映射　在区域 D 内定义的全纯函数 f 通过 $w=f(z)$ 对于 D 的每一点 z 指定 w 平面的相应点 w。若 γ 表示为 $z=z(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，又若 $\frac{dz(t)}{dt}=\rho(t)\exp(\mathrm{i}\beta(t))$，则此曲线在点 $z(a)$ 处的切线与正的实轴成角 $\beta(a)$。如果 $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}=\bar{\rho}\exp(i\alpha)$，那末由

$$\left.\frac{df(z(t))}{dt}\right|_{t=a}=\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}\cdot\left.\frac{dz(t)}{dt}\right|_{t=a}=\bar{\rho}\cdot\rho(a)\exp[\mathrm{i}(\beta(a)+\alpha)],$$

得出象曲线在点 $f(z(a))$ 处的切线与正的实轴成角 $\beta(a)+\alpha$，就是说所有的角旋转 α。因此两条曲线之间的夹角 φ 保持不变(见图 10.2-2)。这样，由 f 诱导的映射称为保角的或保形的，更确切地说是直接保形的，因

因为一个复数 ζ 的绝对值 $|\zeta|^2$ 满足 $|\zeta|^2=\zeta\bar{\zeta}$。由此当且仅当 $z\bar{z}+z_0\bar{z}_0-z_0\bar{z}-z\bar{z}_0=1+z_0\bar{z}_0z\bar{z}-\bar{z}_0z-z_0\bar{z}$，就是说 $|z|^2(1-|z_0|^2)=1-|z_0|^2$，或者说 $|z|=1$，得出 $|w|=1$。因 $|f(z_0)|=0$，变量的连续性表明对于 $|z|<1$ 的所有 z 成立 $|f(z)|<1$。反之，因 $z=\exp(-ic)\dfrac{w+\exp(ic)z_0}{1+\exp(-ic)\bar{z}_0w}$ 得出 $|w|<1$ 的每一个 w 是 $|z|<1$ 的恰好某点 z 的象。总起来这就是说 f 将开的单位圆盘 $\equiv|z|<1$ 一一到上地映成它自身。考虑到 $\dfrac{df(z)}{dz}\neq 0$，这个映射是保形的。若 $z_0=0$，则 $f(z)=\exp(ic)z$ 是环绕 $z=0$ 的一个旋转，转一个用弧度来计量的角 c（见图 10.2-6）。

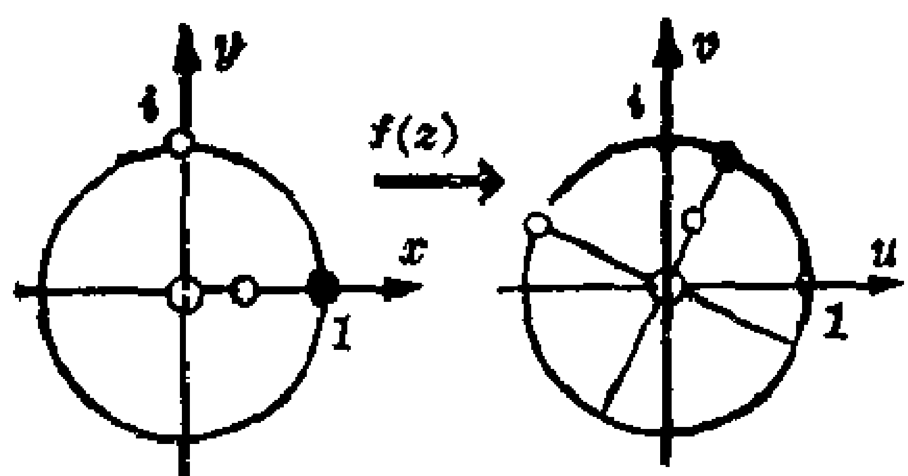


图 10.2-6 关于 $z=0$ 的旋转

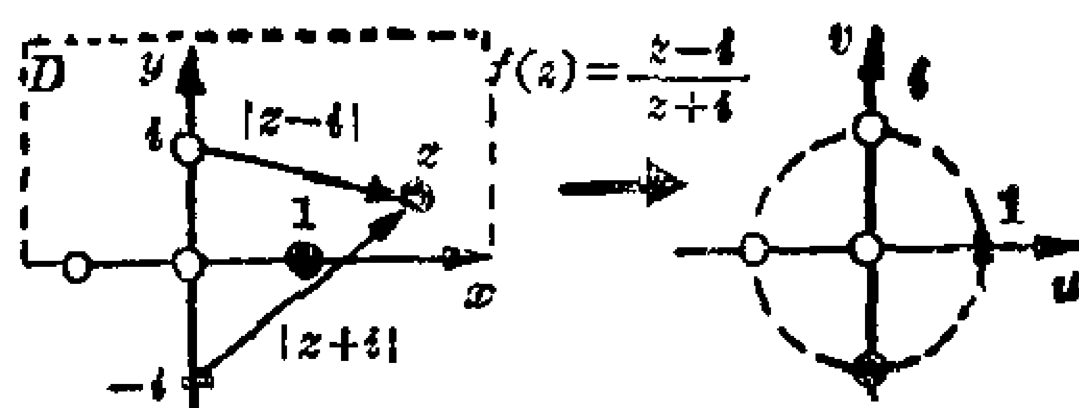


图 10.2-7 通过 $w=(z-i)/(z+i)$ 将上半平面到上地映射成单位圆

【例 4】 在上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 内由 $w=f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$ 定义的全纯函数，将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 保形映射成开圆盘 $|w|<1$。因为对于 $\operatorname{Im} z>0$ 的所有 z 来说 $|z-i|<|z+i|$，所以 $|w|<1$ 为真。实数 z 的象是单位圆周上的点，这是由于 $|z-i|=|z+i|$ 的缘故。z 平面的点 0, 1, ∞, -1 的象是 w 平面的点 -1, $-i$, 1, i（见图 10.2-7）。

黎曼映射定理。设 D 是复 z 平面的单连通正常部分，给定 D 的任一点 z_0 以及在 z_0 处的任一方向，存在一个且仅有一个由具有非退化导数的全纯函数 $w=f(z)$ 作出的将 D 到上映成单位圆盘 $|w|<1$ 的保形映射，它使 z_0 映射为圆心 $w=0$ 并使在 z_0 点的给定方向映成正实轴方向（见图 10.2-8）。

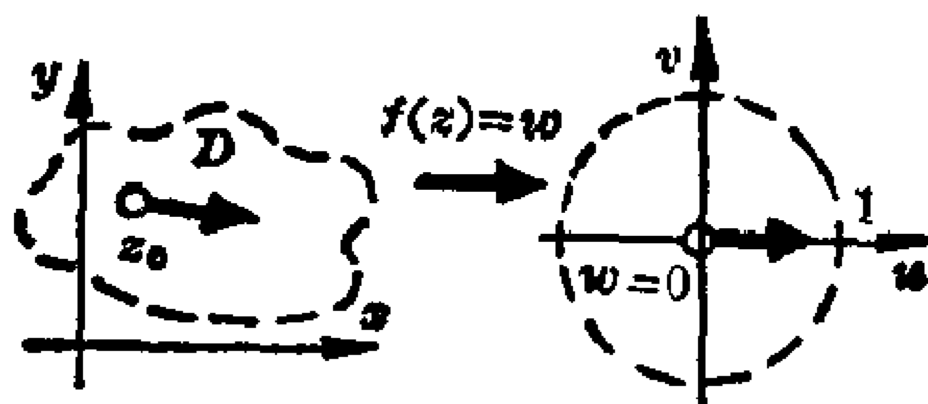


图 10.2-8 黎曼映射定理

流动问题 在 x, y 平面某个区域内的定常流动，与时间无关，这种定常流动可用随着流动质点的速度向量 $[u(x, y), v(x, y)]$ 来描述。在无

源无旋的流动中有 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $-\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$，这样就使分量 u 和 v 形成一个全纯函数 $f=u+iv$。在单连通区域内总是存在原函数 $F=U+iV$，它也是全纯的。$U(x,y)=$常数描述了质点沿着流动的流线(见图 10.2-9)。速度向量是流线的斜率。因为保形映射将全纯函数转换成全纯函数，所以它们是描述流线全过程的一个适当手段。

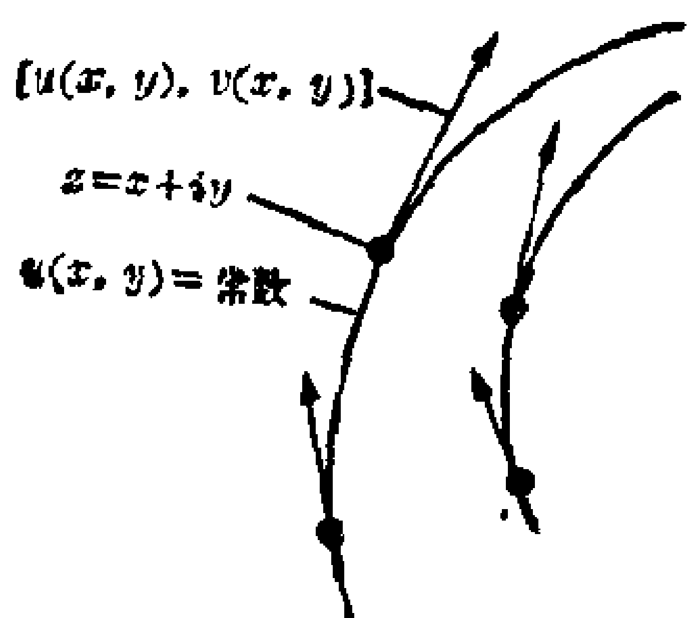


图 10.2-9　流线 $U(x, y)=\text{const}$

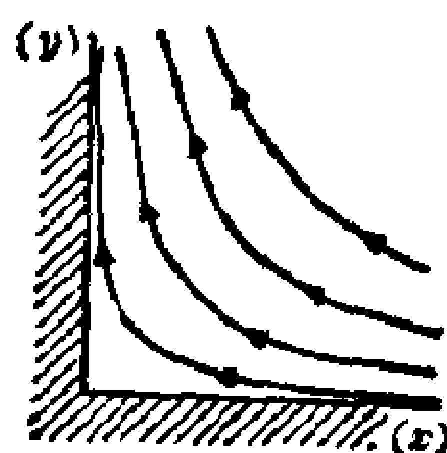


图 10.2-10　在直角弯管内的流动

【例 1】　在上半 w 平面 $\operatorname{Im} w>0$ 内流线为 $\operatorname{Im} w=$常数，若 $w=z^2=x^2-y^2+2ixy$，则此半平面是 z 平面第一象限一对一的象（见保形映射例 2)。这意味着双曲线 $\operatorname{Im} w=2xy=$常数也是流线，即在直角弯管内流动的流线(见图 10.2-10)。

【例 2】　函数 $w=(1/2)(z+1/z)$ 将圆周 $|z|=1$ 映射成 w 平面内从 $+1$ 到 -1 的线段，来回两次，z 平面的点 $+1$, i, -1, $-$i 具有象 $+1$, 0, -1, 0。除此线段之外的 w 平面是单位圆外部 $|z|>1$ 的象，其中平行线 $\operatorname{Im} w=$常数是流线。它们的原象就给出了绕这个单位圆的流线。因为 $z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, $1/z=(1/r)(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)$，从而 $w=(1/2)(r+1/r)\cos\varphi+(\mathrm{i}/2)(r-1/r)\sin\varphi$，由此可见 $(r-1/r)\sin\varphi=c=$常数是这些流线的方程(见图 10.2-11)。

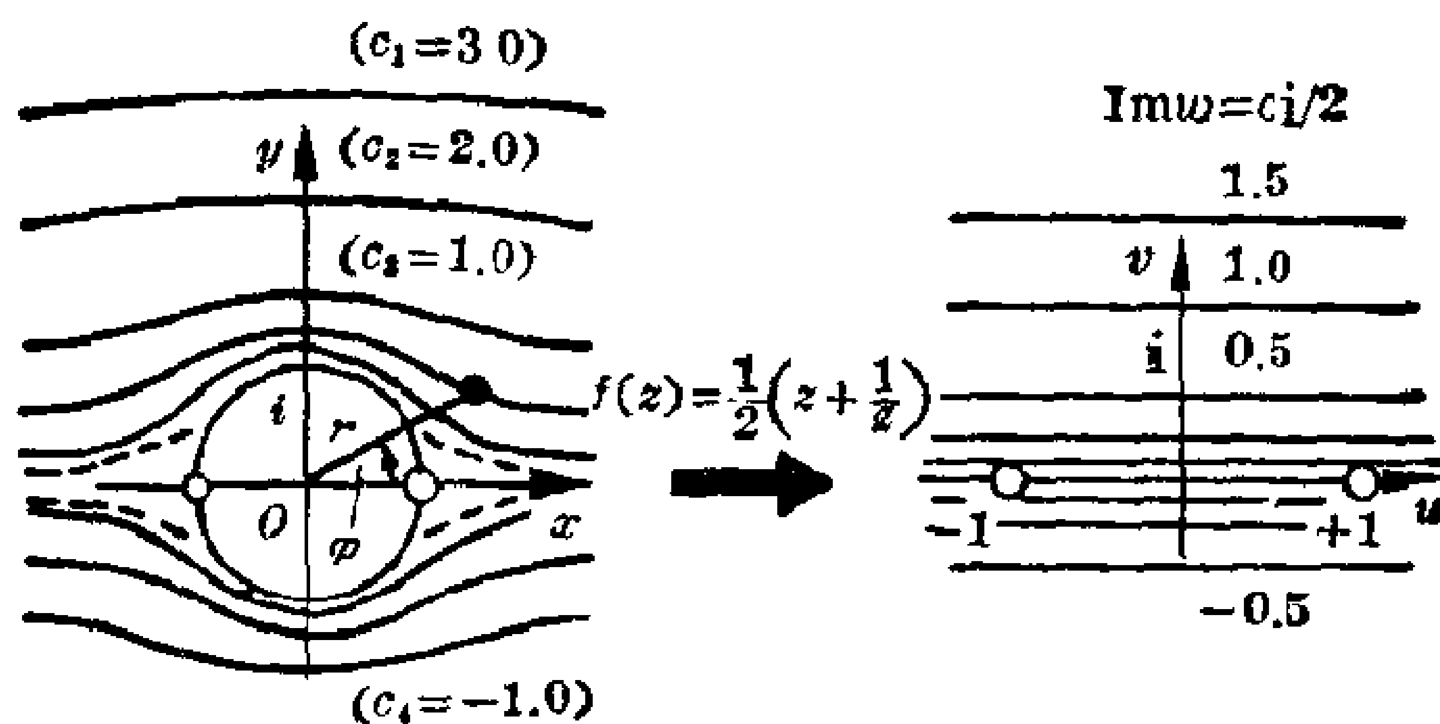


图 10.2-11　将 z 平面流线 $(r-1/r)\sin\varphi=$常数到上映射成 w 平面平行流动的流线 $\operatorname{Im} w=$常数的保形映射

绕其他周线的流动可以借助于该周线外部到圆外部的保形映射来得知。

【例 3】 若 $h>0$ (图中的 $h=2.75$), 则 $w=(1/2)(z+h^2/z)$ 将 z 平面内半径 $r=h$ 以及中心 $z=0$ 的圆 K_h 映射成 w 平面实轴上位于 $-h$ 与 h 之间的线段 (见图 10.2-12); 因为从 $z=h(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ 得出 $w=h\cos\varphi$。若 $\zeta=h^2/z$, 则 $w(\zeta)=(1/2)(h^2/z+h^2\cdot z/h^2)=w(z)$, 就是说 z 和 ζ 在 w 平面具有相同的象。以 $M(-1, 1)$ 为中心通过 $z=h$ 的圆 K_ρ 也通过 $z=-hi$ 并具有半径 $\rho=\sqrt{(h+1)^2+1}$。由 $\zeta=h^2/z$, 圆 K_ρ 映射成另一个圆 K_η, 它以 $H(h/(h+2), h/(h+2))$ 为中心而半径 $\eta=h\rho/(h+2)$。圆 K_ρ 和 K_η 被映射成所谓茹可夫斯基 (Zhukovskii) 外形。这里位于 K_ρ 和 K_η 之间的点集映射成由茹可夫斯基外形所界的点集; 一般地, 位于 K_ρ 和 K_η 之间的点对映射成同一个点。附带提一下, 位于第一象限内 K_h 与 K_η 之间的镰刀形点集, 以及位于第四象限内 K_h 与 K_ρ 之间的镰刀形点集, 映射成 w 平面的实轴与茹可夫斯基外形的 G-I-A 部分之间的点集。围绕$(-1, 1)$的圆周的象, 随着增大半径 $\rho=5, 6, \cdots$ 对于充分大的 $|z|$ 越来越变成圆形, 因为 $|h^2/z|<\varepsilon$。

一般地说, 这种映射定义为 $a_0/z+a_1z+a_2z^3+\cdots$。

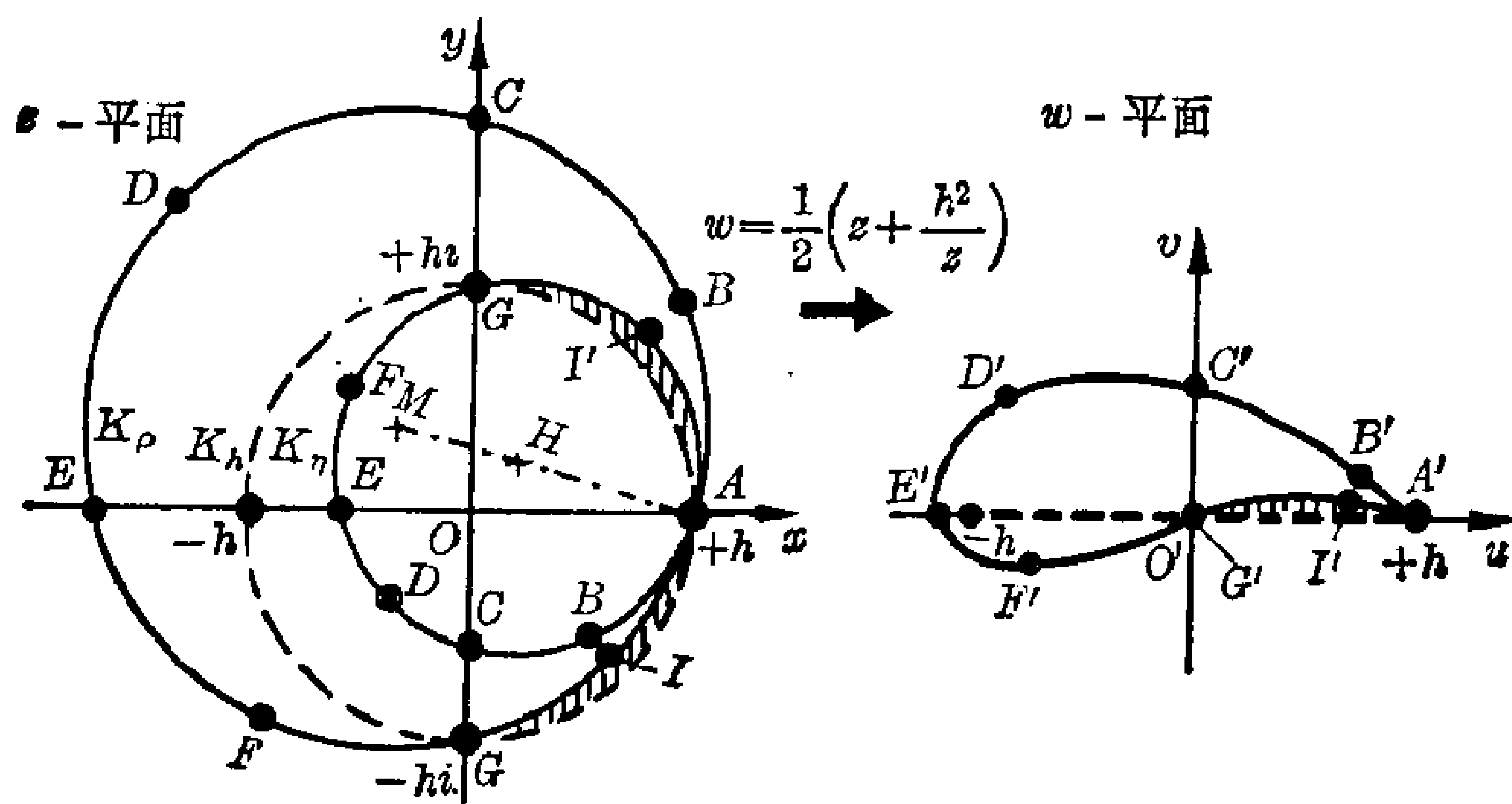


图 10.2-12 由 $w=(1/2)(z+h^2/z)$ 作出的从圆 K_ρ 和 K_η 到茹可夫斯基外形的保形映射

10.3 复值函数全程

黎曼数球 当 $z\neq 0$ 时由 $\zeta=1/z$ 定义的全纯函数将圆外部 $|z|>R$ 保形映射成有孔圆盘 $0<|\zeta|<1/R$, 它不包含点 $\zeta=0$(见图 10.3-1)。但

是当 $r\to\infty$ 时点 $z=r\exp(i\varphi)$ 的象可任意紧密地趋近这一个点 $\zeta=0$。因此将 $\zeta=0$ 解释为 z 平面的点 $z=\infty$ 的象。借助于黎曼数球可给出 z 平面无穷远点的直观概念。球在它的一个点 S 处与 z 平面的 $z=0$ 相切。从 S 在直径上的相对点 N 出发向点 z 的连线会贯穿球面，这一点 P 称为 z 的象。映射 $z\to P$ 是一一对应的，点 N 看作 z 平面无穷远点的象（见图10.3-2）。

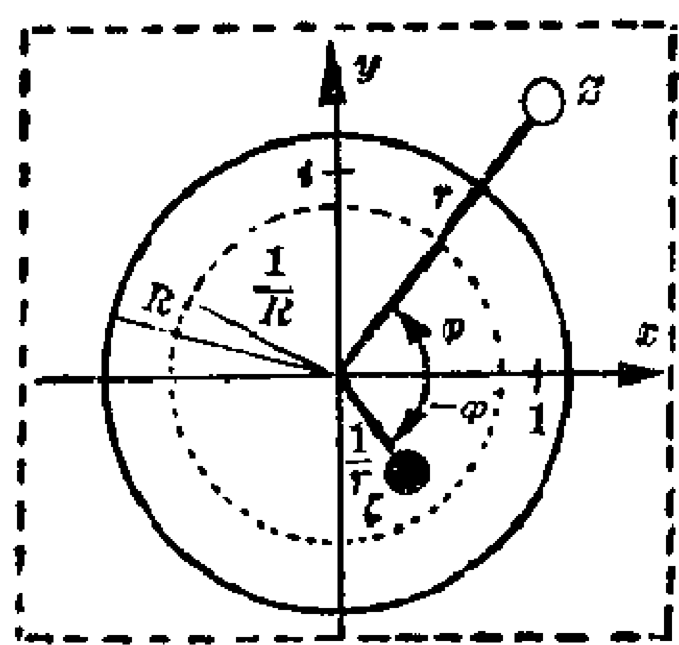


图 10.3-1　通过 $\zeta=1/z$ 将半径为 R 的圆外部到上映成半径为 $1/R$ 的圆内部

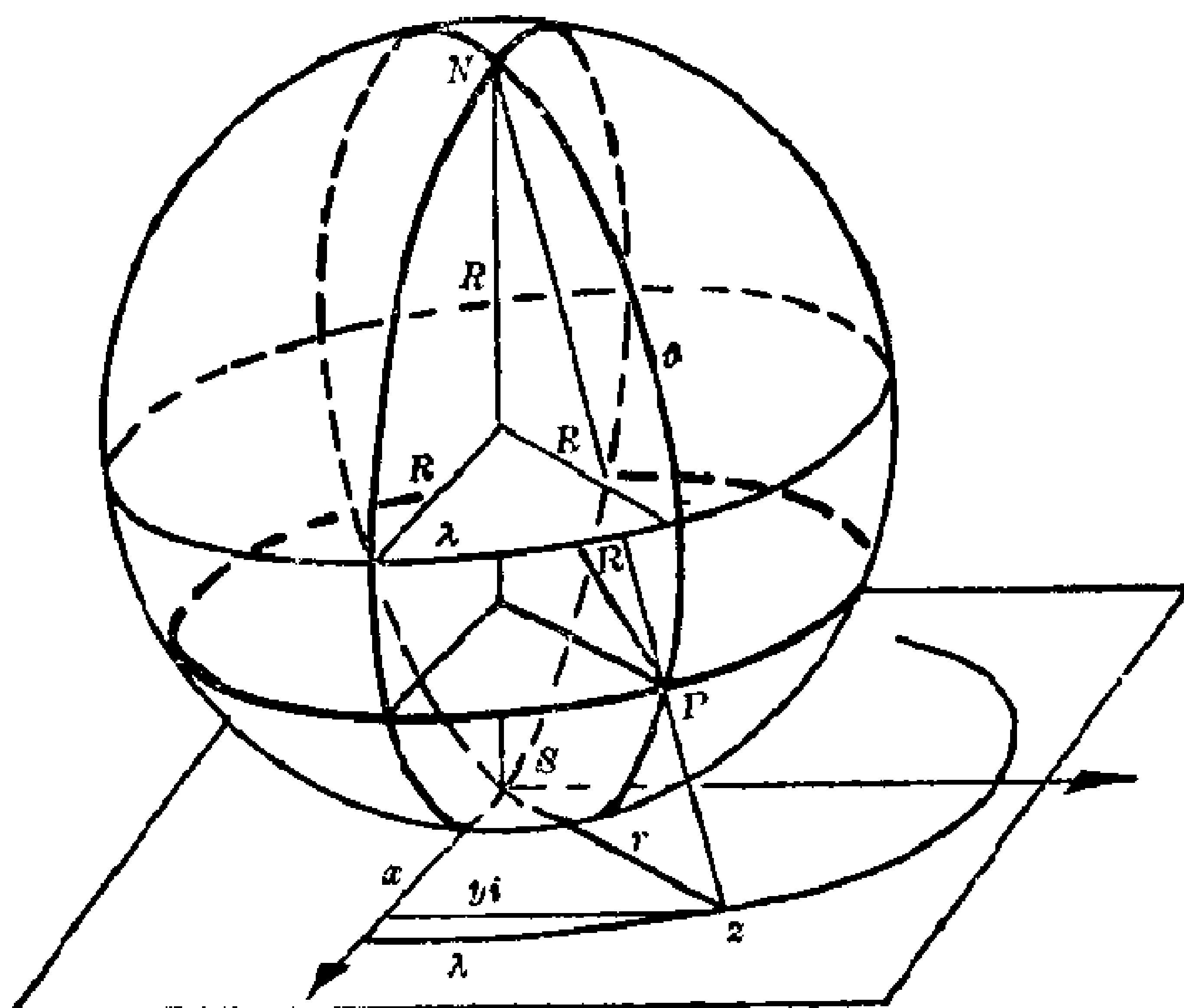


图 10.3-2　黎曼数球：$r=2/[R\sin\theta(1-\cos\theta)]$

点 $z=r\exp(i\varphi)$ 及其象 $\zeta=1/r\exp(-i\varphi)$所在的射线通过反射 $Z=\bar{z}$ 而彼此互换。这是一个间接保形映射，此时幅角 φ 的旋转方向相反。因此由半径倒数 $\zeta=1/Z=1/\bar{z}=1/r\exp(i\varphi)$ 作成的变换是间接保形的，这样，原点和象点位于同一条射线上。量 $1/r$ 不难用初等的办法构造出来（见图10.3-3）。

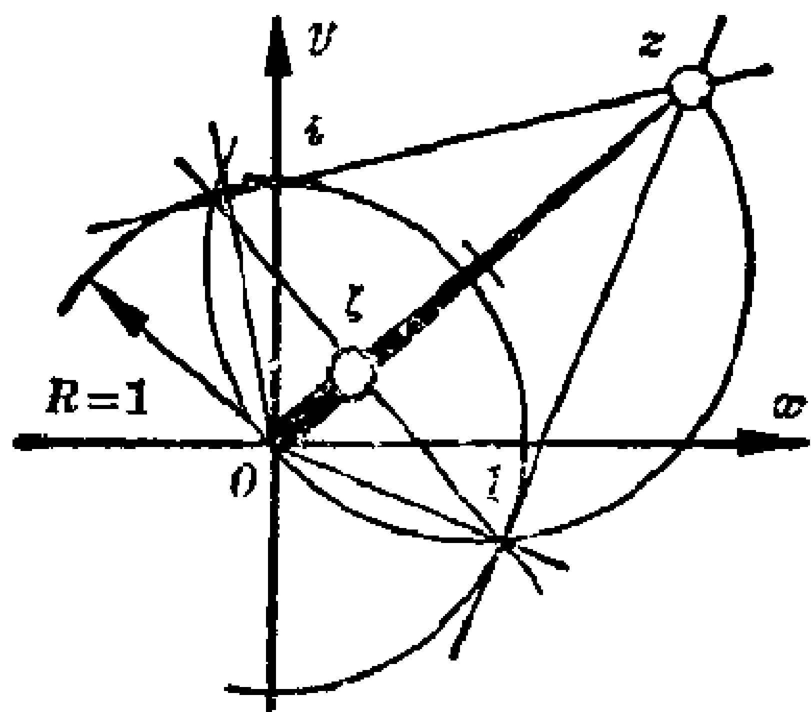


图 10.3-3　由半径倒数 $\zeta=1/\bar{z}$ 作成的映射；$|z|=r$ 隐含 $|\zeta|=1/r$ 及 $|\bar{z}|\cdot|\zeta|=1$

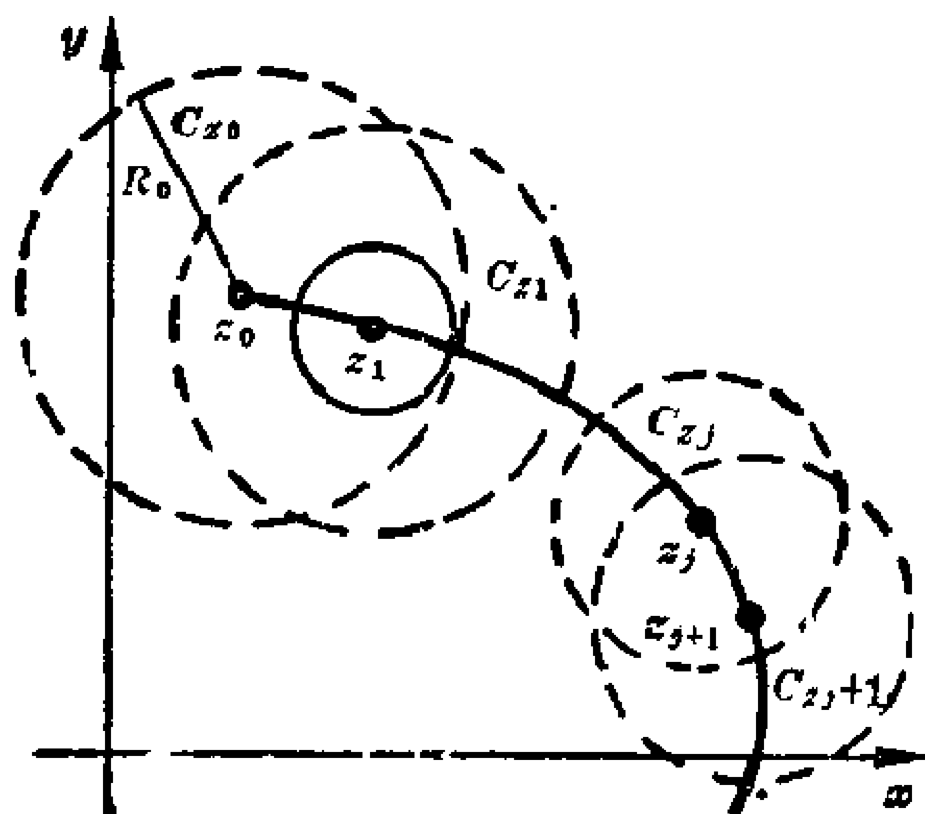


图 10.3-4　解析延拓

黎曼面 若幂级数 $P_{z_0}=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$ 在圆盘 K_{z_0}：$|z-z_0|<R_0$ 内收敛，则它就在这里面定义了一个全纯函数。如果 z_1 位于 K_{z_0} 内，那末按照 $(z-z_0)=[(z-z_1)+(z_1-z_0)]$ 就可将幂级数 P_{z_0} 重排成幂级数 P_{z_1}，它在交集 $K_{z_0}\cap K_{z_1}$ 内也收敛并且表示同一个函数。若 P_{z_1} 不仅在 K_{z_0} 内收敛，而且也在圆盘 K_{z_1} 的点上面收敛，这个 K_{z_1} 部分也落在 K_{z_0} 之外，则 f 已经通过 P_{z_1} 而被解析延拓(见图 10.3-4)。以每一种可能的方式作解析延拓，就得到由幂级数 P_{z_0} 产生的**完全解析函数**。可能发生这种情况，就是对于 z 平面的每一个点它指定着唯一的函数值 $f(z)$；但也可能发生另一种情况，即有这样的点 z，按照趋近它的不同路径会得出不同的函数元素。为了避免这种多义性，想象每一个函数元素定义在平面的各叶内。使得在这样的点 z 上，完全解析函数在相应的各叶内是唯一确定的。这种覆盖面或者覆盖球称为**黎曼面** $\boldsymbol{R}$。

例如，由 $w=\sqrt{z}=r\exp(\mathrm{i}\varphi/2)$ 定义的函数可以从正实轴出发以 φ 增加的方向或者以 φ 减少的负向作解析延拓。在负实轴处，按照不同的旋转方向，分别地得到值 $w^+(\pi)=r\exp(\mathrm{i}\pi/2)$ 而 $w^-(-\pi)=r\exp(-\mathrm{i}\pi/2)$（见图 10.3-5）。进一步转完一圈后，这些值又交换了，因为分别地有 $w^+(3\pi)=r\exp(3\mathrm{i}\pi/2)=r\exp(-\mathrm{i}\pi/2)$ 而 $w^-(-3\pi)=r\exp(-3\mathrm{i}\pi/2)=r\exp(\mathrm{i}\pi/2)$。因此这个函数的黎曼面具有两叶(见图 10.3-6)，它们沿着负实轴切割开来然后又交叉通过，使得每一叶切割出来的上方边界与另一叶的下方边界相连，于是函数值在黎曼面上连续地变来变去。在分支点上两叶又合在一起；从 z 球看出对于 $w=\sqrt{z}$ 来说 $z=0$ 和 $z=\infty$ 是分支点。

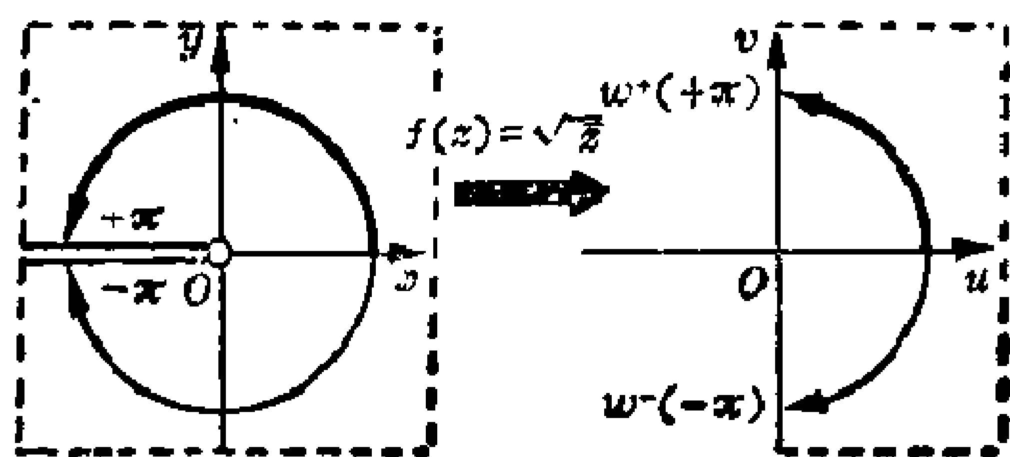


图 10.3-5 函数 $w=\sqrt{z}$ 在负实轴处的值 $w^+(\pi)$ 和 $w^-(-\pi)$。

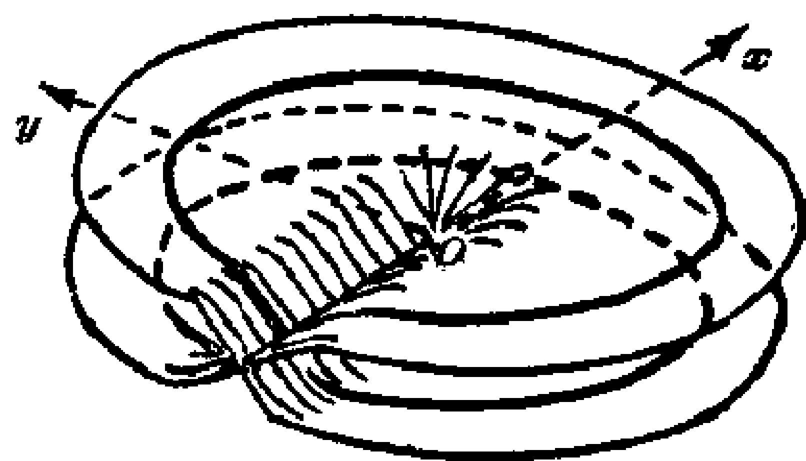


图 10.3-6 $w=\sqrt{z}$ 的黎曼面

单值化 黎曼面 $\boldsymbol{R}$ 是 z 平面或 z 球的一个覆盖面。对于 $\boldsymbol{R}$ 可以构造进一步的覆盖，即**通用覆盖面**。如果从 $\boldsymbol{R}$ 上的一个定点 P_0 出发，通用

覆盖面的所有点 P 都是以 P_0 为起点的各种可能曲线的终点；而两条曲线 γ_1 和 γ_2 仅当它们能在 $\boldsymbol{R}$ 内从一条连续地移动到另一条，才导致同一点 P；换句话说就是如果存在一条从 P_0 到 P 的曲线不能连续地移动到 γ_1 或 γ_2，那末它定出了通用覆盖面上的另外一点。环的例子表明这样的曲线 $\overline{\gamma}$ 可能出现(见图10.3-7)。

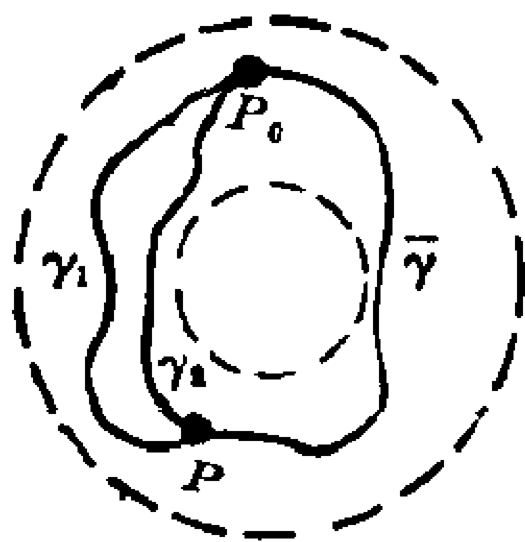


图10.3-7　两条曲线 γ_1 和 γ_2 当且仅当它们能在黎曼面 $\boldsymbol{R}$ 上相互连续移动，才能确定通用覆盖面上的同一点

可以证明，通用覆盖面是单连通的并且成立如下的黎曼映射定理一般化：

广义黎曼映射定理。每一个黎曼面的通用覆盖面分别可以一对一且保形到上映成单位圆盘内部也可到上映成整个复平面或黎曼球。

因为黎曼面是它的通用覆盖面的一部分，所以每一个黎曼面可以与黎曼数球的某个子集建立起一一对应。这就是所谓的黎曼面*单值化*可能性；它的一个例子为椭圆积分被积函数的黎曼面单值化(见椭圆积分)。

值的分布　对于一个全纯函数 f，可以提出关于它取某个值的频数的命题。如果 $f(z_0)=w_0$，并且 $f'(z_0)=0$，…，$f^{(k-1)}(z_0)=0$，但 $f^{(k)}(z_0)\neq 0$，则点 z_0 称为 f 的 k 重 w_0 位置，下述定理成立：

如果把重数计算在内，那末多项式 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$（其中 $a_n\neq 0$）正好有 n 个位置取到任一个复数值 w_0（代数基本定理）。

例如，多项式 $p(z)=z^2$ 在 $z=1$ 和 $z=-1$ 取值 $w_0=+1$；值 $w_0=0$ 只是在 $z=0$ 取到，但重数为2，这是因为 $p'(z)=2z$ 及 $p''(z)=2$，使得 $p'(0)=0$，而 $p''(0)\neq 0$。比喀索拉第-韦尔斯特拉斯定理更强的命题是毕卡(Picard)定理。

毕卡定理：以 z_0 为本性奇点的复值函数，在 z_0 的任一邻域内可取到每一个复数值，至多只有一个例外。

10.4　椭圆积分

韦尔斯特拉斯 $\wp$ 函数　对于所有的 z 有定义的函数 f 称为*周期的*，周期为 ω，即若对于所有的 z 成立 $f(z+\omega)=f(z)$。函数 f 称为*双周期的*，即若存在两个复数 ω_1，ω_2，对于它们来说 ω_2/ω_1 不是实数，使得由任

意整数 k_1,k_2 组合而成的所有数 $\omega=k_1\omega_1+k_2\omega_2$ 确定所有周期的集合，就是说确定**周期格**，对于任何 z 成立 $f(z+\omega)=f(z)$。

设 a 是任意一个复数。于是数 a, $a+\omega_1$, $a+\omega_1+\omega_2$, $a+\omega_2$ 为所谓**周期平行四边形**的顶点。双周期函数 f 在任意一个周期平行四边形内取到它的一切值。**椭圆函数**是一个双周期亚纯函数，不为常数的椭圆函数必定有极点。但在任意一个周期平行四边形内部的残数之和总是等于零。如果绕这样的一个周期平行四边形边界取积分，那末

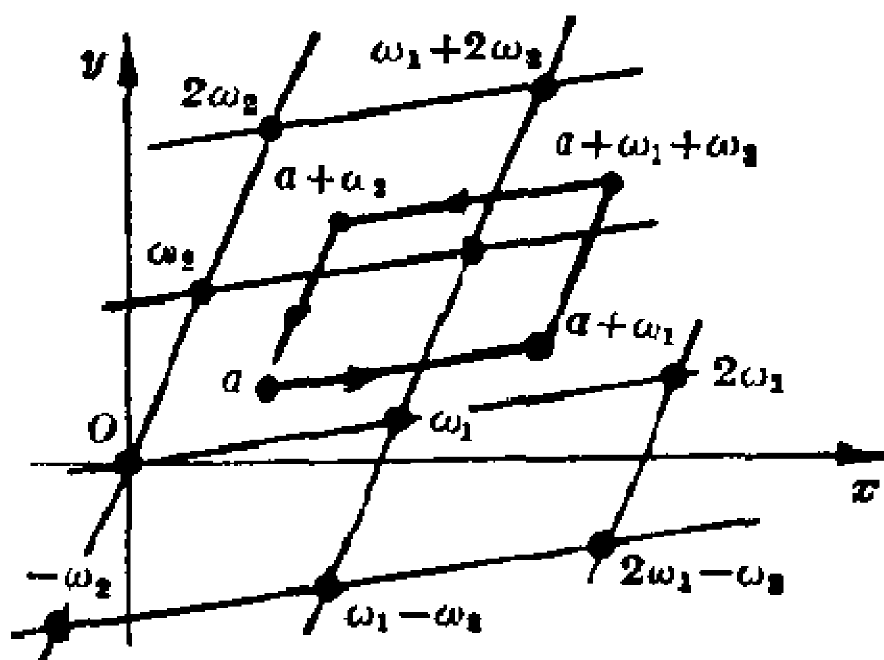


图 10.4-1 周期格以及顶点为 a 的周期平行四边形

$$\int f(z)dz=\int_a^{a+\omega_1}f(z)dz+\int_{a+\omega_1}^{a+\omega_1+\omega_2}f(z)dz+\int_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_2}f(z)dz+\int_{a+\omega_2}^{a}f(z)dz=0;$$

这是因为在第三个积分中用 $z+\omega_2$ 代入 z 则表明其值为第一个积分的负值，对于另外一对也有类似结果。这里假定在边界上没有极点，不过通过适当地选取 a 总是可以达到这种情况(见图 10.4-1)。因此不存在这样的椭圆积分，它在周期平行四边形内只有一个一阶极点。最简单的椭圆函数是韦尔斯特拉斯 $\wp$ 函数

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{k_1,k_2}{}'\left[\frac{1}{(z-k_1\omega_1-k_2\omega_2)^2}-\frac{1}{(k_1\omega_1+k_2\omega_2)^2}\right];$$

这里符号 Σ 处的一撇是指出 $k_1=0$, $k_2=0$ 的项从求和中删去。它有一个 2 阶极点，它在每一个格点的残数为零。它的导函数 $\wp'(z)$ 也是椭圆函数，在 $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ 和 $(\omega_1+\omega_2)/2$ 处有 1 阶零点。在 $z=0$ 的邻域内 $\wp$ 函数及其导函数的罗朗展开可借助于主部和一个全纯函数 h 来给出：

$$\wp(z)=1/z^2+h(z),\ \wp'(z)=-2/z^3+h'(z),$$
$$\wp''(z)=6/z^4+h''(z)。$$

级数展开导致微分方程 $\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$，其中使用了如下的缩写符号：

$$g_2=60\sum_{k_1,k_2}{}'\frac{1}{(k_1\omega_1+k_2\omega_2)^4}\quad 和\quad g_3=140\sum_{k_1,k_2}{}'\frac{1}{(k_1\omega_1+k_2\omega_2)^6}。$$

$\wp$ 函数的**反演问题**是对于给定值 g_2 和 g_3(其中 $g_2^3-27g_3^2\neq0$)，要找出周期格使对关联的 $\wp$ 函数其量 g_2 和 g_3 取规定值。

若在一个周期平行四边形内部的 N 个位置 z_j, $j=1, \cdots, N$, 规定了罗朗展开的主部，使得残数满足 $\sum_{j=1}^{N} a_{-1}^{(j)}=0$, 则除了一个加性常数外存在一个且仅存在一个椭圆函数 f 具有这些主部。除了这个加性常数外，它是 ρ 函数及其导函数以及 $-\rho$ 的原函数 ζ 的线性组合。但函数 ζ 不是椭圆函数，因为它以格点为1阶极点，而在其他地方全纯。

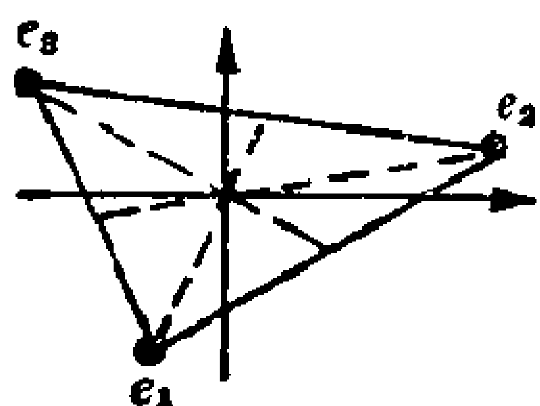


图 10.4-2　$p(z)=4z^3+c_1z+c_2$ 的零点 e_1, e_2, e_3 具有 $e_1+e_2+e_3=0$

椭圆积分的韦尔斯特拉斯范式　在椭圆积分中，被积函数 $\mathrm{rat}(z, w)$ 是 z 和 w 的有理函数；这里 w 是 z 的4次多项式 $p_4(z)$ 或者3次多项式 $p_3(z)$ 的平方根，而这些多项式的4个或3个零点是单重的，即互不相同。在 z 平面内被积函数确定到可以相差一个因子 ± 1, 只是在 $w=\sqrt{p(z)}$ 的两叶黎曼面上才是唯一确定的。它的四个分支点是 $p_4(z)$ 的四个零点 e_1, e_2, e_3, e_4 或者 $p_3(z)$ 的三个零点再加上点 $z=\infty$。积分路径 γ 落在这个黎曼面上。通过代入 $z'=1/(z-e_4)$, 则 $p_4(z)$ 化为 $p_3(z)$。通过平移可以达到由余下的三个零点 e_1, e_2, e_3 所构成的三角形重心落在 $z=0$(见图 10.4-2)。于是 $e_1+e_2+e_3=0$, 由韦达 (Vieta) 根定理，除了一个常数因子，$p(z)=4z^3+c_1z+c_2$。这就导致椭圆积分的韦尔斯特拉斯范式。对于值 $-c_1$ 和 $-c_2$ 求解 ρ 函数的反演问题，可以在 $\bar{z}$ 平面内找出两个周期 ω_1 和 ω_2, 使相关的周期格确定一个 $\rho(\bar{z})$ 函数，而对于它来说 $g_2=-c_1$ 和 $g_3=-c_2$。通过 $z=\rho(\bar{z})$, $\bar{z}$ 平面的每一个周期平行四边形一一到上映射成一叶，从而整个 $\bar{z}$ 平面到上映射成 $w=\sqrt{p(z)}$ 的通用覆盖面。按照 ρ 函数的微分方程，又因为 $z=\rho(\bar{z})$, 得出 $\rho'^2=4\rho^3-g_2\rho-g_3=w^2$, 即 $\rho'(\bar{z})=w$。若 $\bar{\gamma}$ 是 z 平面的曲线 γ 在 $\bar{z}$ 平面的逆象，则 $\bar{z}$ 平面内的椭圆积分为：

$$\int_\gamma \mathrm{rat}(z, w)dz=\int_{\bar{\gamma}} \mathrm{rat}(\rho, \rho')\rho'(\bar{z})d\bar{z}。$$

被积函数称为 a) 第一类，b) 第二类，或者 c) 第三类的，根据被积函数在 $\bar{z}$ 平面内是这样的一个椭圆函数：a) 没有极点，b) 有极点但它们的残数全为零，c) 其他情况。在情况 a) 之下，被积函数在 $\bar{z}$ 平面是一个常数，因此 $\mathrm{rat}(\rho, \rho')=$常数$/\rho'$ 从而 $\mathrm{rat}(z, w)=$常数$/w$。因为 $w^2=4z^3-g_2z-g_3$, 所以对于椭圆积分得到：

椭圆积分：常数 $\int_\gamma \frac{dz}{w}$=常数 $\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{(4z^3-g_2z-g_3)}}$，第一类；

$\int_\gamma \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$，第二类；$\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$，第三类。

当用 $w^2=(1-z^2)(1-k^2z^2)$ 替代 $w^2=4z^3-g_2z-g_3$ 时，就引出椭圆积分的勒让德形式；k 称为模数。

第11章　空间解析几何

空间解析几何的实质在于建立空间点与实数之间的对应关系。曲线(一维流形)和曲面(二维流形)则对应于方程的解集，并且可以用代数方法和解析方法来代替几何构造。因为这些方法形成解析几何的基础，所以在代数和分析充分发展之前，这门学科是不会产生的。

11.1　坐标系

直角坐标

建立体系　坐标系是点和数之间的媒介。为了在空间建立直角的或笛卡尔坐标系，第一件事情就是要选择空间一个点作为原点。经过这一点引出三条互相垂直的直线。这些直线称为*坐标轴*，通常是 x 轴，y 轴和 z 轴。这三条坐标轴在空间张成三个*坐标平面*，称为 x, y 平面，x, z 平面和 y, z 平面。任意两条轴把坐标平面分成四个象限，而这三个坐标平面把空间分成八个*卦限*。

定向　在每个坐标轴上固定一个单位向量：在 x 轴上为向量 $\boldsymbol{i}$，在 y 轴上为向量 $\boldsymbol{j}$，在 z 轴上为向量 $\boldsymbol{k}$。坐标轴由这些向量指示方向，从而此坐标系是*定向的*(见图 11.1-1)。

从坐标轴原点起包含单位向量终点的那一部分轴称为正轴，另外一部分称为负轴。任何两个正轴围成一个主象限，三个主象限围成一个主卦限。

总可以用一只手的大拇指、食指、中指来表示 $\boldsymbol{i}$(大拇指)，$\boldsymbol{j}$(食指)，$\boldsymbol{k}$

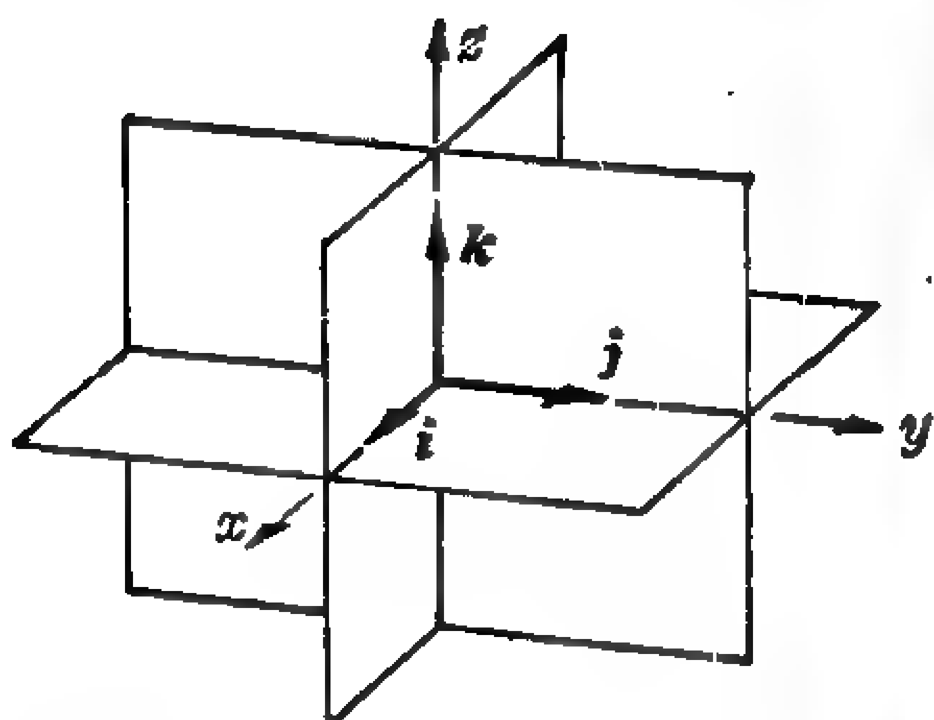
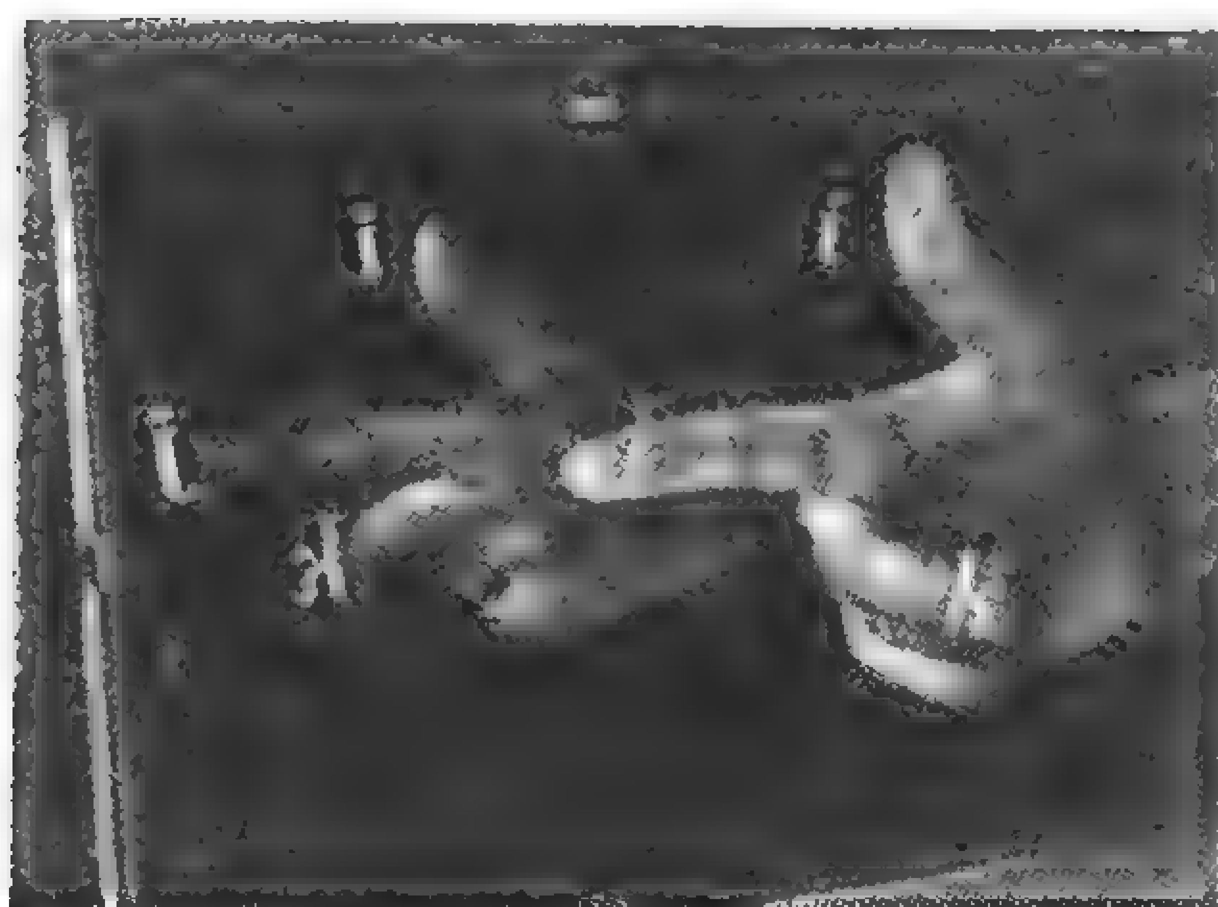


图 11.1-1 直角坐标系，右手定向


图 11.1-2 镜象倒向

(中指)的方向。假若用的是右手，则此坐标系称为右手定向或*右手系*，否则称为*左手系*。通过一个轴的倒向或者通过一个平面反射，就把右手系变成左手系，反之亦然(见图 11.1-2)。

空间的点 假若选定一个直角坐标系，那末对于空间的每一点相应有唯一的实数三元组。反之，对于每一个三元实数组相应有空间唯一的点。对应于空间一点的三个数称为该点的*直角坐标*或*笛卡尔坐标*。为了确定给定点 P 的直角坐标，从 P 点到每一根坐标轴作垂线，再以相应于固定的单位向量的长度为单位度量这些投影的有向长度。这样得到的值就是 P 的坐标。为了根据给定的坐标 x, y, z 确定点 P，采用向量记号。从原点出发，向量 $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 直接引出所要求的点 P(见图 11.1-3)。它与原点的距离可以用毕达哥拉斯(Pythagoras)定理来计算，即

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}。$$

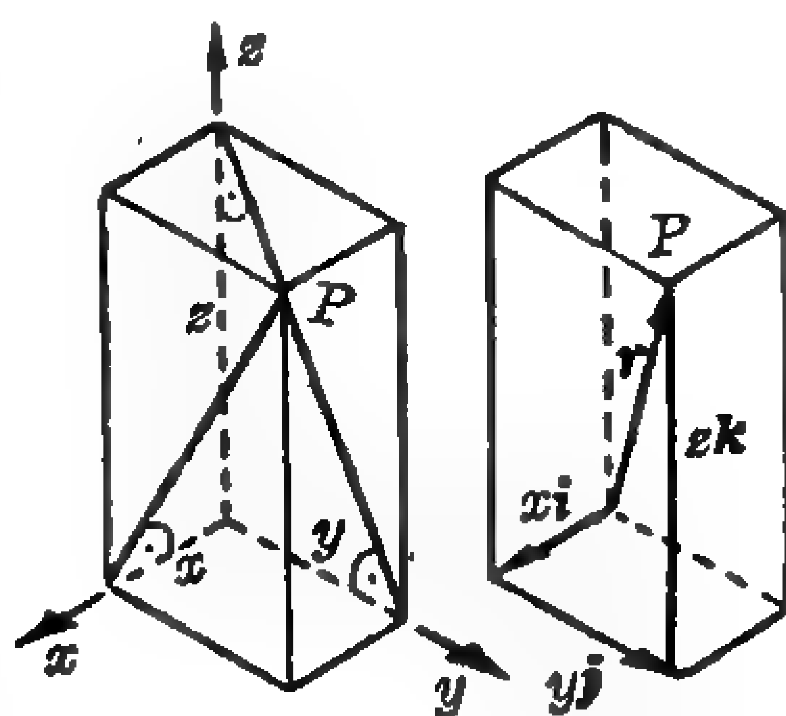


图 11.1-3 a) 空间点 P 的直角坐标，b) 终点为 P 的向量 $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

【例】 给定 P 点的直角坐标 $x=3, y=4, z=12$。将此记作 $P(3, 4, 12)$，这点到原点的距离为

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13。$$

因此，P 点到原点的距离是 13 个单位。

斜坐标

斜坐标系是直角坐标系的推广，为了建立斜坐标系，取过原点的任意三条直线，它们不落在同一平面上，并且在每一条直线上规定一个向量。

于是除了下列三种情况以外，直角坐标系的所有结果同样成立：

1. 对应于空间一点的数不再叫做直角坐标，而一般地称为平行坐标。

2. 为了确定给定点 P 的平行坐标，引一个平行六面体，它的边平行于坐标轴而且以原点与 P 点作为它的顶点。落在坐标轴上各边的有向长度就是 P 的平行坐标。

3. 如同直角坐标系，向量 $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，从原点出发引向点 P，不过通常 $|\boldsymbol{x}|\neq\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，因为在一般三角形中毕达哥拉斯定理不成立。

齐次坐标

在射影几何中，要求在平面上的两条直线如果不偏斜，它们总有一个交点，在空间中也是如此。因此引进*非正常点*或*无穷远点*作为平行线的交点。就到目前为止所确立的形式来说，解析几何不可能对付无穷远点。满足射影几何同时也满足解析几何的要求的一种可能性就在于引进齐次坐标。

若 x', y', z' 是空间点 P 的平行坐标，则由方程 $x'=\frac{x}{t}$, $y'=\frac{y}{t}$, $z'=\frac{z}{t}$ 所确定的数 x, y, z, t 称为点 P 的齐次坐标。这四数组不是唯一确定的。若 x, y, z, t 是空间一点的齐次坐标，那末对于任意实数 $\rho\neq0$, ρx, ρy, ρz, ρt 是同一点的齐次坐标。反之，对应于 $t\neq0$ 的任意齐次坐标 x, y, z, t 存在唯一的平行坐标三数组。通过简单的转化，得到逆变换为 $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$。

【例】　点 $P(2, 3, -1)$ 对于任意 $s\neq0$，有齐次坐标 $x=2s$, $y=3s$, $z=-s$, $t=s$。

有些问题在齐次坐标中是可解的，但在平行坐标中不可解。例如，若在 x', y' 平面上有两条平行直线 $y'=ax'+b_1$ 和 $y'=ax'+b_2$, $b_1\neq b_2$，那末在平行坐标中不存在交点。而在齐次坐标中同样的直线具有方程 $y=ax+b_1t$ 和 $y=ax+b_2t$。

这组方程是可解的：事实上，它有无穷多个解 $x=\rho$, $y=a\rho$, $t=0$。对于任何 $\rho\neq0$，三数组 ρ, $a\rho$, 0 表示 x', y' 平面上无穷远点的齐次坐标，它是这两条直线的公共点并且表示了它们的共同方向。

球面坐标

建立球面坐标系　对于一些问题，例如，与球的表面有关的问题，适宜于引进非平行坐标。不用直角坐标 x, y, z 来确定空间任意一点 P，而是用如下方式来确定：

1. 原点 O 到 P 的距离 $r\geqslant 0$，

2. 线段 OP 与 x, y 平面的交角 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant+\frac{\pi}{2}\right)$，

3. 线段 OP 在 x, y 平面上的投影 OP' 与正 x 轴的交角 $\lambda(0\leqslant\lambda<2\pi)$。

图 11.1-4 中说明量角时的旋转方向。

r, φ, λ 的值叫做点 P 的球面坐标，它们对应于平面上的极坐标，因此也称为空间极坐标。

每一个球面坐标三数组恰好对应于空间一点。假使 P 点不落在 z 轴上，那末空间一点 P 对应于唯一的球面坐标的三数组。在 z 轴上，除了原点，只有 r 和 $\varphi\left(=\pm\frac{\pi}{2}\right)$ 是唯一确定的，而 λ 是不确定的。假若 P 是原点，那末只有 $r=0$ 是唯一确定的，而 φ 和 λ 是不确定的。

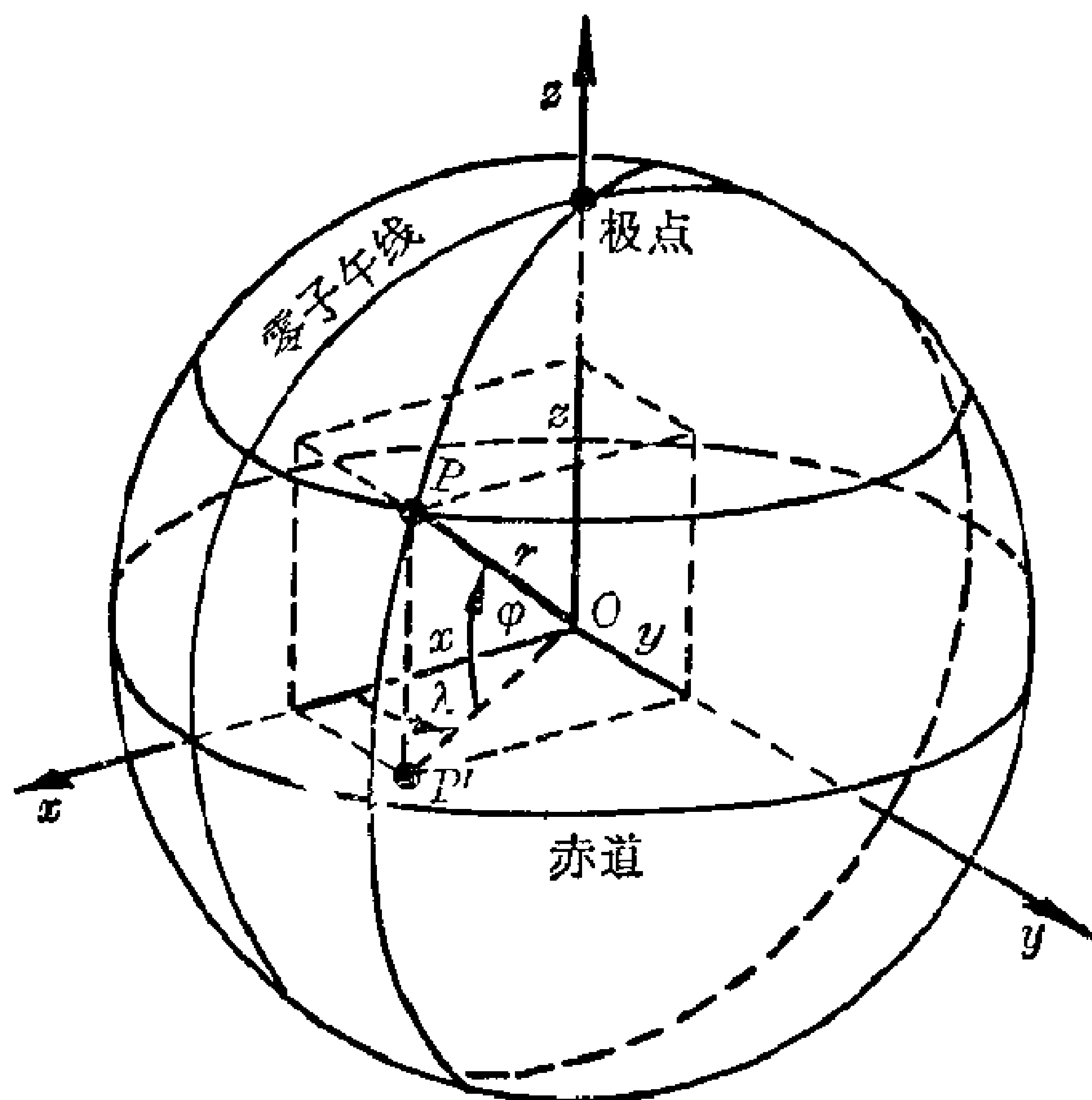


图 11.1-4　空间一点 P 的球面坐标 r, φ, λ

直角坐标与球面坐标之间的转换　从图 11.1-4 中能得到下列关系 $x=|OP'|\cos\lambda$, $y=|OP'|\sin\lambda$, $|OP'|=r\cos\varphi$。因此，空间一点的直角坐标可以根据球面坐标用如下公式来计算：

$$\boxed{\begin{aligned} x&=r\cos\varphi\cos\lambda\\ y&=r\cos\varphi\sin\lambda\\ z&=r\sin\varphi\end{aligned}}$$

由此得出 $x^2+y^2+z^2=r^2$，

$$x/\sqrt{x^2+y^2}=\cos\lambda,\ \ y/\sqrt{x^2+y^2}=\sin\lambda,$$

$$z/\sqrt{x^2+y^2}=\sin\varphi/\cos\varphi=\operatorname{tg}\varphi,\ \ y/x=\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}=\operatorname{tg}\lambda。$$

因此，空间一点的球面坐标也能从直角坐标用下列公式得到：

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ \varphi=\operatorname{arc\,tg}(z/\sqrt{x^2+y^2})\text{（当 } x^2+y^2\neq 0 \text{ 时），}$$

$$\lambda=\operatorname{arc\,tg}(y/x)\qquad\text{（当 } x>0,\ y>0 \text{ 时），}$$

$$\lambda=\pi+\operatorname{arc\,tg}(y/x)\qquad\text{（当 } x<0 \text{ 时），}$$

$$\lambda=2\pi+\operatorname{arc\,tg}(y/x)\qquad\text{（当 } x>0,\ y<0 \text{ 时）。}$$

进而有

$\varphi=\frac{\pi}{2}$，当 $x=y=0,\ z>0$ 时；　　$\lambda=\frac{\pi}{2}$，当 $x=0,\ y>0$ 时；

$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，当 $x=y=0,\ z<0$ 时；　$\lambda=\frac{3\pi}{2}$，当 $x=0,\ y<0$ 时；

φ 不确定，当 $x=y=0,\ z=0$ 时；λ 不确定，当 $x=y=0$ 时。

反正切 arctg 总是取主值。

【例】　点 $P(3,\ -4,\ -12)$ 的球面坐标是什么？

$$r=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13;$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}(-12/\sqrt{3^2+4^2})=\operatorname{arc\,tg}(-12/5)\approx-67.38°;$$

$$\lambda=360°+\operatorname{arc\,tg}(-4/3)\approx 360°-53.13°=306.87°。$$

因此点 P 的球面坐标是 $r=13,\ \varphi\approx-67.38°,\ \lambda\approx 306.87°$。

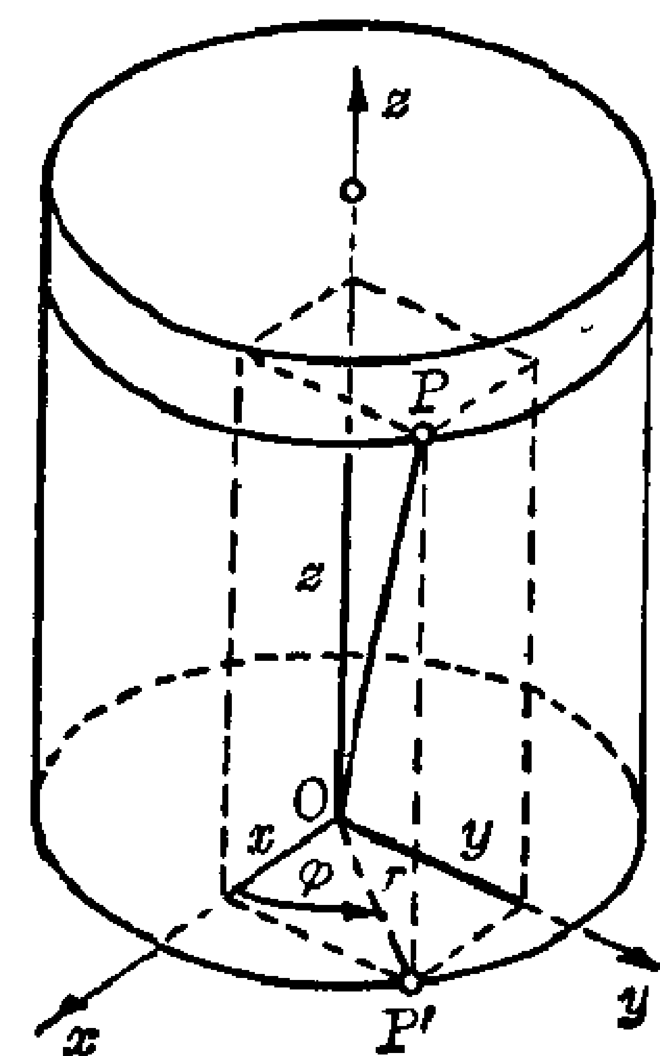


图 11.1-5　空间一点 P 的柱面坐标 $r,\ \varphi,\ z$

柱面坐标

对于圆柱表面上的问题，引进柱面坐标较方便（见图 11.1-5）。从直角坐标出发，可确定空间任意一点 P 如下：

1. 原点 O 到点 P' 的距离 $r\geqslant 0$，这里 OP' 是线段 OP 到 $x,\ y$ 平面上的投影。

2. 线段 OP' 与正 x 轴的交角 $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$。

3. $x,\ y$ 平面到点 P 的有向距离 $z(-\infty<z<+\infty)$。

对于每一个柱面坐标三数组恰好对应于空间一点。反之，假如点 P

不落在 z 轴上，那末空间一点 P 对应于唯一的柱面坐标三数组。对于 z 轴上的点来说，$r=0$ 和 z 是确定的，但 φ 是不确定的。

在物理上，当研究由柱面形成的物体时，例如计算圆柱体的转动惯量或圆柱体的热传导问题时，常常采用柱面坐标。

P 的柱面坐标 r, φ, z 是与 x, y 平面上 P' 点的极坐标和 P 点的直角 z 坐标相一致的。这就给出转换公式，就 φ 来说只有在 $x^2+y^2\neq 0$ 时这些公式才有效，当 $x=y=0$ 时，φ 是不确定的。

$x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$ $z=z$	$r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\cos\varphi=x/\sqrt{x^2+y^2}$，$\sin\varphi=y/\sqrt{x^2+y^2}$ $z=z$

【例】 给出点 P 的柱面坐标 $r=3$, $\varphi=-30°$, $z=1$, 要求它的直角坐标。

$$x=3\cos(-30°)=3\cdot\cos 30°=3/2\sqrt{3}\approx 2.598,$$

$$y=3\sin(-30°)=-3\sin 30°=-\frac{3}{2}=-1.5,$$

$$z=1。$$

坐标变换

假若在空间给出两个坐标系（以后这两个坐标系都是具有相同长度单位的直角右手系），它们不相重合，常常提出的问题是由 P 在一个坐标系中的坐标 x, y, z 要计算这一点 P 在另一个坐标系中的坐标 x^*, y^*, z^*。这样的坐标转换称为**坐标变换**。可以分为三种情况：平移，旋转和两者的组合。

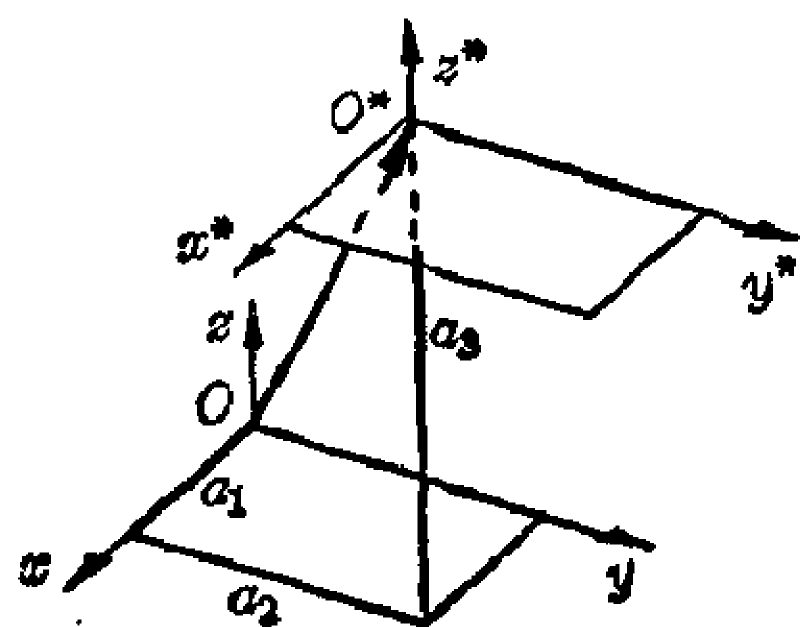


图 11.1-6 坐标系的平移

平移 空间的两个坐标系处于这样的情况，其中的一个坐标系可以借助于**平行移动**与另一个坐标系重合（见图 11.1-6）。

假若第二个坐标系的原点 O^* 关于原点 O 的第一个坐标系的坐标为 a_1, a_2, a_3，那末空间一点 P 关于第一个坐标系的坐标 x, y, z 和关于第二个坐标系的坐标 x^*, y^*, z^* 之间成立如下给定的关系：

$x=a_1+a_{11}x^*+a_{12}y^*+a_{13}z^*$	$x^*=a_{11}(x-a_1)+a_{21}(y-a_2)+a_{31}(z-a_3)$
$y=a_2+a_{21}x^*+a_{22}y^*+a_{23}z^*$	$y^*=a_{12}(x-a_1)+a_{22}(y-a_2)+a_{32}(z-a_3)$
$z=a_3+a_{31}x^*+a_{32}y^*+a_{33}z^*$	$z^*=a_{13}(x-a_1)+a_{23}(y-a_2)+a_{33}(z-a_3)$

导致唯一可解的线性方程组的所有变换叫做**仿射变换**。

所有给定的变换方程都可理解为在该坐标系的固定空间内通过运动(平移、旋转或两者的组合)改变一点坐标的公式。不过，它们也可视为具有固定坐标系的空间作运动的解析表示式。

旋转方程的推导　旋转的方程组可以推导如下。任意一点 P 的向量 $\boldsymbol{x}$ 在第一个坐标系中给定为 $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+k\boldsymbol{z}$，在第二个坐标系中给定为 $\boldsymbol{x}=x^*\boldsymbol{i}^*+y^*\boldsymbol{j}^*+z^*\boldsymbol{k}^*$。若在第一个坐标系中将向量 $\boldsymbol{x}$ 写成形式 $\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|[(x/|\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{i}+(y/|\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{j}+(z/|\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{k}]$，并且首先处理特殊情况，即此向量等于第二个坐标系的 $\boldsymbol{i}^*$ 亦即 $x^*=1,\ y^*=0,\ z^*=0$，那末根据定义有 $x/|\boldsymbol{x}|=a_{11},\ y/|\boldsymbol{x}|=a_{21},\ z|\boldsymbol{x}|=a_{31}$。

从特殊情况 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{j}^*$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}^*$ 得到相似结果。这就给出

$$\boldsymbol{i}^*=a_{11}\boldsymbol{i}+a_{21}\boldsymbol{j}+a_{31}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{j}^*=a_{12}\boldsymbol{i}+a_{22}\boldsymbol{j}+a_{32}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{k}^*=a_{13}\boldsymbol{i}+a_{23}\boldsymbol{j}+a_{33}\boldsymbol{k}。$$

若把这些表达式代入 $\boldsymbol{x}=x^*\boldsymbol{i}^*+y^*\boldsymbol{j}^*+z^*\boldsymbol{k}^*$ 中，结果等于 $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，这就得到上述左边的旋转方程组。类似可得上述右边的方程组。

方向余弦之间的关系。从 $\boldsymbol{i}^*,\ \boldsymbol{j}^*,\ \boldsymbol{k}^*$ 的表达式中得到这些关系式，由于这些向量是单位向量，即 $|\boldsymbol{i}^*|=|\boldsymbol{j}^*|=|\boldsymbol{k}^*|=1$，并且是互相垂直，即 $\boldsymbol{i}^*\boldsymbol{j}^*=\boldsymbol{i}^*\boldsymbol{k}^*=\boldsymbol{j}^*\boldsymbol{k}^*=0$。

方向余弦之间的关系	$a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1$	$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0$
	$a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=1$	$a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33}=0$
	$a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1$	$a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0$

考虑到 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ 是单位向量和互相垂直的事实，能得出进一步的关系；不过可以证明在这些方向余弦之间，只有 6 个*独立的关系*。

因为刻划一个旋转的 9 个方向余弦有 6 个独立的方程相联系着，所以一个旋转可以用*三个量*完全地描述出来。这已由凯莱(Cayley)相当一般地证明了。这也是用两个特别直观的方式表示一个一般的旋转，即用

三个角(欧拉角)或用一根轴和一个角(欧拉定理)表示的根据。

坐标系的旋转。 具有 x, y, z 轴的直角坐标系总能与具有相同原点和 x^*, y^*, z^* 轴的第二个直角坐标系相重合，首先关于 x 轴旋转 φ 角，然后关于 y 轴旋转 ψ 角，最后关于 z 轴旋转 χ 角(见图 11.1-7)。

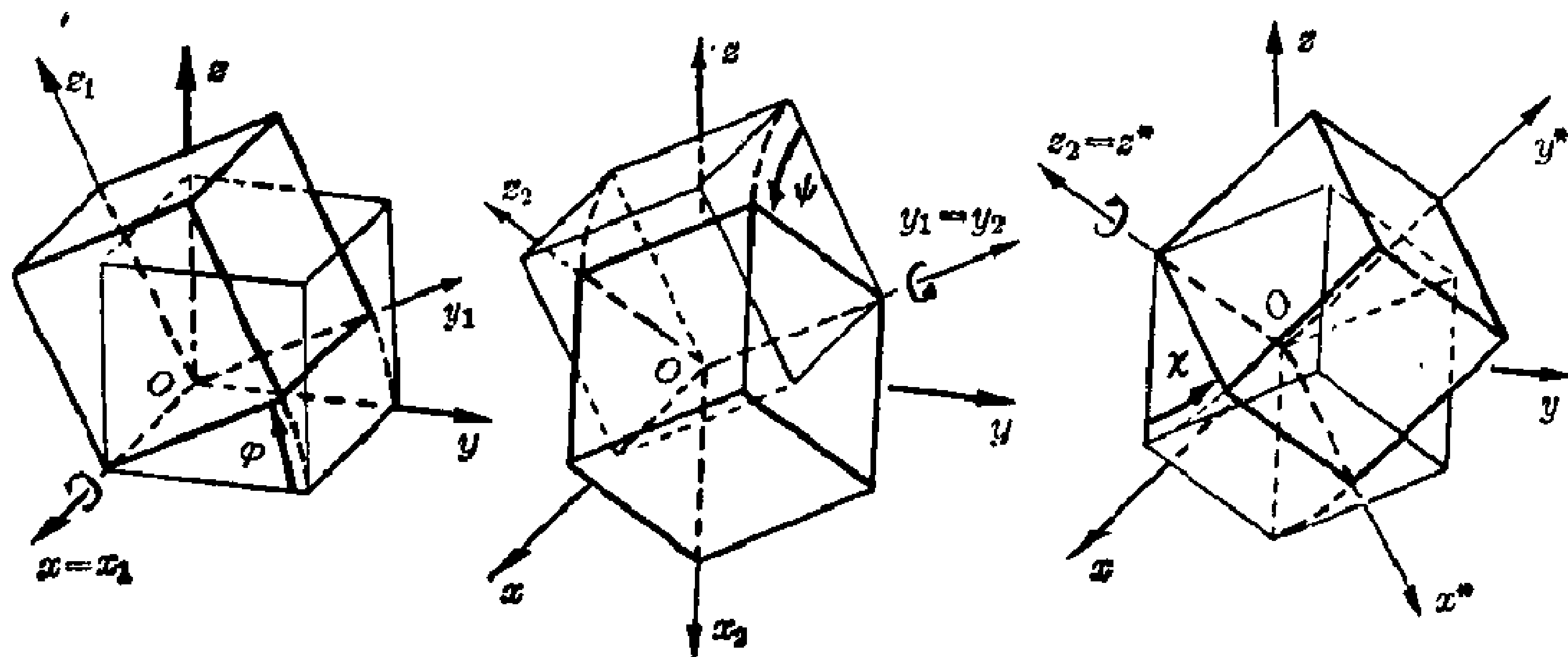


图 11.1-7　坐标系的旋转

方向余弦 a_{ik} 和角 φ, ψ, χ 之间的关系			
a_{ik}	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$i=1$	$\cos\psi\cos\chi$	$-\cos\psi\sin\chi$	$\sin\psi$
$i=2$	$\cos\varphi\sin\chi+\sin\varphi\sin\psi\cos\chi$	$\cos\varphi\cos\chi-\sin\varphi\sin\psi\sin\chi$	$-\sin\varphi\cos\psi$
$i=3$	$\sin\varphi\sin\chi-\cos\varphi\sin\psi\cos\chi$	$\sin\varphi\cos\chi+\cos\varphi\sin\psi\sin\chi$	$\cos\varphi\cos\psi$

旋转的例子　在球心为直角坐标系原点的球面上有一点 $P(-4, 8, -16)$。若把坐标系按逆时针方向绕 x 轴旋转角 $\varphi=30°$，绕 y 轴旋转角 $\psi=45°$，再绕 z 轴旋转角 $\chi=60°$。根据给定的公式得到方向余弦，因而得到 P 点的新坐标。

$$a_{11}=\sqrt{2}/4,\ a_{12}=-\sqrt{6}/4,\ a_{13}=\sqrt{2}/2,$$

$$a_{21}=3/4+\sqrt{2}/8,\ a_{22}=\sqrt{3}/4-\sqrt{6}/8,\ a_{23}=-\sqrt{2}/4,$$

$$a_{31}=\sqrt{3}/4-\sqrt{6}/8,\ a_{32}=1/4+3\sqrt{2}/8,\ a_{33}=\sqrt{6}/4,$$

$$x^*=6-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}\approx 3.97,$$

$$y^*=-4-6\sqrt{2}+2\sqrt{3}\approx -9.02,$$

$$z^*=-4\sqrt{2}-4\sqrt{6}\approx -15.5。$$

下面的定理在力学中非常重要，这里不予证明。

欧拉定理。**假如在空间给出两个具有相同原点和任意轴方向的直角坐标系，则总能指定一条经过原点的直线，通过绕此直线的旋转可将一个坐标系转成另一个坐标系。**

当应用于刚体时，欧拉定理可如下叙述：

对于刚体，它的一点 O 相对于参考系是固定的，假如给定了可能的初始位置和任意别的最后位置，则总能指定经过 O 点的一根轴，通过绕此轴的旋转可把这物体从初始位置转到最后位置。

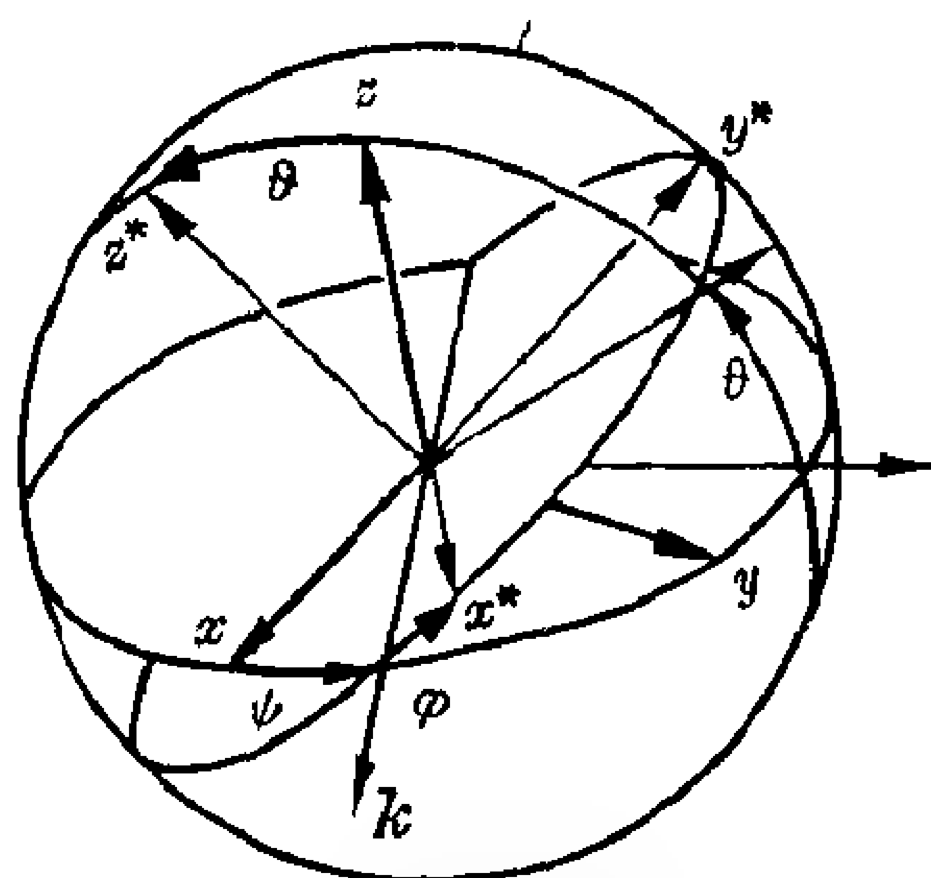


图 11.1-8 欧拉角 ψ, φ, θ

空间固定中心的一个球不可能作这样的运动，使得在运动的终了球面上所有点的位置都不同于它们的原始位置。事实上，或者有两点或者是所有点一定在它们原来的位置上。

任何一个(x, y, z)坐标系总能通过角 ψ, φ, θ 的旋转(见图 11.1-8)而与具有相同原点的另一个(x^*, y^*, z^*)坐标系相重合，其中 k 是 x, y 平面与 x^*, y^* 平面的交线，这些角就叫做欧拉角。

11.2 线性空间

线段

长度和定向 通过两点 P_1 和 P_2 直线上的线段 P_1P_2 是位于 P_1 和 P_2 之间，包括 P_1 与 P_2 的所有点集合(见 **I**. 第 7 章)。如果两个点在有向直线上，如在空间笛卡尔坐标系(见图 11.2-1) 的 x 轴上的 Q_{11} 和 Q_{12}，把线段 $Q_{11}Q_{12}$ 看作有向量或向量，根据它的方向是否同 x 轴的方向一致而取为正向或负向，换句话说，使

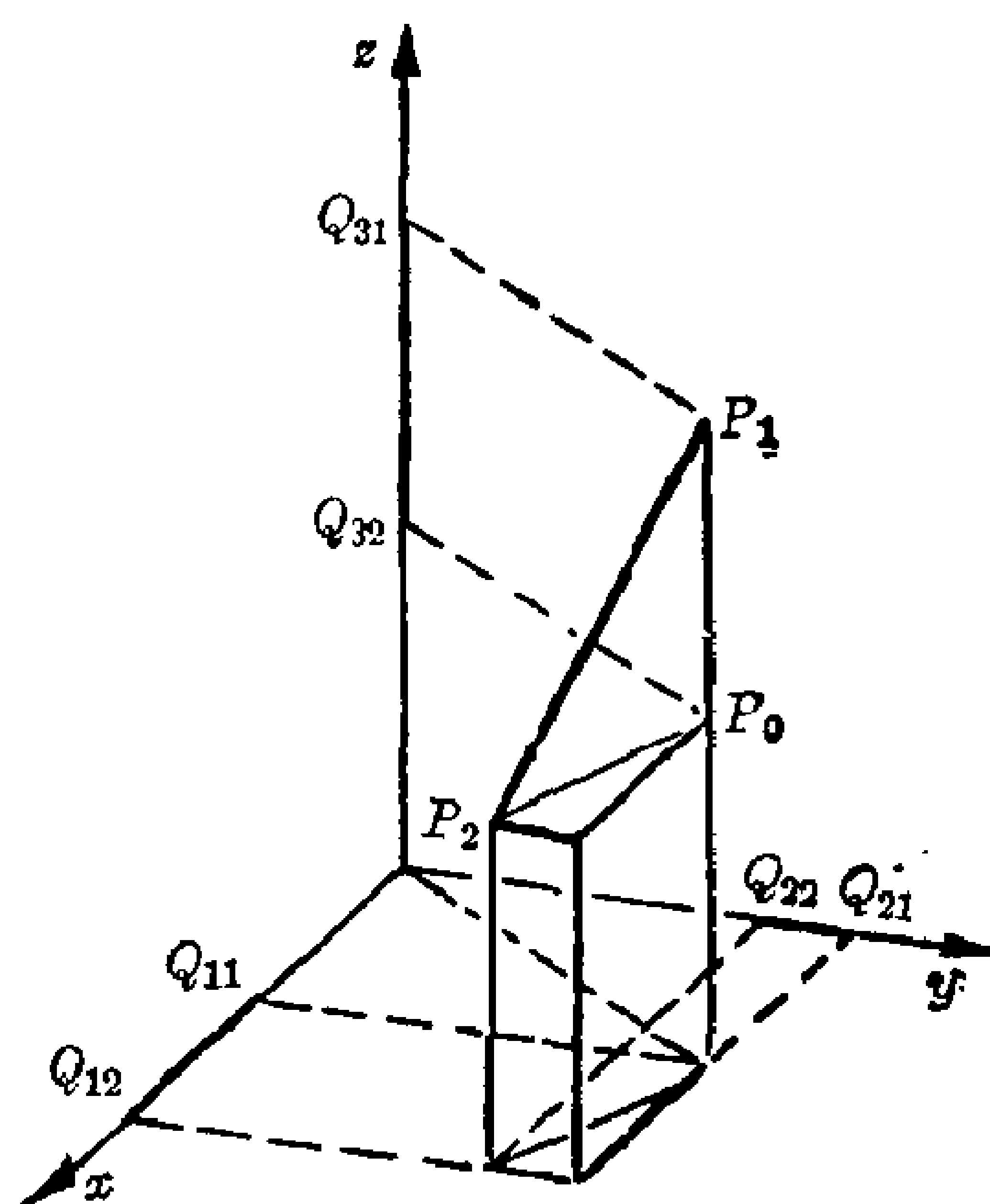


图 11.2-1 空间线段的分量

$$|\overrightarrow{Q_{11}Q_{12}}|=x_2-x_1 \quad 和 \quad |\overrightarrow{Q_{12}Q_{11}}|=x_1-x_2,$$

因而有
$$|\overrightarrow{Q_{11}Q_{12}}| = -|\overrightarrow{Q_{12}Q_{11}}|。$$
用 $|Q_{11}Q_{12}|$ 记这线段的长度。

假如给定空间两点 P_1 和 P_2 的笛卡尔坐标为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2)，那末过 P_1 和 P_2 而平行于坐标平面的三个平面，分别在坐标轴上截出线段 $Q_{11}Q_{12}$, $Q_{21}Q_{22}$ 和 $Q_{31}Q_{32}$，它们就叫做线段 P_1P_2 的分量。假如这线段定向为 $\overrightarrow{P_1P_2}$，那末它的分量是 $\overrightarrow{Q_{11}Q_{12}}$, $\overrightarrow{Q_{21}Q_{22}}$ 和 $\overrightarrow{Q_{31}Q_{32}}$。在直角三角形 $P_0P_1P_2$ 中，可以根据毕达哥拉斯定理计算线段 $|P_1P_2|$ 的长度。

线段 P_1P_2 的长度	$\lvert P_1P_2\rvert = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

【例】 计算点 $P_1(5, 2, -1)$ 和 $P_2(-3, -2, 0)$ 之间线段 P_1P_2 的长度 $|P_1P_2|$ 是
$$|P_1P_2| = \sqrt{(-3-5)^2+(-2-2)^2+(0+1)^2}$$
$$= \sqrt{8^2+4^2+1^2} = \sqrt{81} = 9。$$
线段 P_1P_2 为 9 单位长。

空间任意三点之间的距离满足三角形不等式。

三角形不等式	$\lvert P_1P_3\rvert \leqslant \lvert P_1P_2\rvert + \lvert P_2P_3\rvert$

在定向直线上有向线段的符号在分析上是以它的向量与在定向直线上单位向量的内积得到的：例如，$\overrightarrow{Q_{11}Q_{12}}\cdot \boldsymbol{i} = x_2 - x_1 > 0$ 或 $\overrightarrow{Q_{21}Q_{22}}\cdot \boldsymbol{j} = y_2 - y_1 < 0$。若由两点 P_1 和 P_2 确定的直线有定向 $\overrightarrow{P_1P_2}$，那末它的单位向量是 $\boldsymbol{e} = \overrightarrow{P_1P_2}/|P_1P_2|$。若 Q_1 和 Q_2 是以 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 定向的直线上的任意两点，那末**定向距离** $|\overrightarrow{Q_1Q_2}|$ 根据下面的约定：当定向 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 对应于 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的定向时，$|\overrightarrow{Q_1Q_2}| = +|Q_1Q_2|$，当定向 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 对应于 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 的定向时，
$$|\overrightarrow{Q_1Q_2}| = -|Q_1Q_2|。$$

分割　假设给定的直线以 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 为定向，P 是直线上不同于 P_2 的任意一点。称 P 以比率 $\lambda = |\overrightarrow{P_1P}| : |\overrightarrow{PP_2}|$ 分割定向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$，并且称 λ 为**分割比**。特别地，当 P 位于 P_1 和 P_2 之间时，称为**内分割**：这时 $\lambda > 0$。当 P 落在线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 外边时，称为**外分割**，于是 $\lambda < 0$。线段的中点关于两个端点总有分割比 $\lambda = 1$。

关于定向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的分割点 P 由分割比 λ 唯一确定。若 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 是 P_1 和 P_2 的坐标，那末 P 有坐标 $x = (x_1+\lambda x_2)/(1+\lambda)$, $y = (y_1+\lambda y_2)/(1+\lambda)$, $z = (z_1+\lambda z_2)/(1+\lambda)$。

【例】 $P_1(5, 2, -1)$ 和 $P_2(-3, -2, 0)$ 的有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 按比率 $\lambda=-5$ 分割。分割点的坐标是

$$x=[5+(-5)(-3)]/(1-5)=20/(-4)=-5,$$
$$y=[2+(-5)(-2)]/(1-5)=12/(-4)=-3,$$
$$z=[-1+(-5)(0)]/(1-5)=-1/(-4)=1/4。$$

因为 $\lambda=-5<0$，所以这是外分割。

当一条射线上的若干点平行投影到任何另一条射线上时，这些点的分割比保持不变(见图 11.2-2)。

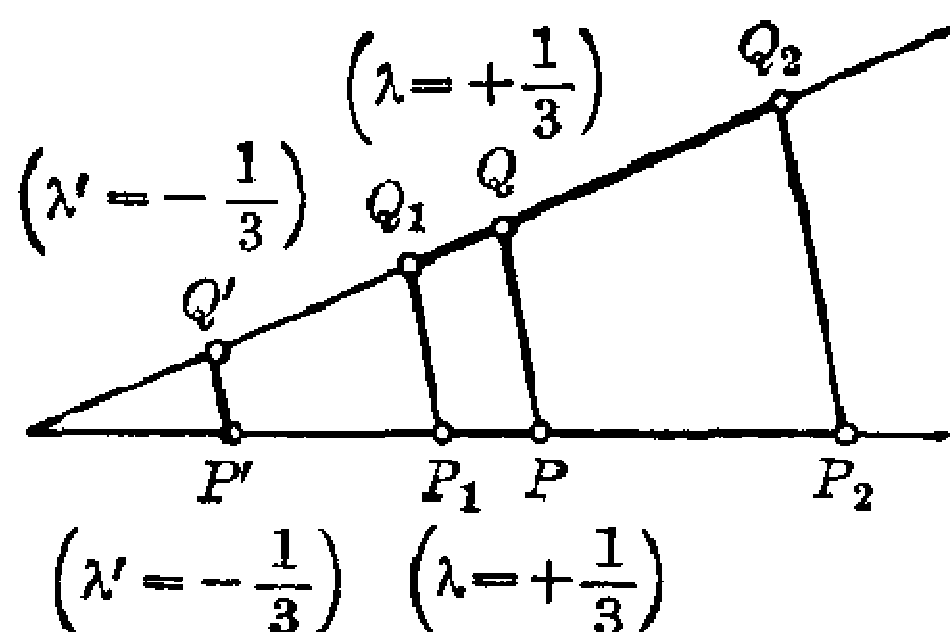


图 11.2-2 在平行投影下分割比保持不变

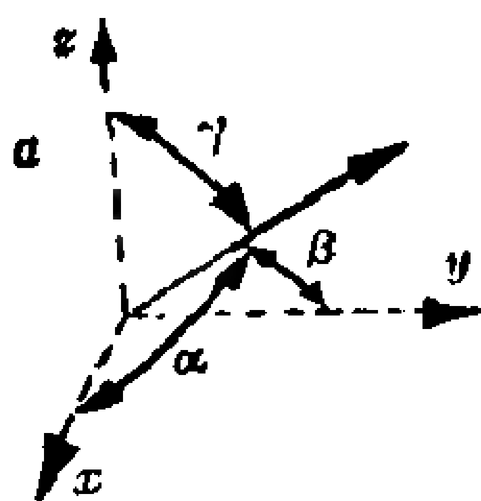


图 11.2-3 直线的方向角

直线

方向余弦。一条定向直线的方向余弦就是角(*方向角*)的余弦，这些方向角是过原点且与给定直线同一方向的平行线与正坐标轴的交角(见图 11.2-3)。这三个角按旋转的方向而有两个不同的值，但是它们的余弦是唯一确定的，因为 $\cos\alpha=\cos(2\pi-\alpha)$。

关系。若具有方向角 α, β, γ(关于 x 轴，y 轴和 z 轴)的一条定向直线通过坐标为 (x_1, y_1, z_1) 的点 P_1; 又设 $P(x, y, z)$ 是这直线上的任意一点，那末 $x=x_1+|\overrightarrow{P_1P}|\cos\alpha$, $y=y_1+|\overrightarrow{P_1P}|\cos\beta$, $z=z_1+|\overrightarrow{P_1P}|\cos\gamma$。这个证明是简单的。首先取一个直角坐标系，以 P_1 点为原点，然后进行平移。由此得出 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=|P_1P|^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$。利用 $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ 的标准公式，就得到定向直线方向余弦之间的基本关系。

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$$

反之，可以把具有 $a^2+b^2+c^2=1$ 的任意三个数 a, b, c 看作空间一条定向直线的方向角余弦。

由两个给定点计算方向余弦。 若 P_1 和 P_2 是空间两点，它们的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2)，那末由下列公式给出从 P_1 到 P_2 的定向直线方向角 α, β 和 γ 的余弦。

$$\cos\alpha=(x_2-x_1)/|P_1P_2|,\ \cos\beta=(y_2-y_1)/|P_1P_2|,$$
$$\cos\gamma=(z_2-z_1)/|P_1P_2|,$$
$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。$$

【例】 确定从 $P_1(5, 2, -1)$ 到 $P_2(-3, -2, 0)$ 的定向直线的方向余弦。有 $\sqrt{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{8^2+4^2+1^2}=9$; 因此

$$\cos\alpha=(-3-5)/9=-\frac{8}{9},\ \cos\beta=(-2-2)/9=-\frac{4}{9},$$
$$\cos\gamma=[0-(-1)]/9=\frac{1}{9}。$$

作为一种检验，这些余弦的平方和为 1。

直线方程 引进向量 $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$。 $\boldsymbol{e}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$, 方程 $x=x_1+|\overrightarrow{P_1P}|\cos\alpha$, $y=y_1+|\overrightarrow{P_1P}|\cos\beta$, $z=z_1+|\overrightarrow{P_1P}|\cos\gamma$ 能写成简单形式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+|\overrightarrow{P_1P}|\boldsymbol{e}$。向量 $\boldsymbol{e}$ 就叫做**方向向量**，它是单位向量。有时用 $\boldsymbol{e}$ 的倍数代替 $\boldsymbol{e}$，于是用字母 $\boldsymbol{a}$ 替代 $\boldsymbol{e}$。

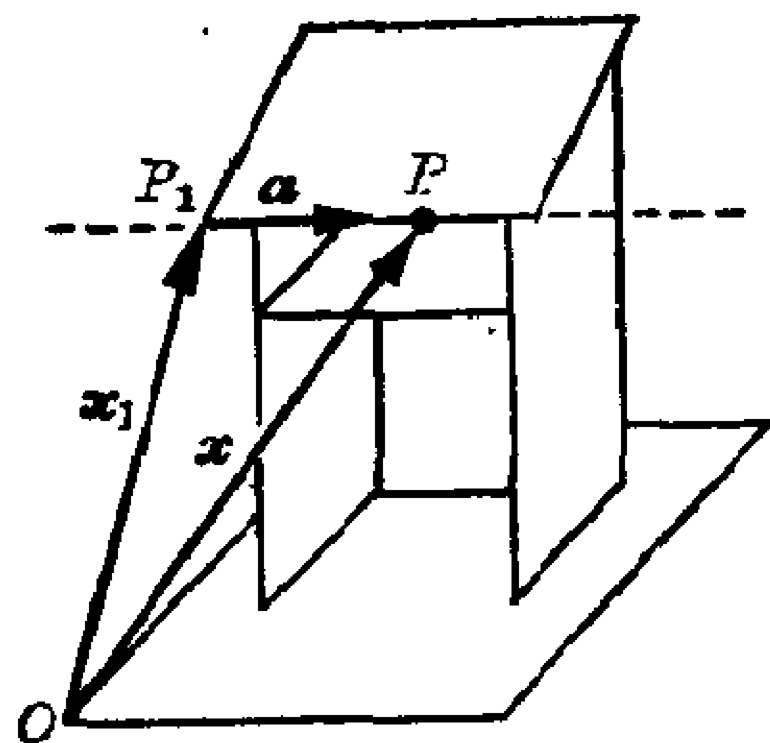


图 11.2-4　直线的点向式

若一般地写为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}$，那末对于给定的 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{a}$，任意一个实数 t 对应于一个向量 $\boldsymbol{x}$，它从原点指向该直线上的一点。当 t 取遍从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的所有实数时，就得到直线上的所有点。反之，对于直线上的任何一点对应于一个数 t，使得向量为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}$ 终止于该点。因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}$ 称为此直线的*点向式*或因 t 叫做参数，所以此式叫做直线的参数表示(见图 11.2-4)。

直线的参数表示	$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}$

对于直线的参数表示来说，重要的仅是在 $(-\infty, +\infty)$ 内的每一个参数值都对应于唯一的点，反之亦然，重要的不是当 t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时所描述的直线走向。因此 $\boldsymbol{a}$ 的方向不起作用，而且 $\boldsymbol{a}$ 也不必是一个单位向量。

【例】 找出前一个例子中直线的点向式。因此认为 P_1 和方向余弦是给定的:

$$\boldsymbol{x}_1=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k} \quad 和 \quad \boldsymbol{e}=-\left(\frac{1}{9}\right)(8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})。$$

所以点向式为

$$\boldsymbol{x}=(5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})-\frac{t}{9}(8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})。$$

若取新的参数 $u=-\frac{t}{9}$, 那末方程是

$$\boldsymbol{x}=(5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})+u(8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})。$$

这仍是给定直线的参数表示,不过它的方向向量不再是单位向量,并且它也不再具有 $\boldsymbol{e}$ 的定向。

给定两点。 若坐标为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 的 P_1 和 P_2 是直线上的两个给定点, 设 $\boldsymbol{x}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{x}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$, 取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$ 为方向向量。如果将这个表达式代入点向式中的 $\boldsymbol{a}$, 那就得到该直线的**两点式**。

直线的两点式	$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+t(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)$

【例】 求过 $P_1(5, 2, -1)$ 和 $P_2(-3, -2, 0)$ 的直线两点式。

从 $\boldsymbol{x}_1=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{x}_2=-3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ 得到 $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=-8\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$。两点式是 $\boldsymbol{x}=(5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})+t(-8\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$, 或选取一个新的参数, $u=-t$, 就有 $\boldsymbol{x}=(5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})+u(8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$。

基本的几何问题 现在推导一些公式, 它们有助于解决更重要的几何问题。

两线的夹角。 称以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}^*$ 为定向的两直线包成角 φ,如果过原点平行于它们且有相同定向的两条直线包成这个 φ 角。根据内积(数量积)的定义,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^*=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}^*|\cos\varphi$。当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^*=0$ 时,两条直线互相垂直。因为 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ 和 $\boldsymbol{e}^*=\boldsymbol{a}^*/|\boldsymbol{a}^*|$, 得到 $\cos\varphi=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*$。

$$\boxed{\cos\varphi=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*}$$

【例】 由 $\boldsymbol{x}=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})+t(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{x}^*=(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})+t^*(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k})$ 给出两条定向直线。如果它们的定向对应于给定的方向向量,那末它们包成多大的角 $\varphi<\pi$? 必须首先使给定的方向向量规范化。这

给出

$$\boldsymbol{e}=(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})/\sqrt{9+16+144}=\frac{1}{13}(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})$$

和

$$\boldsymbol{e}^*=(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k})/\sqrt{9+16}=\frac{1}{5}(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}),$$

这样

$$\cos\varphi=\frac{1}{5\times13}(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})\cdot(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{1}{5\times13}(3\times4-4\times0+12\times3)=48/65\approx0.738\cdots。$$

因此由给定直线包成的角 $\varphi\approx42.4°$，这并不是说那两条直线相交!

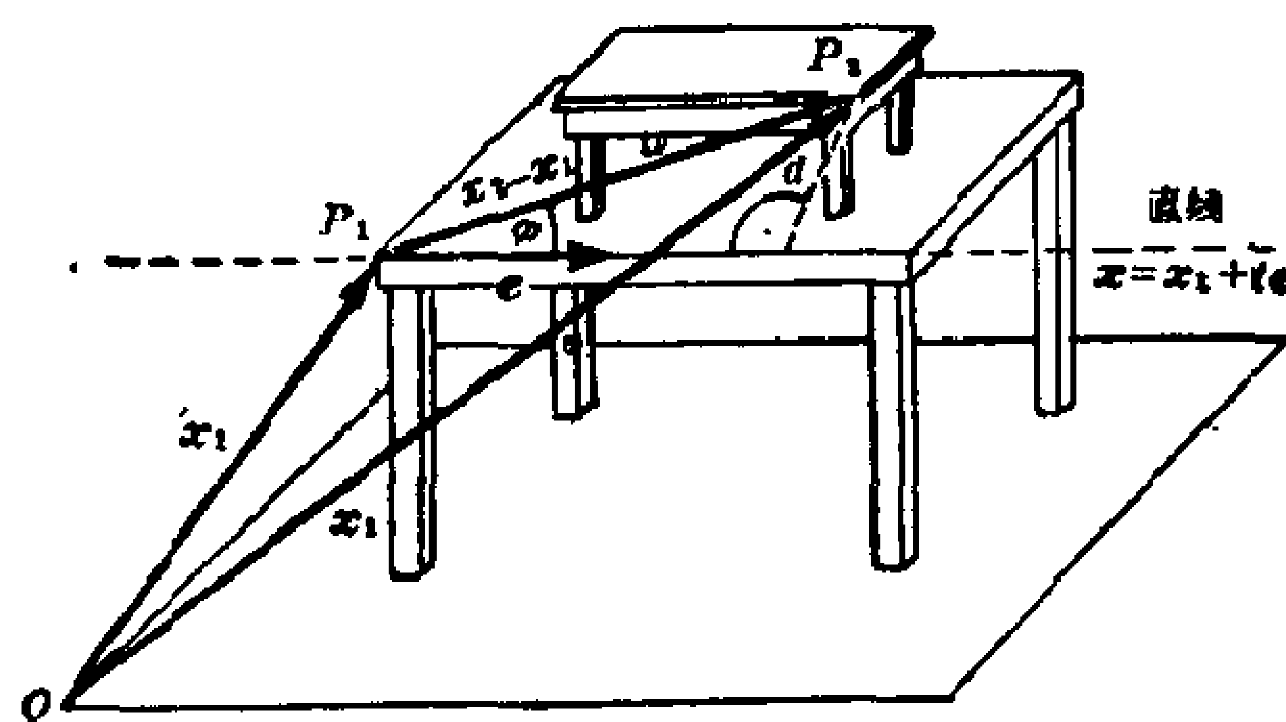


图 11.2-5　点到直线的距离

点到直线的距离。 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{e}$ 是给定直线的方程而 (x_2, y_2, z_2) 是给定点 P_2 的坐标，那末 $\overrightarrow{OP_2}=\boldsymbol{x}_2$ 是确定的，并且 $d=|(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)\times\boldsymbol{e}|$ 是点 P_2 到给定直线的距离，即从点 P_2 到给定直线的垂线长度(见图 11.2-5)。在讨论直线时，按初等观念，将距离看作非负数；在讨论平面时，采取定向距离的概念。

点到直线的距离	$d=\|(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)\times\boldsymbol{e}\|$

证：设 $\varphi\leqslant\pi$ 是由 $\boldsymbol{e}$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 包成的角，于是 $d=|P_1P_2|\sin\varphi$。另一方面，根据向量积的定义 $|\overrightarrow{P_1P_2}\times\boldsymbol{e}|=|P_1P_2|\cdot|\boldsymbol{e}|\sin\varphi$。因为 $|\boldsymbol{e}|=1$，所以 $|P_1P_2\times\boldsymbol{e}|=|P_1P_2|\sin\varphi=d$。又由于 $\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$，就得出如此结论。

【例】 求点 $P_2(3, 1, 5)$ 到直线

$$\boldsymbol{x}=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})+(t/3)(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})$$

的距离。因为 $\boldsymbol{x}_1=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{x}_2=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，由此得出

$$\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}。$$

因此

$$(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)\times\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times\left(\frac{1}{13}\right)(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{1}{13}(52\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-16\boldsymbol{k})。$$

这个向量的长度就是所求的距离

$$d=\frac{1}{13}\sqrt{52^2+9^2+16^2}=\frac{1}{13}\sqrt{2704+81+256}$$
$$=\frac{1}{13}\sqrt{3041}\approx 4.24。$$

点 P_2 到给定直线的距离近似于 4.24 单位。

两条偏斜线之间的距离。两条没有公共点也不平行的直线称为**偏斜**。若 l 和 l^* 是两条偏斜线，那末总能在 l 上确定一点 Q 和在 l^* 上确定一点 Q^*，使得向量 $\overrightarrow{QQ^*}$ 垂直于这两条直线(见 **I**. 第 9 章)。这个向量的长度就是 l 和 l^* 上任意两点所能具有的最短距离，它就叫做这**两条直线之间的距离**。

距离 d 能根据 l 的方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}$ 和 l^* 的方程 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}_1^*+t\boldsymbol{a}^*$ 来计算。存在参数 t_1 使得 $\boldsymbol{x}_1+t_1\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OQ}$ 和参数 τ_1 使得 $\boldsymbol{x}_1^*+\tau_1\boldsymbol{a}^*=\overrightarrow{OQ^*}$。因为 $\overrightarrow{QQ^*}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}^*$，所以 $\overrightarrow{QQ^*}=d\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^*)/|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^*|$。若把这个表达式代入 $\overrightarrow{OQ^*}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QQ^*}$ 中，两边与 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a^*})$ 取数量积，然后解出 d 就得两条偏斜线 l 和 l^* 之间的距离 d。

两条偏斜线之间的距离	$d=\|(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^*)\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^*)\|/\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^*\|$

【例】 对于直线 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+t(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{x}^*=(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+\tau(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ 来说，$\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^*=2\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^*=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，所以给出距离 d 为

$$d=|2\boldsymbol{j}\cdot(-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})|/\sqrt{2^2+2^2}=\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}\approx 1.414。$$

这两条直线之间的距离近似于 1.414 单位。

两条直线相交。空间两条直线一般没有公共点。若两条直线 l 和 l^* 的方程分别为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(\tau)=\boldsymbol{x}_1^*+\tau\boldsymbol{a}^*$，并且(至少)有一公共点，那末(至少)存在一对 t, τ 值使得 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^*(\tau)$。对于这个向量方程相应有两个未知量三个线性方程的系统，一般它没有解。

下边的条件是存在唯一解的充分必要条件，即空间两条直线恰有一个公共点的充分必要条件。

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^*\neq 0 \quad 和 \quad (\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^*)\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^*)=0}$$

第一个条件说明两条直线不平行，因此不会重合。第二个条件直接由两条偏斜线之间的距离公式得出，因为两条相交直线必定距离为零。若

存在两个参数 t 和 τ 是这方程组的唯一解，那末把它们代入直线方程就给出 l 和 l^* 的交点。否则，或者无交点(无解)，或者 l 和 l^* 重合(有无穷多个解)。

【例】 对于直线 $\boldsymbol{x}=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})+t(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{x}^*=(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})+\tau(36\boldsymbol{i}+212\boldsymbol{j}+27\boldsymbol{k})$，发现距离 $d=0$。因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^*\neq 0$，这两条直线就恰有一个交点。于是必定存在 t 和 τ，使得

$$(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})+t(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})$$
$$=(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})+\tau(36\boldsymbol{i}+212\boldsymbol{j}+27\boldsymbol{k}),$$

因此有 $(1+3t-36\tau)\boldsymbol{i}-(8+4t+212\tau)\boldsymbol{j}+(7+12t-27\tau)\boldsymbol{k}=0$。因为一个向量只有当它的各分量都为 0 时，它才是零向量，所以就得到下列方程组，

$$\boxed{\begin{aligned}&3t-36\tau=-1,\\&4t+212\tau=-8,\\&12t-27\tau=-7。\end{aligned}}$$

它有唯一解 $t=-\frac{25}{39}, \tau=-\frac{1}{39}$。若把这些参数值代入直线方程，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 并且这个向量的终点就在两条直线的交点上。这给出

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*=\frac{1}{39}(3\boldsymbol{i}-17\boldsymbol{j}-144\boldsymbol{k})。$$

交点的坐标是

$$x\approx 0.077,\ y\approx -0.436,\ z\approx -3.692。$$

将通过固定点的直线系叫做**线把**。此外，若这些直线全部落在一个平面上，则称之为**线束**，对于定向半直线束叫做**射线束**。

平面

平面方程　空间一平面可以由不在同一直线上的三点确定下来，或者由两点和不与过这两点的直线平行的方向向量确定或者由一点和两个互不平行的方向向量确定。

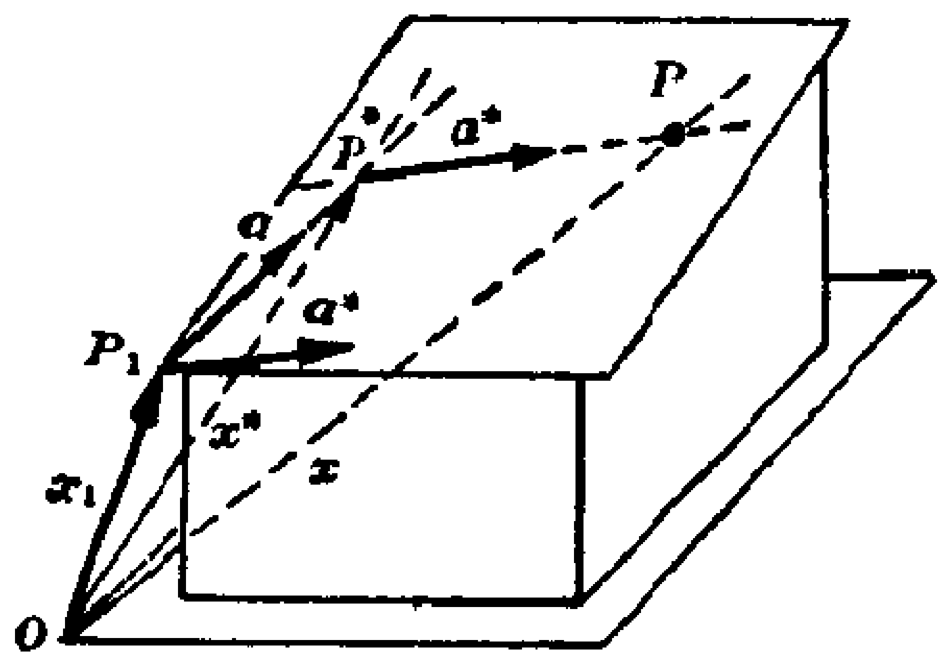


图 11.2-6　平面的参数表示

参数表示。若给出一点 P_1 的坐标 (x_1, y_1, z_1) 和两个不平行的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}^*$。如果向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 记为 $\boldsymbol{x}_1$，那末 $\boldsymbol{x}^*$

$=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}$ 终止于点 P^*，它在由 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{a}$ 所确定的直线上。向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*+\tau\boldsymbol{a}^*$ 终止于点 P，它在由 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}^*$ 所确定的平面上。因此，对于任何一对参数 t，τ，由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}+\tau\boldsymbol{a}^*$ 确定平面上的一点。反之，对于平面上任意一点 P，总存在两个数 t，τ，使得这种表示成立。这就是平面的参数表示(见图 11.2-6)。

平面的参数表示	$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}+\tau\boldsymbol{a}^*$

假如给出两点 P_1，P_2 和一个方向向量 $\boldsymbol{a}$，那末 $\boldsymbol{a}^*$ 可以确定为过 P_1，P_2 直线的方向向量。假如给出三个点，那末过这三点可以引出两条直线，从而算出方向向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}^*$。在每一种情况下，都能得到给定形式的参数表示。

【例】 空间三点 $P_1(0, 1, 1)$，$P_2(1, 0, 1)$ 和 $P_3(1, 1, 0)$ 确定一个平面。问它的参数表示如何？首先，计算两个方向向量，它们不需要规范化，例如

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{P_1P_3}=\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}。$$

若 $\boldsymbol{x}_1=\overrightarrow{OP_1}$，例如 O 是原点，那末这平面的参数表示为

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+u(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})+v(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})。$$

参数记为 u，v。为了得到具有规范化方向向量的表示，引进参数

$$t=u|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}|=u\sqrt{2} \quad 和 \quad \tau=v|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}|=v\sqrt{2}。$$

利用 t 和 τ，有

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+\frac{t}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})+\frac{\tau}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})。$$

一般方程。作为平面的参数表示，给定的向量方程代表下面具体写出来的三个线性方程的组，其中 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}^*=\lambda^*\boldsymbol{e}^*$。

若用 $A=\cos\beta\cos\gamma^*-\cos\beta^*\cos\gamma$ 乘第一式，

用 $B=\cos\gamma\cos\alpha^*-\cos\gamma^*\cos\alpha$ 乘第二式，

用 $C=\cos\alpha\cos\beta^*-\cos\alpha^*\cos\beta$ 乘第三式，

$$\begin{aligned}x&=x_1+\lambda\cos\alpha\cdot t+\lambda^*\cos^*\alpha\cdot\tau\\ y&=y_1+\lambda\cos\beta\cdot t+\lambda^*\cos\beta^*\cdot\tau\\ z&=z_1+\lambda_1\cos\gamma\cdot t+\lambda^*\cos\gamma^*\cdot\tau。\end{aligned}$$

然后加起来，就得到过 P_1 的平面方程 $Ax+By+Cz=Ax_1+By_1+Cz_1$ 或者 $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$。

假如第一种形式中右边的项记作一个常数 $-D$，那末就得到**平面的一般方程**。

平面的一般方程	$Ax+By+Cz+D=0$

空间坐标 (x, y, z) 满足这种形式方程的所有点落在一个平面上，其中 A, B, C，不全为 0。对于每一个平面存在这种类型的方程，使平面上全部点都满足这个方程。更确切地说，对于任意一个平面存在无穷多个这样的方程，因为这样的方程乘以任意一个非零数不会代表不同的平面。因此，A, B, C, D，的实际值不具有几何意义，而只是它们的比率才具有几何意义。

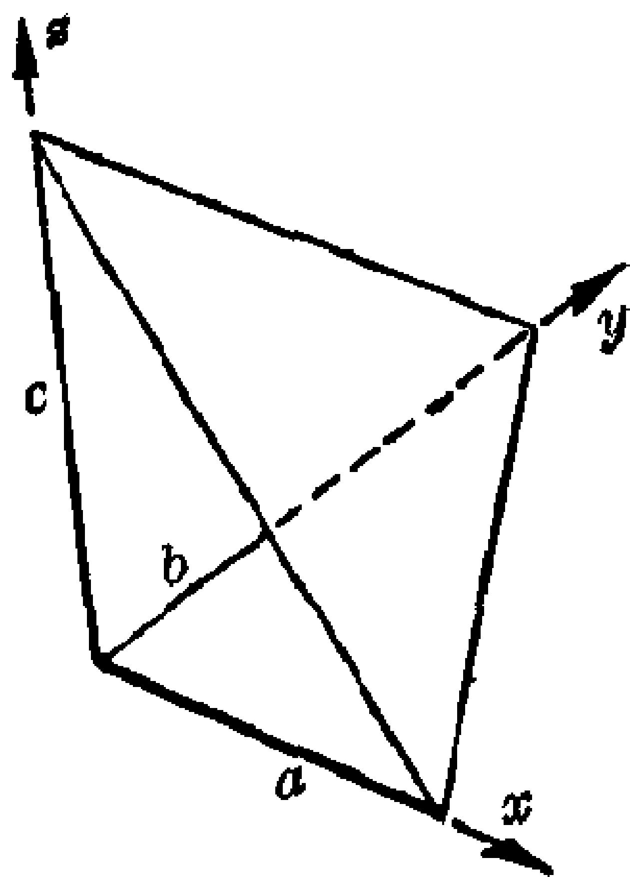


图 11.2-7　平面截距方程

从一般方程，将 D 移到右边，再两边除以 $-D$，并设 $a=-D/A, b=-D/B, C=-D/C$，就得到平面方程的截距形式。这里假定 A, B, C, D 全不为 0；不然就尽量进行相应的运算，找出截距方程(见下面的例子)。从截距方程中，能看出这平面在 x 轴上截出线段 a，在 y 轴上截出线段 b，在 z 轴上截出线段 c(见图 11.2-7)。经过原点的平面没有截距方程。

平面的截距方程	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

【例】若 $\boldsymbol{x}=(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})+\frac{t}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+\frac{\tau}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$ 是平面的参数表示，那末方向向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}^*$ 有方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\alpha^*=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta^*=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma^*=-\frac{1}{\sqrt{3}}。$$

因此，

$$A=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0,$$

$$B=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3},$$

$$C=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3}。$$

所以平面的一般方程是

$$0(x-3)+\frac{2}{3}(y-1)+\frac{2}{3}(z+2)=0$$

或
$$0\cdot x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=-\frac{2}{3}。$$

因而截距方程为

$$0\cdot x-y-z=1 \quad 或 \quad \frac{y}{(-1)}+\frac{z}{(-1)}=1。$$

这平面截 x 轴于“无穷远点”，即它平行于 x 轴。这平面截 y 轴于 $y=-1$，截 z 轴于 $z=-1$。

海赛(Hesse)法式。若一般方程除以 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$，并设

$$A/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=n_1,\ B/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=n_2,$$
$$C/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=n_3$$

以及
$$D/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=p,$$

就得到平面方程的**海赛法式**。

平面方程的海赛法式	$n_1x+n_2y+n_3z+p=0$
向量表示的海赛法式	$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=-p$

引进向量 $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{n}=n_1\boldsymbol{i}+n_2\boldsymbol{j}+n_3\boldsymbol{k}$，就能以十分简单的方式来表示海赛法式。

向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于这个平面，称为该平面的**法向量**，它是单位向量。从平面的一般方程出发，$\boldsymbol{n}$ 的定向由 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 的符号决定。通常取正的平方根，于是位于 $\boldsymbol{n}$ 方向的平面一侧定义为正侧，另一侧定义为负侧，进而讲正半空间和负半空间。平面的定向是在正侧按逆时针方向取为正向。正如定向直线上两点之间的有向距离那样，引进点到定向平面的**有向距离**，并应用如下。原点到给定平面 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=-p$ 的距离是 p。如果 $p>0$，那末原点位于正半空间；如果 $p<0$，则原点位于负半空间。图11.2-8给出了海赛法式的说明。上面的平面表示空间的任意一个平面 E，下面的平面表示过原点且平行于 E 的平面。设 P 是 E 上任意一点，p 是 O 到 E 的距离，$\boldsymbol{n}$ 是 E 的法向量。若 φ 为 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 包成的角，

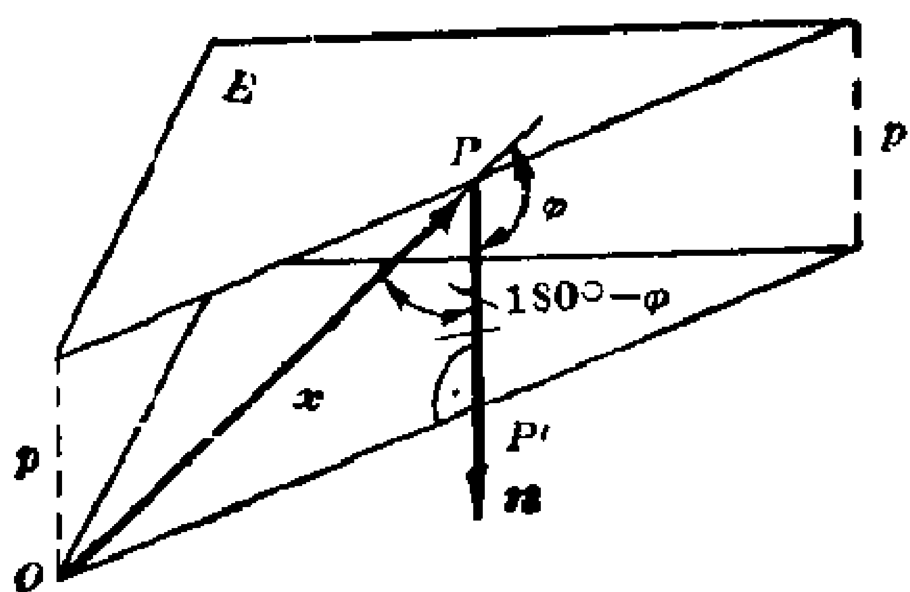


图 11.2-8　平面海赛法式的空间说明

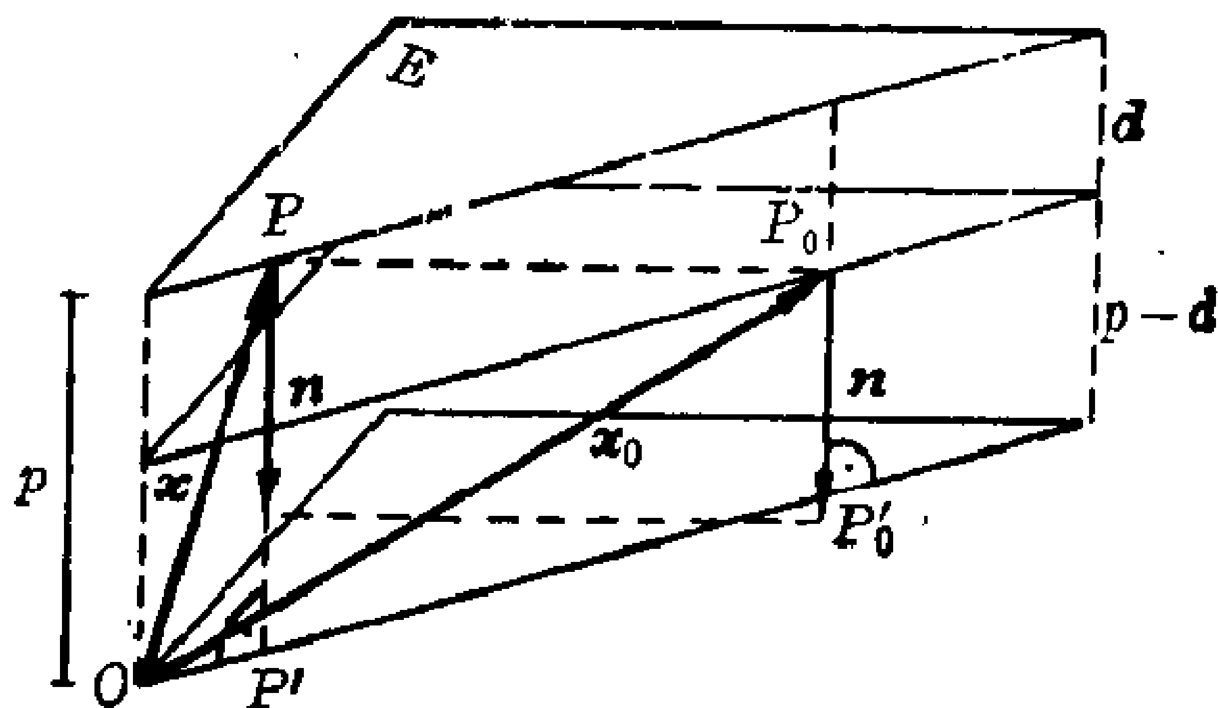


图 11.2-9　点到平面的距离

那末根据内积的定义 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{x}|\cos\varphi$, 再由 $|\boldsymbol{n}|=1$ 得出

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|\cos\varphi=-|\boldsymbol{x}|\cos(180^\circ-\varphi)$$

从直角三角形 OPP' 得出 $|\boldsymbol{x}|\cos(180^\circ-\varphi)=p$, 即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=-p$。

【例】 求上例给定平面的海赛法式。

由 $A=0,\ B=\frac{2}{3},\ C=\frac{2}{3}$ 得出 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$。如果平面的一般方程除以 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, 就得到海赛法式。它是

$$0\cdot x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}=0,$$

或用向量形式为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

基本的几何问题　有一些基本问题利用向量记法求解特别巧妙。

点到平面的距离。 若 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=-p$ 是平面的海赛法式, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是空间任意一点, 那末 $d=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_0+p$ 是 P_0 到这个平面的距离。这从图 11.2-9 很容易看出, 上面的平面表示给定平面 E, 下面的平面表示过 O 点且平行于 E 的平面, 中间的平面是过 P_0 点且平行于 E 的平面。正如对于平面 E 上任意一点 P, 利用三角形 OPP' 得到 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=-p$ 一样, 当 P_0 是空间任意一点时, 利用三角形 OP_0P_0' 得到 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_0=-(p-d)$, 因此有 $d=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}+p$。

点到平面的距离	$d=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_0+p$

【例】 求点 $P_0(3,\ -1,\ 2)$ 到上例给出平面的距离。距离公式给出

$$d=\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(0\times3-1\times1+1\times2)+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\approx1.414。$$

所求的距离近似于 1.414 单位。

两平面之间的角。 若 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=-p$ 和 $\boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{x}=-p^*$ 是两个平面的海赛法式，那末它们之间的角 φ 等于它们的法向量 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}^*$ 之间的角，因此 $\cos\varphi=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*$。特别地，当且仅当 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*=0$ 时，两个平面互相垂直。

$$\boxed{\cos\varphi=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*}$$

【例】 平面 $5x+3y-z=10$ 与 $2x-y+7z=5$ 是否互相垂直？这两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{35}}(5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{n}^*=\frac{1}{\sqrt{54}}(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})$。因此 $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{35}}\cdot\frac{1}{\sqrt{54}}(5\times2-3\times1-1\times7)=0$，即 $\varphi=90°$。所以给定的这两个平面是互相垂直的。

两平面相交。 两个平面只要不平行，它们总相交于一直线。因此，$|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}^*|<1$ 或 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}^*\neq0$ 是两个平面相交的充分必要条件。两个非平行平面总有一条公共线，这就叫做**交线**。因为它垂直于 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}^*$，它的方向向量能表示为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}^*$。如果定出满足两个方程 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=-p$ 和 $\boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{x}=-p^*$ 的任何一个点，那末从这个点和 $\boldsymbol{a}$ 得到交线的参数表示。具体地说，求坐标满足给定方程组的一点，其中 n_1, n_2, n_3 是 $\boldsymbol{n}$ 的分量，n_1^*, n_2^*, n_3^* 是 $\boldsymbol{n}^*$ 的分量。这一点连同方向向量 $\boldsymbol{a}$ 给出交线的点向式。例如若 $n_1n_2^*-n_1^*n_2\neq0$，则

$$\boxed{\begin{aligned}n_1x+n_2y+n_3z&=-p,\\ n_1^*x+n_2^*y+n_3^*z&=\quad p^*。\end{aligned}}$$

$$x=(p^*n_2-pn_2^*)/(n_1n_2^*-n_1^*n_2),$$
$$y=(pn_1^*-p^*n_1)/(n_1n_2^*-n_1^*n_2),$$
$$z=0$$

是上面方程组的一个解（见图 11.2-10）。

包含一公共直线的平面族叫做**平面束**（见图 11.2-11）。必不可少的是 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}^*\neq0$。

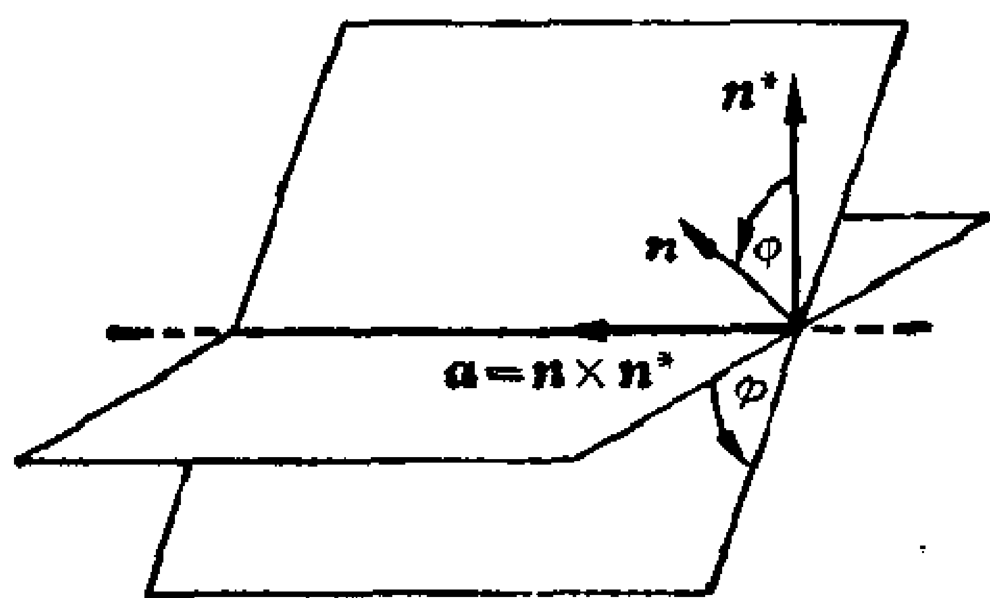


图 11.2-10　两平面交于一直线

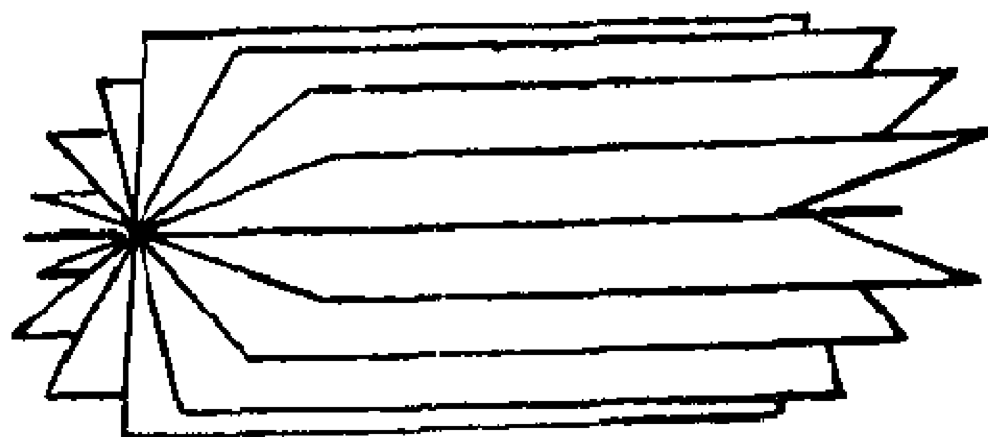


图 11.2-11　平面束

平面束方程	$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}+p)+\lambda(\boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{x}+p^*)=0$

为了证明给定的方程表示一个平面束，引进如下形式$(\boldsymbol{n}+\lambda\boldsymbol{n}^*)\cdot\boldsymbol{x}+(p+\lambda p^*)=0$。首先，对于每一个值 λ，上述方程显然表示一个平面，因此存在无穷多个平面。现在必须证明，所有这些平面有一条公共线。首先考虑由 λ 的两个值 λ_1 和 $\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$所给出的平面，因为 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}^*\neq 0$，所以$(\boldsymbol{n}+\lambda_1\boldsymbol{n}^*)\times(\boldsymbol{n}+\lambda_2\boldsymbol{n}^*)=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}^*)(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$，即这两个平面不平行。因此，它们有一条交线，方向向量为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}^*$。为了建立交线的点向式，必须定出同时满足两个方程$(\boldsymbol{n}+\lambda_1\boldsymbol{n}^*)\cdot\boldsymbol{x}+(p+\lambda_1 p^*)=0$ 和$(\boldsymbol{n}+\lambda_2\boldsymbol{n}^*)\cdot\boldsymbol{x}+(p+\lambda_2 p^*)=0$ 的一个点。因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以能够解出给定的方程组。显然，可以不依赖于 λ_1 和 λ_2 而定出 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{x}$。这意味着由 λ_1 和 λ_2 所给出的两个平面的交线是所有平面的公共线，因而这公共线可用开头给出的方程表达。

$$\boxed{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}+p=0\quad \boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{x}+p^*=0}$$

应当注意到，用给定形式表示的平面束方程不包括过交线的一个平面，即平面 $\boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{x}+p^*=0$。引进齐次参数就能避免这种情况。若 $\lambda=\varkappa^*/\varkappa$，那末方程能写成

$$\varkappa(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}+p)+\varkappa^*(\boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{x}+p^*)=0,$$

而由 $\varkappa=0$, $\varkappa^*=1$ 给出平面 $\boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{x}+p^*=0$。

【例】　求平面束

$[(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}+1]+\lambda[(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}-1]=0$ 交线的点向式。这条交线的方向向量是

$$\boldsymbol{a}=(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})=5\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}。$$

$$\begin{vmatrix} 3x-2y+z=-1 \\ 2x+y-3z=1 \end{vmatrix}$$

作为上面方程组的解得到交线上的一个点。可以代入验证，解是$x=\frac{1}{7}$, $y=\frac{5}{7}$, $z=0$。因此交线的点向式是

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{1}{7}\right)(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j})+t(5\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})。$$

三平面相交 若给出三个平面，那末它们的方程$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}+p=0$, $\boldsymbol{n}^*\boldsymbol{x}+p^*=0$和$\boldsymbol{n}^{**}\cdot\boldsymbol{x}+p^{**}=0$形成$\boldsymbol{x}$的三个分量$x, y, z$三个线性方程组。若这个方程组唯一可解，那末这三个平面恰有一个公共点。下面就是它的充分必要条件。

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_1^* & n_2^* & n_3^* \\ n_1^{**} & n_2^{**} & n_3^{**} \end{vmatrix} \neq 0。$$

否则，这些平面或者没有公共点或者它们有一条公共线或者它们重合。当有两个平面平行或者三个平面中任二平面有不同的平行交线时出现第一种情况。当三个平面属于同一束时出现第二种情况。当所有平面有一个公共点时形成一个**平面把**。

平面把方程	$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}+p)+\lambda_1(\boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{x}+p)+\lambda_2(\boldsymbol{n}^{**}\cdot\boldsymbol{x}+p^{**})=0$

引进齐次参数($\lambda_1=\varkappa^*/\varkappa$, $\lambda_2=\varkappa^{**}/\varkappa$)得到

$$\varkappa(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}+p)+\varkappa^*(\boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{x}+p^*)+\varkappa^{**}(\boldsymbol{n}^{**}\cdot\boldsymbol{x}+p^{**})=0。$$

11.3 二次曲面

主轴

在某些条件下，直角坐标满足形如$F(x, y, z)=0$的方程的所有点集合叫做**曲面**。条件可能是，例如要求函数$F(x, y, z)$关于所有的变量连续。根据所要求的条件，就得到曲面的不同概念。

若$F(x, y, z)$是三个变量x, y, z的线性函数，即具有形式$Ax+By+Cz+D$，其中系数A, B, C不全为零，那末方程$F(x, y, z)=0$表示一个平面。

以后设$F(x, y, z)$是二次函数。于是$F(x, y, z)=0$为二次代数方

程，即如下形式的方程：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0。$$

可用这种形式(其中前面6个系数必须不全为0)方程表示的曲面叫做**二次曲面或二阶曲面**。

在坐标的线性变换下(平移、旋转或两者的组合)，用直角坐标 x, y, z 表示，具有系数 a_{11} 直到 a_{44} 的代数方程变换成用直角坐标 x^*, y^*, z^* 表示，具有系数 a_{11}^* 直到 a_{44}^* 的二阶代数方程。最重要的是事实：**在每一种情况下都能找到一个旋转，使得** $a_{12}^*=a_{13}^*=a_{23}^*=0$。这种变换叫做**主轴变换**。

【例】 在旋转

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}x^*+\frac{\sqrt{2}}{2}y^*,\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x^*+\frac{\sqrt{2}}{2}y^*,\ z=z^*$$

下，方程 $x^2+y^2+z^2+xy-1=0$ 变换成

$$x^{*2}/a^2+y^{*2}/b^2+z^{*2}/C^2-1=0,$$

其中 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{\frac{2}{3}}$，$c=1$。

由于主轴的变换，讨论可用二阶代数方程表示的几何图形，就能归结为讨论如下形式的方程。

$$\boxed{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0}$$

不过，开头三个系数不全为零的方程，一般可以通过坐标变换(事实上通过平移)进一步简化。在具体情况下所需变换的类型以及由此导致的简化后的方程形式，取决于系数的性质。通盘考虑所有可能的情形，达到这样的结果：任意一个二阶方程总能化为17种不同类型的特殊方程中的一种特殊方程，而每一种方程至多由四项组成。

其中的三种方程具有下列形式

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2+1=0,\ x^2/a^2+y^2/b^2+1=0,\ x^2/a^2+1=0,$$

这里的 a, b, c 不为零。这些方程没有实数解，因此不表示一个几何图形。其他14种方程表示14种不同的几何图形。下列9种是**退化二次曲面或非正常二次曲面**：

1. $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=0$，这是一点(0, 0, 0)。
2. $x^2/a^2+y^2/b^2=0$，这是一条直线，即 z 轴。

3. $x^2/a^2=0$, 这是一个平面,即 y, z 平面。

4. $x^2/a^2=1$, 这是平行于 y, z 平面,距为 $x=\pm a$ 的两个平面。

5. $x^2/a^2-y^2/b^2=0$, 这是两个平面, 它们以直角与 x, y 平面相交成直线 $y=\pm(b/a)x$。

6. $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, 这是一个柱面, 它被垂直于 z 轴的平面截成双曲线; 这些双曲线平行且合同于 x, y 平面上的双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$。

7. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, 这是一个柱面, 它被垂直于 z 轴的平面截成椭圆; 这些椭圆平行且合同于 x, y 平面上的椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, 若 $a=b$, 则椭圆就是圆。

8. $x^2-2py=0$, 这是一个柱面,它被垂直于 z 轴的平面截成抛物线, 这些抛物线平行且合同于 x, y 平面上的抛物线 $x^2-2py=0$。

9. $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$, 这是一个双锥面,它被垂直于 z 轴的平面截成椭圆(当 $b^2=a^2$ 时,即为圆)。

这些图形或者在通常意义下不是曲面(1 和 2), 或者它们化为一个平面(或两个平面), 实在是一阶曲面(3 到 5), 或者它们能展成平面(6 到 9)。

最后,还剩下 5 种几何图形,叫做**真二次曲面**。

真二次曲面

分类　经过主轴变换后,坐标系的轴就是曲面的主轴方向。曲面特征取决于特异主轴(或者这种轴存在, 或者取哪一根主轴都无所谓)以及被垂直于此主轴的平面所截的曲面截线。

按照第一截线是椭圆还是抛物线或双曲线,称这曲面为**椭面**、**抛物面**或**双曲面**。

如果必须进行区别, 那末第二截线的形状确定形容词**椭圆的**或**双曲的**。不用形容词抛物的, 因为不存在真二次曲面具有抛物的横截线。

椭圆截线和圆截线就不加区别。因此椭面可以是一个球面, 椭圆抛物面可以具有圆横截线。对于双曲面, 另一个区别是本质的。就是要区分**单叶**双曲面和**双叶**双曲面。

总共存在 5 种真二次曲面,它们称为椭面,椭圆抛物面、双曲抛物面、单叶双曲面和双叶双曲面。

椭面　在直角坐标系下,椭面方程的最简单形式为:

椭面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

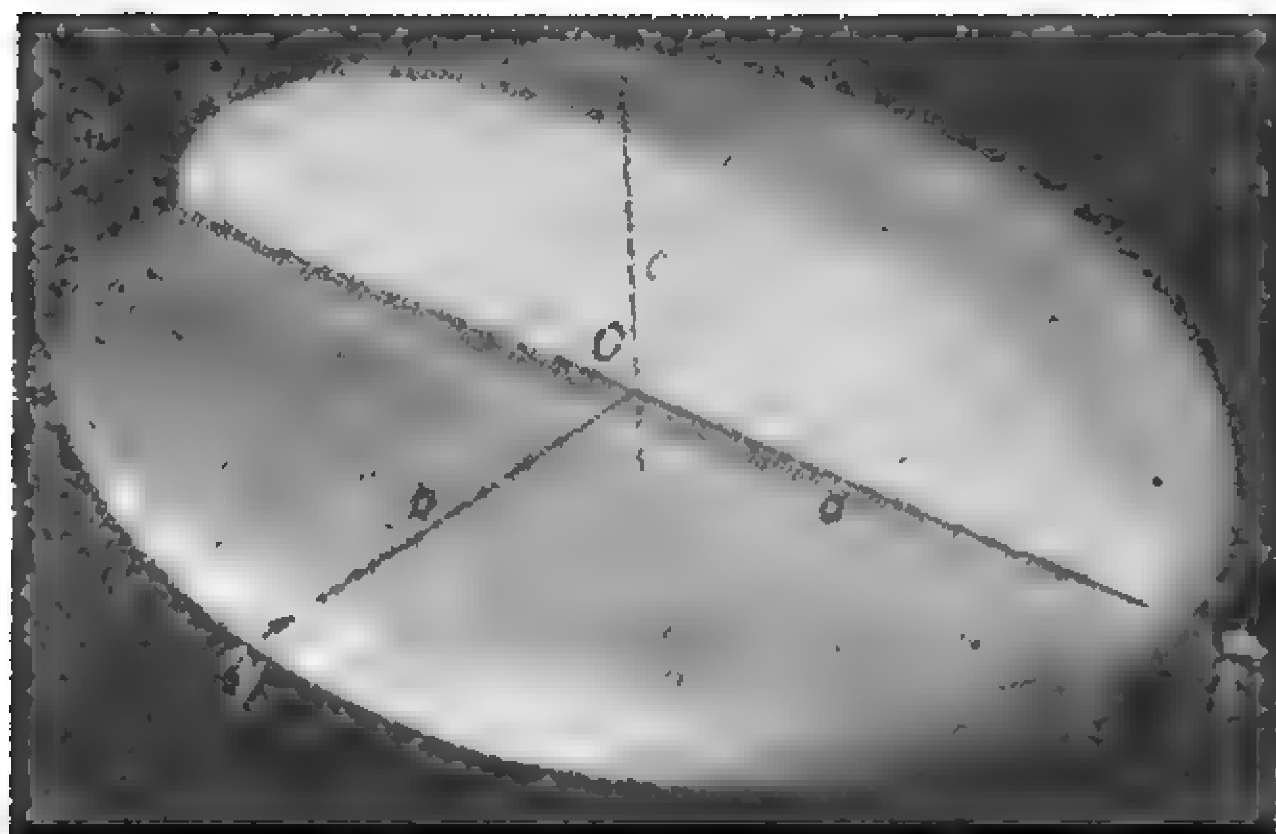


图11.3-1　三轴椭面

这里a,b,c是椭面半主轴的长度(见图11.3-1)。若$a=b=c$，则椭面就是球面。若a, b, c中有两个相等，则称**旋转椭面**或**双轴椭面**。如果两根相等轴比第三根轴短，那末它是**伸长**(扁长)的；如果两根相等轴比第三根轴长，那末它是**伸平**(扁平)的。要是数a,b, c全都不同，就称为**三轴椭面**。

由上述方程所表示的几何图形是连通的有限曲面，它关于三个坐标平面对称。曲面的每一个平面截线是椭圆，每一条过原点连结曲面上两点的线段(**直径**)被原点平分。由于这个性质，原点就叫做椭面的**中心**，而椭面称为**中心曲面**。

任何一个椭面可以变换成旋转椭面，这只要在一个坐标轴方向上，按常数比率扩大或缩小坐标(**仿射畸变**)，反过来，任何一个椭面能由旋转椭面形成。若在两个坐标轴方向上按常数比率适当地变更坐标，就形成球面。

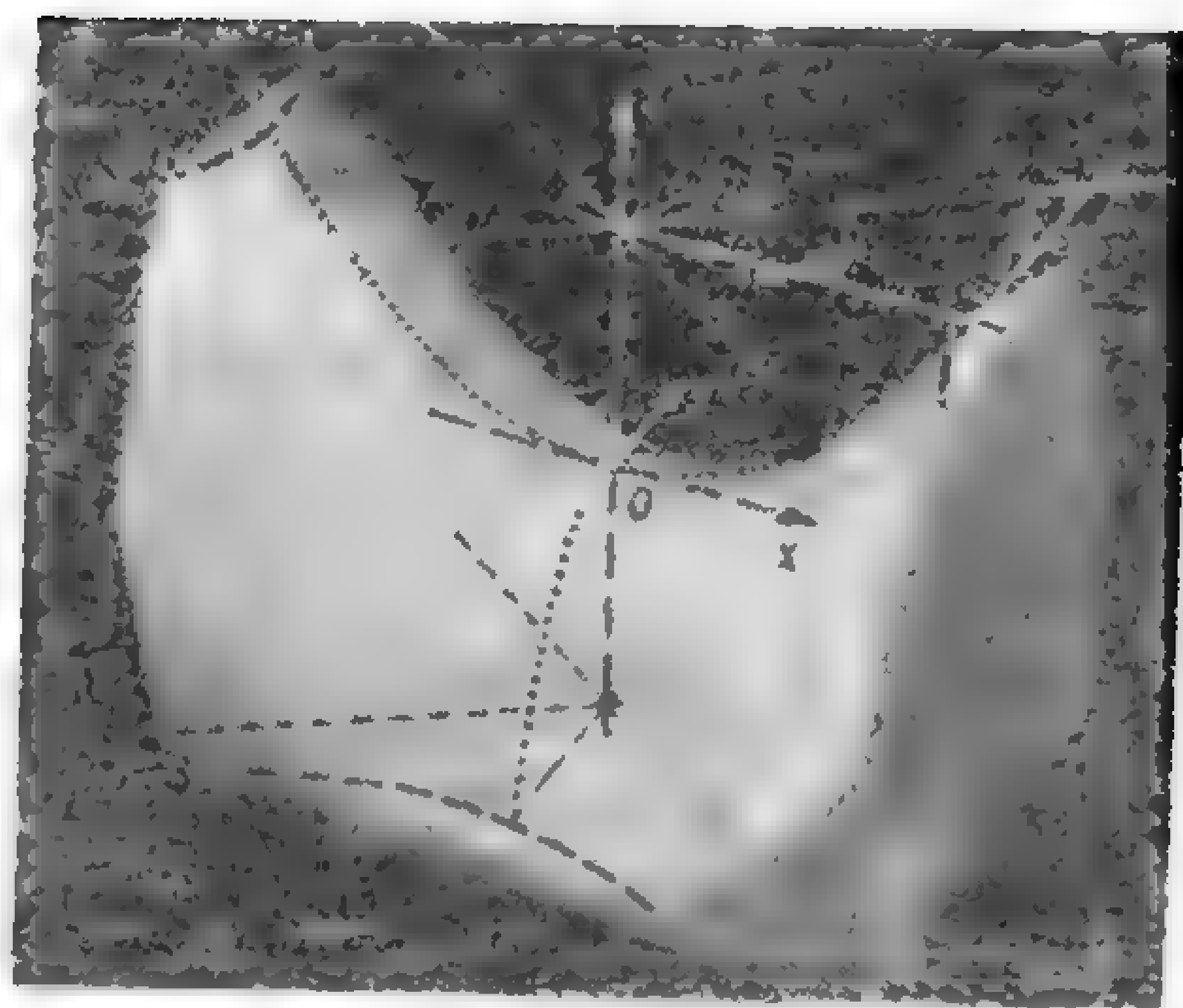
椭圆抛物面　椭圆抛物面三个主轴中的一根主轴是特异的。在直角坐标系中，z轴方向是特异主轴方向，方程最简单的形式如下。

椭圆抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$

这里a和b是由平行于x, y平面，距为$z=\frac{1}{2}$的平面所截的椭圆主轴的一半长度(见图11.3-2)。另一种说明方式：a^2是椭圆抛物面为x, z平面所截的抛物线的半参数。类似地，b^2是被y, z平面所截的抛物线的半参数。若$a=b$，则椭圆抛物面就是**旋转抛物面**。

上面方程所表示的几何图形是在x, y平面所确定的正半空间内的连通无限曲面，它关于x, z平面和y, z平面对称。该曲面被每一个平行于z轴的平面所截的截线都是抛物线，被每一个垂直于z轴(交于正侧)


图 11.3-2 椭圆抛物面


图 11.3-3 双曲抛物面

的平面所截的截线是椭圆。这 z 轴就简称为**轴**，原点叫做**顶点**。该曲面没有中心。

借助于 x 或 y 方向上的仿射畸变，可以把椭圆抛物面变换成旋转抛物面，反过来，任何椭圆抛物面能由旋转抛物面形成。

双曲抛物面 双曲抛物面的一个主轴是特异的。在直角坐标系中，z 轴方向就是特异主轴的方向，这方程最简单的形式如下。

双曲抛物面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$

这里 a 和 b 是由平行于 x, y 平面，距为 $z=\frac{1}{2}$ 的平面所截的双曲线主轴的一半长度(见图 11.3-3)。另一种说明方式：a^2 是由 x, z 平面所截的抛物线的半参数，类似地，b^2 是由 y, z 平面所截的抛物线的半参数。

由上面方程所表示的几何图形是位于每一个卦限内的连通无限曲面。它关于 x, z 平面和 y, z 平面对称。该曲面被平行于 z 轴的平面所截的截线是抛物线，被垂直于 z 轴且不过原点的平面所截的截线是双曲线；若双曲线所在平面在正侧与 z 轴相交，则双曲线的顶点落在平行于 x 轴的直线上，若双曲线所在平面在负侧与 z 轴相交，则双曲线的顶点落在平行于 y 轴的直线上。x, y 平面截此曲面成一对直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ 和 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$。过其中一条直线和 z 轴的平面，截垂直于 z 轴的平面成相应双曲线的渐近线，z 轴简称为**轴**，原点叫做双抛物面的顶点，它是一个**鞍点**。该曲面没有中心。

双曲抛物面是仅有的一个不能成为旋转曲面的真二次曲面，不能通过仿射畸变而成为旋转曲面。本质的原因是没有一个平面能把它截成椭圆。

还有一些形成双曲抛物面的有趣方法；其中之一是将一条下凸的抛物线沿着一条上凸的抛物线平移而成。由于这个缘故，双曲抛物面当作**平移曲面**。

最后，双曲抛物面能由直线族产生。若把上面的方程写成形式$(x/a+y/b)(x/a-y/b)=2z$，并设$z/(x/a-y/b)=u$和$2/(x/a-y/b)=v$，那末能从双曲抛物面方程导出下列两对方程：

1．$(x/a+y/b)=2u$，$(x/a+y/b)=vz$，

2．$(x/a-y/b)=z/u$，$(x/a-y/b)=2/v$。

每一个方程表示一族平面，每一对方程确定一族直线。这些直线族落在双曲抛物面上。这些直线是双曲抛物面的**母线**（见图11.3-4）。

由直线族产生的曲面叫做**直纹曲面**。在二阶曲面中，椭圆柱面、抛物柱面和双曲柱面、双锥面、双曲抛物面和单叶双曲面都是直纹曲面。

因为柱面和锥面能展开成平面，所以称为**可展曲面**。双曲抛物面的例子表明，并不是每一个直纹曲面都是可展的。单叶双曲面也不是可展的。

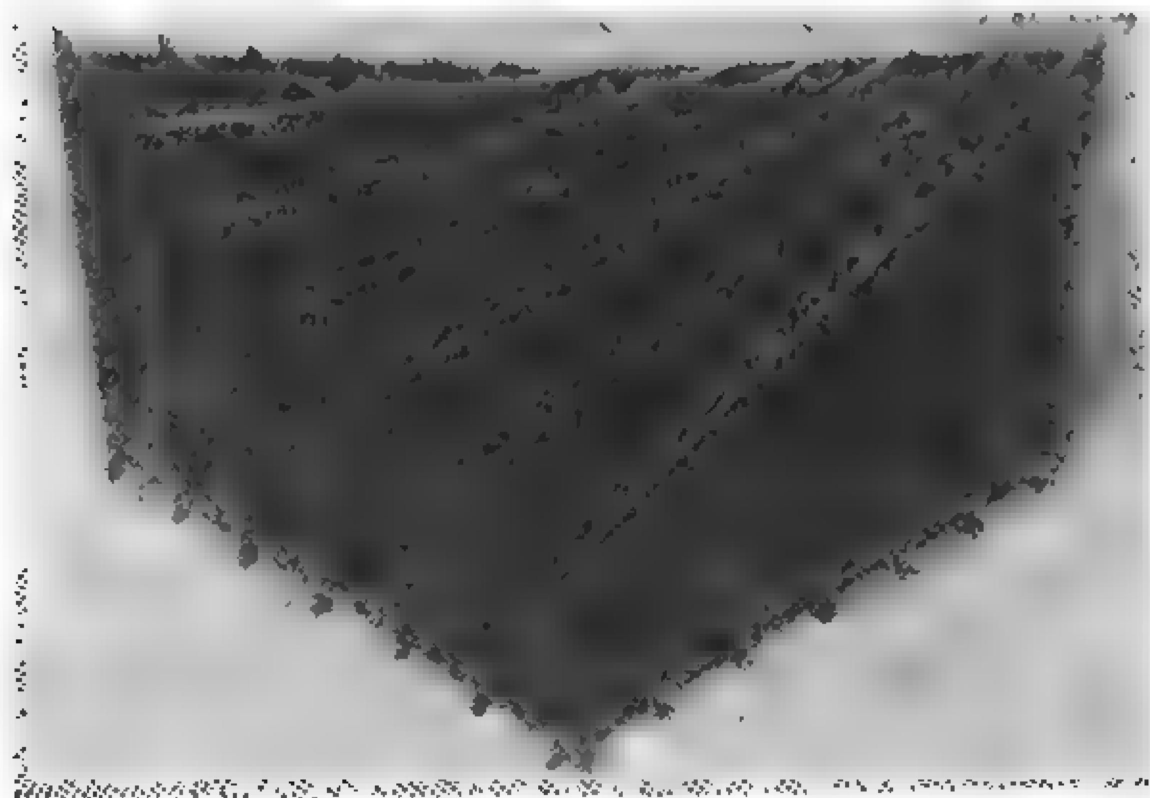


图11.3-4　具有两族母线的双曲抛物面

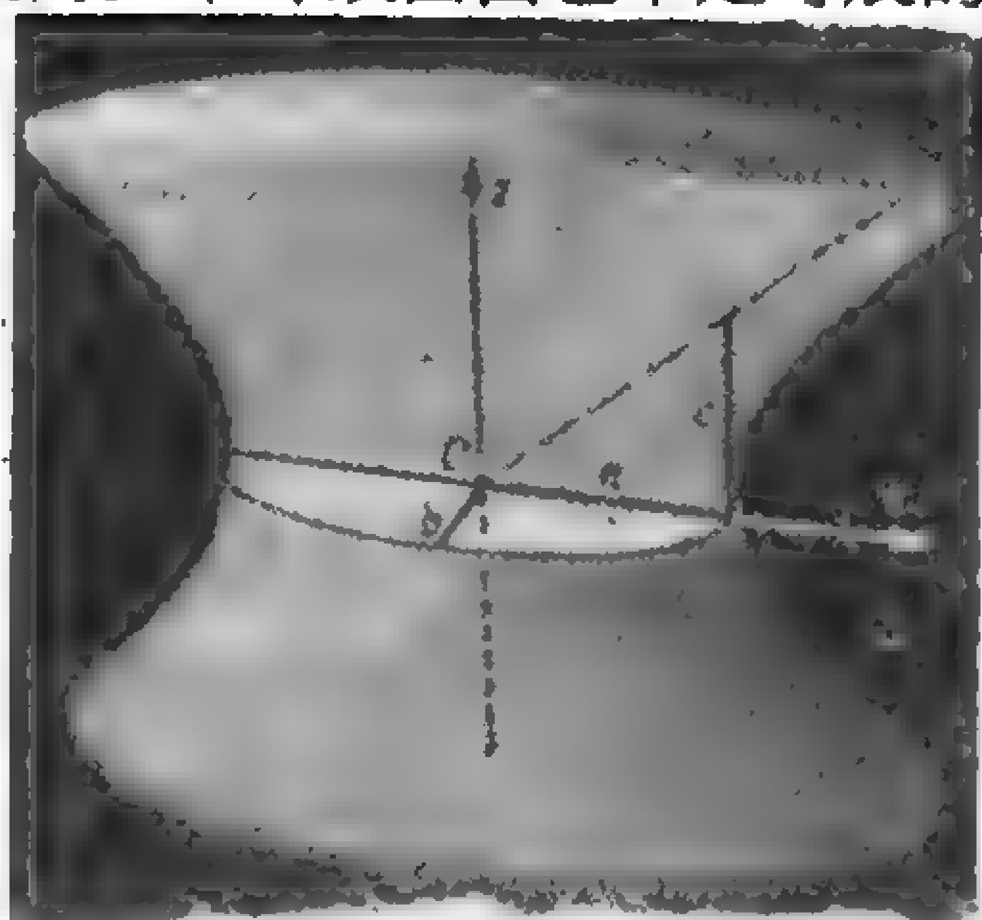


图11.3-5　单叶双曲面

单叶双曲面　单叶双曲面的三根主轴中有一根是特异的，在直角坐标系，z轴方向就是特异主轴方向，方程最简单的形式如下：

单叶双曲面方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

这里，a和b是由x，y平面所截的椭圆主轴的一半长度。类似地，b和c

是由 y, z 平面所截的双曲线主轴的一半长度(图 11.3-5)。若 $a=b$, 则单叶双曲面是一个**旋转单叶双曲面**。

由上面方程所表示的几何图形是位于每一个卦限内的连通无限曲面，它关于三个坐标平面对称。该曲面被每一个平行于 z 轴的平面截成**双曲线**，被垂直于 z 轴的平面截成**椭圆**。z 轴简称为轴。原点是中心，因此，单叶双曲面是一个中心曲面。

通过 x 方向或 y 方向的仿射畸变，可以把单叶双曲面变换成旋转双曲面，反过来，单叶双曲面可以由旋转双曲面形成。

单叶双曲面也能由直线族生成。若把上面的方程写成如下的形式：$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=(1+y/b)(1-y/b)$, 并设 $(1-y/b)/(x/a-z/c)=u$, 和 $(1+y/b)/(x/a-z/c)=v$, 那末从单叶双曲面方程能导出两对方程：

1. $x/a+z/c=u(1+y/b),\ x/a+z/c=v(1-y/b)$,
2. $x/a-z/c=(1-y/b)/u,\ x/a-z/c=(1+y/b)/v$。

每一个方程表示一族平面，每一对方程表示一族直线。这些直线是单叶双曲面的**母线**。因此，单叶双曲面是一个**直纹曲面**(见图 11.3-6)。由于这一性质，两个单叶双曲面可象两个锥面一样，在工程技术中，用于将关于一根轴的旋转传动成关于另一个任意方向轴的旋转(双曲嵌齿轮，见图 11.3-7)。



图 11.3-6 具有两族母线和渐近锥面的单叶双曲面

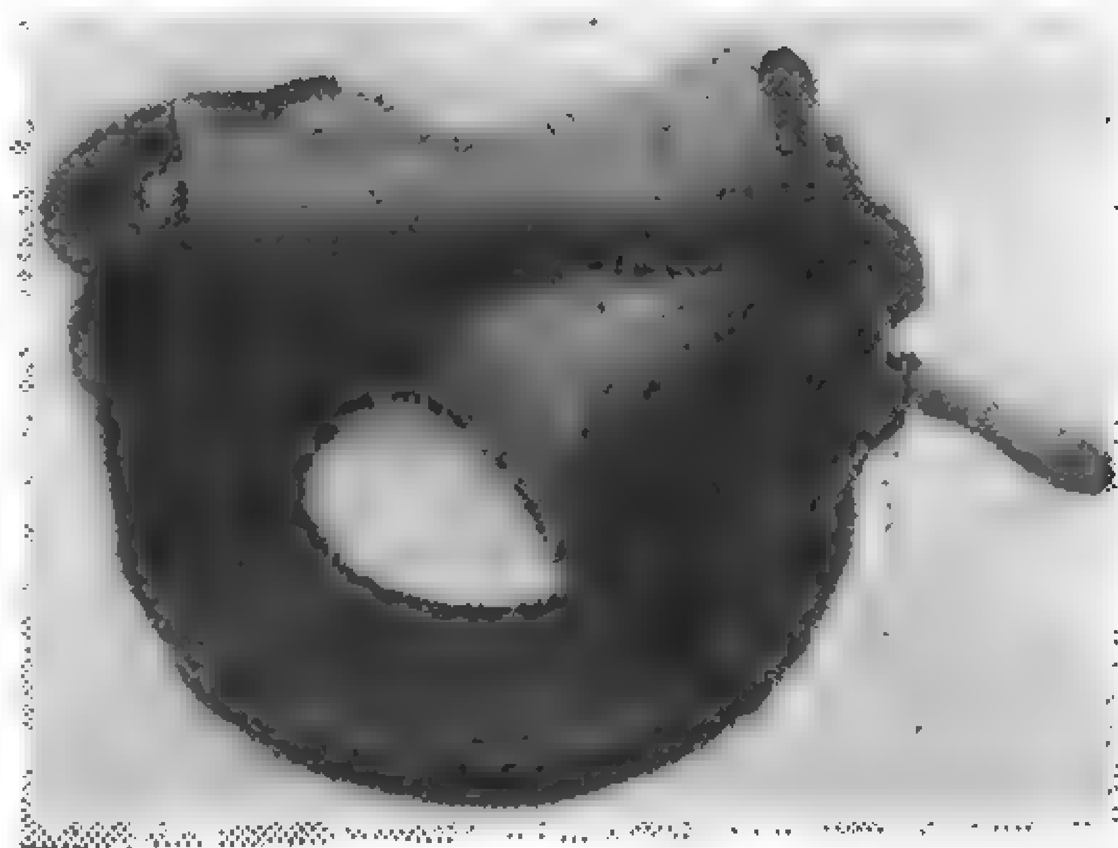


图 11.3-7 用两个单叶双曲面作成的旋转传动模型

若把母线平移成过原点，那末它们就形成单叶双曲面的渐近锥面。它的方程是 $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$。

双叶双曲面　双叶双曲面的三个轴中有一根主轴是特异的。在直角坐标系下，z 轴方向是特异主轴方向。方程最简单的形式如下：

双叶双曲面	$\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

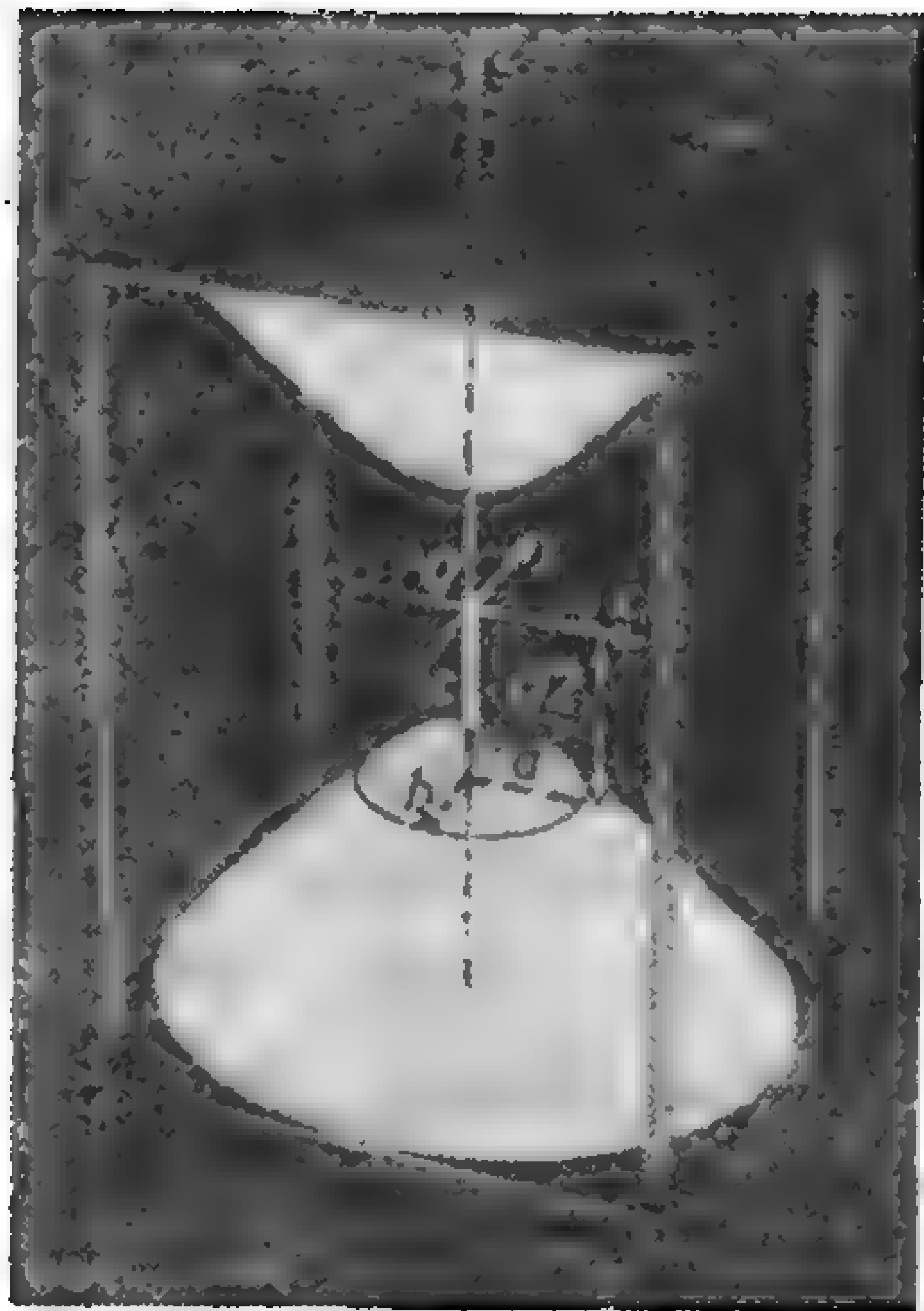


图 11.3-8　双叶双曲面

这里 a 和 b 是双叶双曲面被平行于 x, y 平面，距为 $z=\pm c\sqrt{2}$ 的平面所截的椭圆主轴的一半长度。同样，c 和 a 是由 x, z 平面所截的双曲线主轴的一半长度；c 和 b 是由 y, z 平面所截的双曲线的一半长度(图 11.3-8)。若 $a=b$，则双叶双曲面是一个**旋转双叶双曲面**。由上面方程表示的几何图形是无限的不连通曲面，它由两部分组成，分别在各个卦限内。这两部分关于坐标平面对称，被任一平行于 z 轴的平面截成一条**双曲线**。当 $|z|>c$ 时，被任一垂直于 z 轴的平面截成一个**椭圆**。z 轴简称为轴，原点是双叶双曲面的中心，因此它是一个中心曲面。通过 x 方向或 y 方向的仿射畸变，可以把双叶双曲面变换成旋转双曲面。反过来，双叶双曲面能由旋转双曲面生成。如同单叶双曲面一样，它也存在一个渐近锥面。

第12章 射影几何

射影几何研究那些射影不变的几何图形的性质。在绘画和建筑学中的透视法研究推动了这门学科的发展。接着主要由蒙日(Gaspard Monge, 1746～1818年)提出的画法几何,彭赛列(Victor Poncelet, 1788～1867年)在他的"图形的射影性质论文"中给出了射影几何的最初轮廓。射影几何的*解析方法*主要是由麦比乌斯(August Ferdinand Möbius, 1790～1868年)和普吕克(Julius Plücker, 1801～1868年)引进的,而斯坦纳和斯托特(Christian von Staudt, 1798～1867年)不用这些方法发展了射影几何。这种*综合方法*的起源可以追溯到帕普斯的工作,他参照阿波罗尼斯(Apollonius, 公元前265～180年)失传的工作而引进了交比。克莱因(Felix Klein, 1849～1925年)阐明了射影几何和欧几里得几何之间的联系。他还引进几何观念作为一定映射群的不变量理论。

12.1 射影几何的基本元素

非正常元素 一般地,平面上两条直线之间的*平行射影*是将一条直线上所有点一一到上地映成另一条直线的所有点。在*中心射影*或*透视性*中,两条直线 l_1 和 l_2 上点之间的对应是由过一点中心 C 的直线 p 来确定的;例如,若 P_1 是 l_1 上一点,则直线 $p_1=(CP_1)$ 与直线 l_2 相交于 P_2,它就是 P_1 的象(见图12.1-1)。这个映射并不覆盖 l_1 和 l_2 的全部点:对于点 P 有 $p_0=(CP)\parallel l_2$,不对应于 l_2 上的点;对于点 Q 有 $\bar{p}=(CQ)\parallel l_1$,不对应于 l_1 上的点。为了保持一一映射,对平面的*正常点*附上平面直线的一切方向作为*非正常点*;于是点 P 的象即 l_2 的方向,Q 的

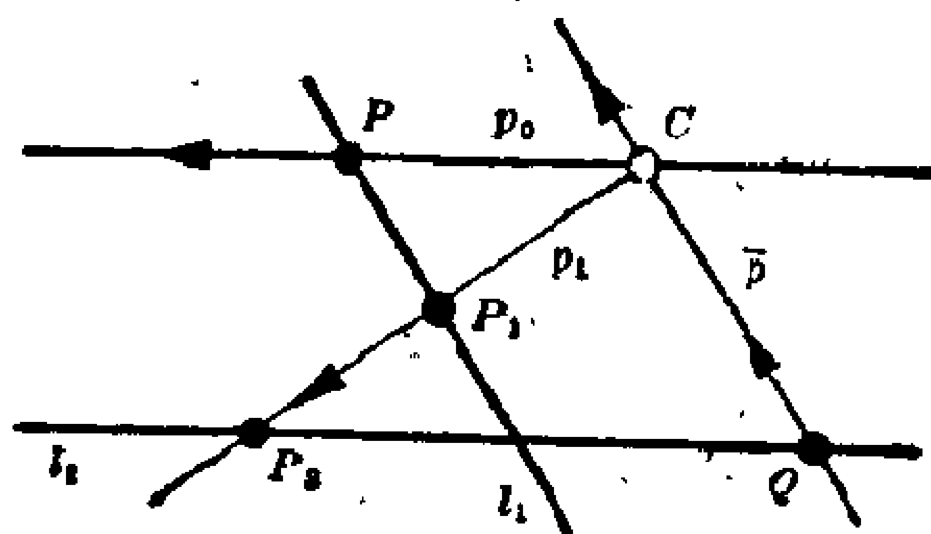


图12.1-1 非正常点的引进

逆象是 l_1 的方向。一个正常点和一个非正常点严格确定一条正常直线，它过正常点且以非正常点为其方向，例如，直线 p_0 过 P 和它的象。不同的是，两个非正常点确定**非正常直线**，它是由所有的非正常点组成。两条平行直线相交于一个非正常点，它对应于这两条直线的公共方向。而一条正常直线和非正常直线相交于一个非正常点，它对应于这条正常直线的方向。

相比于欧几里得平面的几何，在射影平面上两条直线总相交于一点，过两点恰有一条直线。

射影平面 由所有的正常点和非正常点组成。它的线性子空间就是各条正常直线以及非正常直线。因为正常点和非正常点可以通过中心射影互相映射，所以在它们之间加以区别是没有多大意义的。同样，区别正常直线和非正常直线也失去了它的意义，谈平行线也没有意义了。

以同样的方法，对正常点附上所有的非正常点，即空间直线的方向，可以从欧几里得空间得到**射影空间**。这些非正常点的集合形成**非正常平面**。非正常直线是由正常平面与此非正常平面相交而成的，因此这些非正常直线张成非正常平面。

在射影空间中，两条直线或者偏斜或者恰交于一点。两个平面恰交于一线。一条直线和不在这直线上的一点恰张成一平面。

假使取直线，而不是取点作为射影平面的基本元素，那末点作为直线束的顶点是线性子空间。

12.2 射影坐标

假使 S 是射影平面 Π 外的一点，那末过 S 的每一条直线与它同平面 Π 的交点 P 存在一一对应(见图 12.2-1)。假使直线用非零向量 $\boldsymbol{x}$ 表示，那末 $\rho\boldsymbol{x}(\rho\neq 0)$ 给出 Π 上的同一点 P，于是它表征为一维向量空间。参考向量空间的基 $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{x}$ 具有表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_0x_0+\boldsymbol{e}_1x_1+\boldsymbol{e}_2x_2=\sum_{i=0}^{2}\boldsymbol{e}_ix_i$ 或 $\rho\boldsymbol{x}=\sum_{i=0}^{2}\boldsymbol{e}_i\rho x_i$，由点 P 所确定的三个数 (x_0, x_1, x_2) 是它的**齐次射影坐标**，齐次是由于 $(\rho x_0, \rho x_1, \rho x_2)$ $(\rho\neq 0)$ 也表示同一点。以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i(i=0, 1, 2)$ 的**基点** E_i 具有齐次坐标 $(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$ 和 $(0, 0, 1)$，以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_0+\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 的**单位点**具有齐次坐标 $(1, 1, 1)$。基点和单位点组成射影坐标系的基。假使取代向量 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}$，而用向量 $\boldsymbol{e}_i'=\rho_i\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}'=\rho\boldsymbol{e}$ 代替，

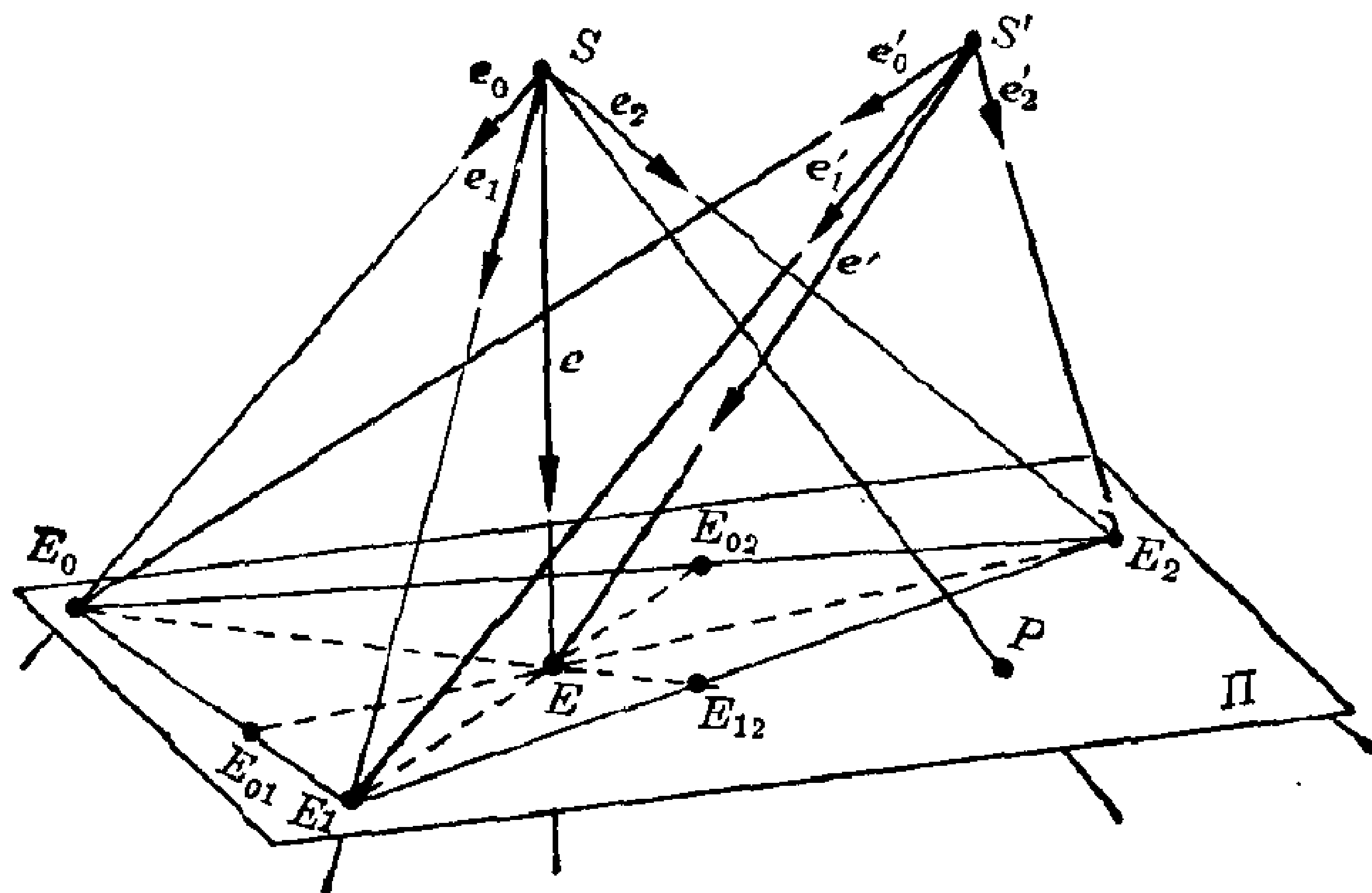


图 12.2-1　射影坐标的引进

那末 $e'=\rho e=\rho\sum_{i=0}^{2}e_i$ 和 $e'=\sum_{i=0}^{2}e'_i=\sum_{i=0}^{2}e_i\rho_i$。由此得出 $\rho_i=\rho$ 和 $x_i=\rho x'_i$，即若比率 $x_0:x_1:x_2$ 保持常数，则齐次坐标保持不变。

假使 S' 是平面 Π 外不同于 S 的一点，相对于 S 有向量 $\sum_{i=0}^{2}s_ie_i$，那末相对于 S'，点 E_i 和 E 有形如 $e'_i=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}e_j$ 和 $e'=\sum_{i=0}^{2}e'_i$ 的向量。使每一个关于 S 有向量 $\sum_{j=0}^{2}x_je_j$ 的点 X 唯一地对应为关于 S 有向量 $\sum_{j=0}^{2}\left(s_j+\sum_{i=0}^{2}x_ja_{ij}\right)e_j$ 的点 X'，使每一个向量 $x=\sum_{i=0}^{2}x_ie_i$ 对应于向量

$$x'=\sum\sum(x_ia_{ij})e_j$$

的仿射映射，由 S 变到 S'，向量 e_i 变到 e'_i，e 变到 e' 的条件唯一地确定。然后，若向量 $p=\sum_{i=0}^{2}p_ie_i$ 表示 P，则它的象 P' 表示为

$$p'=\sum_{j=0}^{2}\left(\sum_{i=0}^{2}p_ia_{ij}\right)e_j=\sum_{i=0}^{2}p_ie'_i,$$

因此 P' 相对于基 e'_i 有和 P 相对于基 e_i 一样的坐标。所以射影坐标仅依赖于基，而不依赖于周围空间的点 S 和 S'，它们只是用来导出坐标。

反之，平面上四点 E_0, E_1, E_2, E，其中无三点共线，确定一个射影坐标系；这四个点是坐标系的基。为此用直线把平面外的一点 S 和给定的四点连接起来，并在 SE_i 和 SE 中选取向量 e_i 和 e，使得 $\sum_{i=0}^{2}e_i=e$。这

些向量 e_i 是线性独立的，因为点 E_i 不落在同一直线上，所以它们构成向量空间的基。

在空间　一个射影坐标系相应地由任四点不落在同一个平面上的五点 E_0, E_1, E_2, E_3, E 的基所确定。从空间外的一点 S，这些基点表示为向量 $e_i(i=0, 1, 2, 3)$，它形成 4 维向量空间的基，单位点表示为向量 $e=\sum_{i=0}^{3} e_i$。坐标比率 $x_0:x_1:x_2:x_3$ 不依赖于点 S 的选择，也不依赖于在过 S 的相应直线上向量 e_i, e 的选择。

在一条射影直线上，作为坐标系的基，三个不同点就够了，其中两点作为基点，一点作为单位点。

在平面上给定由四点 E_0, E_1, E_2, E 确定的任一坐标系，能将此坐标系限制为三根坐标轴 E_0E_1, E_0E_2 和 E_1E_2，在 E_0E_1 上取单位点 E_{01} 对应于向量 e_0+e_1 有坐标(1, 1, 0)；在 E_0E_2 上取 E_{02} 对应于向量 e_0+e_2 有坐标(1,0,1)；在 E_1E_2 上取 E_{12} 对应于向量 e_1+e_2 有坐标(0, 1, 1)（见图 12.2-2）。

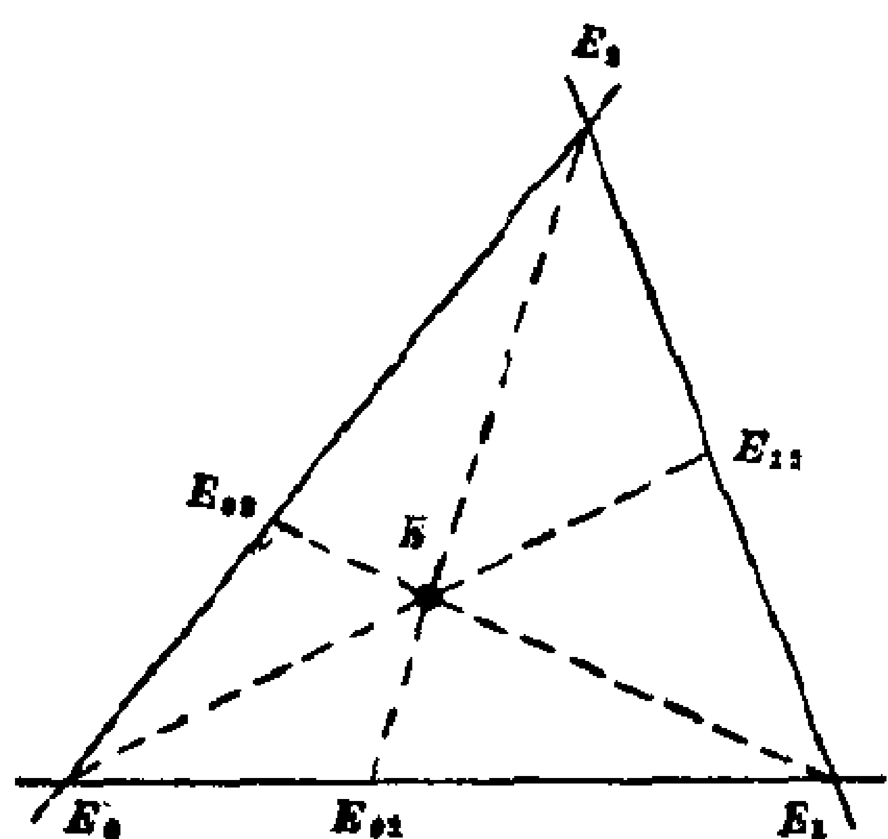


图 12.2-2　平面坐标到三根坐标轴上的限制

反之，直线上的任一射影坐标系能扩充成包括这条直线在内的平面坐标系，在此直线上取基点 E_0, E_1 和单位点 E_{01}，选取不在此直线上的点 E_2 作为第三个基点，在直线 $E_{01}E_2$ 上取不同于 E_{01} 和 E_2 的一点作为新的单位点 E。于是，直线上原来的坐标系就是平面坐标系到坐标轴 E_0E_1 上的限制。

12.3　交比

设 A, B, C, D 是射影直线 l（见图 12.3-1）上的四点，其中任三点不重合并且 A 和 B 不同。直线 l 和不在 l 上的一点 S 确定一个平面，关于基 e_0, e 以及原点 S，这四点对应于向量 $a=a_0e_0+a_1e_1$, $b=b_0e_0+b_1e_1$, $c=c_0e_0+c_1e_1$, $d=d_0e_0+d_1e_1$。因为 a 和 b 线性独立，所以 c 和 d 可用 a 和 b 表示；于是有

$$c=\lambda_0 a+\mu_0 b(c_i=\lambda_0 a_i+\mu_0 b_i)$$

和

$$d=\lambda_1 a+\mu_1 b(d_i=\lambda_1 a_i+\mu_1 b_i)。$$

现在能定义四点的交比:

交比	$(A, B; C, D)=(\mu_0/\lambda_0):(\mu_1/\lambda_1)$

交比不依赖于向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的选择,也不依赖于 S 的选择。这个命题的第一部分得自计算对于新向量

$$\boldsymbol{a}'=\alpha\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{b}'=\beta\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{c}'=\gamma\boldsymbol{c}=\gamma(\lambda_0\boldsymbol{a}+\mu_0\boldsymbol{b})$$
$$=\gamma[(\lambda_0/\alpha)\boldsymbol{a}'+(\mu_0/\beta)\boldsymbol{b}']$$

和
$$\boldsymbol{d}'=\delta\boldsymbol{d}=\delta(\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b})$$
$$=\delta[(\lambda_1/\alpha)\boldsymbol{a}'+(\mu_1/\beta)\boldsymbol{b}']$$

的交比。这给出

$$\lambda_0'=(\gamma/\alpha)\lambda_0,\ \mu_0'=(\gamma/\beta)\mu_0,$$
$$\lambda_1'=(\delta/\alpha)\lambda_1,\ \mu_1'=(\delta/\beta)\mu_1$$

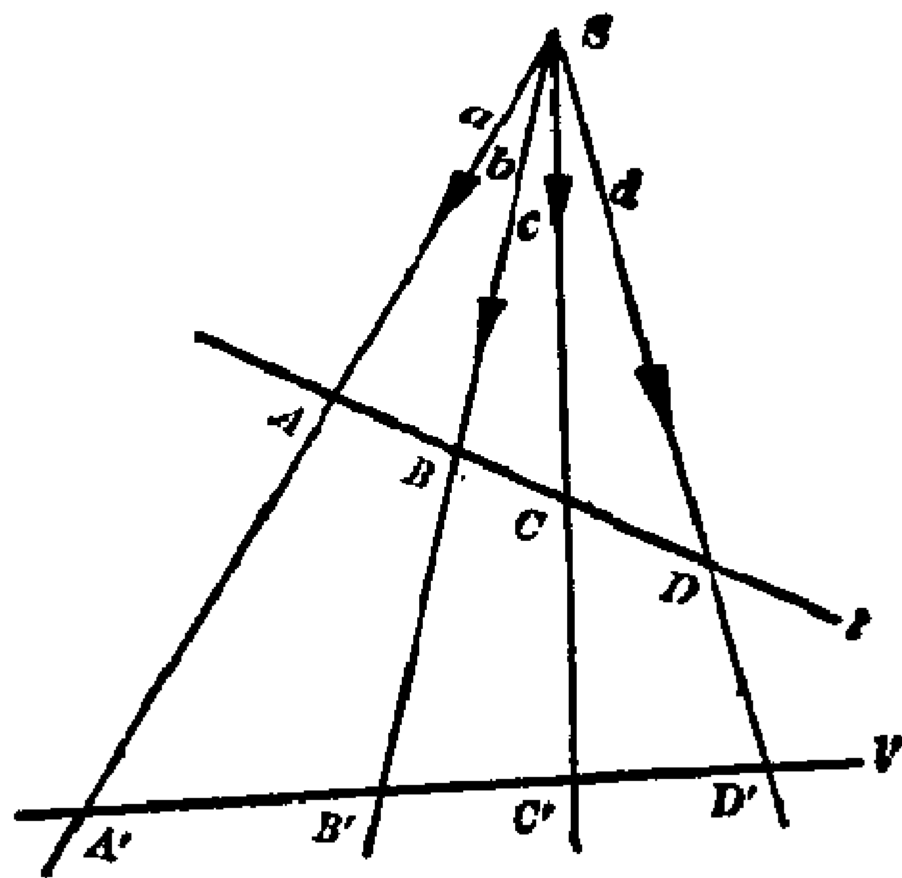


图 12.3-1 在射影下交比的不变性

或者
$$(A, B; C, D)=(\mu_0'/\lambda_0'):(\mu_1'/\lambda_1')=(\mu_0/\lambda_0):(\mu_1/\lambda_1)。$$

另一方面,若 S' 是不在 l 上且不同于 S 的一点,又若向量 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}', \boldsymbol{d}'$ 关于 S' 对应着点 A, B, C, D, 则如同对于射影平面所证明那样,存在一个仿射映射,把由 l 和 S 确定的平面与由 l 和 S' 确定的平面联系起来,它将 S 映成 S', 将向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 映成 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'$。由于映射是线性的: $\boldsymbol{c}'=\lambda_0\boldsymbol{a}'+\mu_0\boldsymbol{b}'$ 和 $\boldsymbol{d}'=\lambda_1\boldsymbol{a}'+\mu_1\boldsymbol{b}'$, 所以关于 S' 有$(A, B; C, D)=(\mu_0/\lambda_0):(\mu_1/\lambda_1)$。

在中心射影下,交比保持不变。

交比的不变性得自这样的事实:向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 相对于 S 不仅表示这四条直线与直线 l 的交点 A, B, C, D, 也表示这四条直线与直线 l' 的交点 A', B', C', D'。

射影坐标下交比的表示 在直线 l 上的任一坐标系,设 $a_i, b_i, c_i, d_i(i=0, 1)$是点 A, B, C, D 的坐标,其中 $c_i=\lambda_0 a_i+\mu_0 b_i$ 和 $d_i=\lambda_1 a_i+\mu_1 b_i$。因为 $A\neq B$, 行列式 $\Delta=|a_i b_i|=\begin{vmatrix}a_0 & b_0\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}=a_0b_1-a_1b_0$ 不为零,所以从 c_i 和 d_i 的方程组中,能算出实数 λ_i 和 μ_i:

$$\lambda_0=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}b_0 & c_0\\ b_1 & c_1\end{vmatrix}=-|b_i c_i|/|a_i b_i|,$$

$$\mu_0=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}a_0 & c_0\\ a_1 & c_1\end{vmatrix}=|a_ic_i|/|a_ib_i|,$$

$$\lambda_1=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}b_0 & d_0\\ b_1 & d_1\end{vmatrix}=-|b_id_i|/|a_ib_i|,$$

$$\mu_1=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}a_0 & d_0\\ a_1 & d_1\end{vmatrix}=|a_id_i|/|a_ib_i|。$$

因此

$$(A,\ B;C,\ D)=\frac{\mu_0}{\lambda_0}:\frac{\mu_1}{\lambda_1}=\frac{|a_ic_i|}{|b_ic_i|}:\frac{|a_id_i|}{|b_id_i|}=\frac{F(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})}{F(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})}:\frac{F(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d})}{F(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})}。$$

这里$F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$记由向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$所确定的平行四边形的面积。这一关系说明了与在仿射直线l上四个正常点交比的通常定义的联系。引进适当的因子ρ，可安排$A,\ B,\ C,\ D$为从S点引出的向量$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}$的端点。平行四边形面积的比率就是具有同高$h$的三角形面积的比率(见图12.3-2)，即沿直线$l$的长度之比率。把这些看作有向线段，就有

$$(A,\ B;C,\ D)=(\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{BC}):(\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{BD})$$
$$=(\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}):(\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{DB}),$$

即两个比率$(\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB})$和$(\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{DB})$的商。

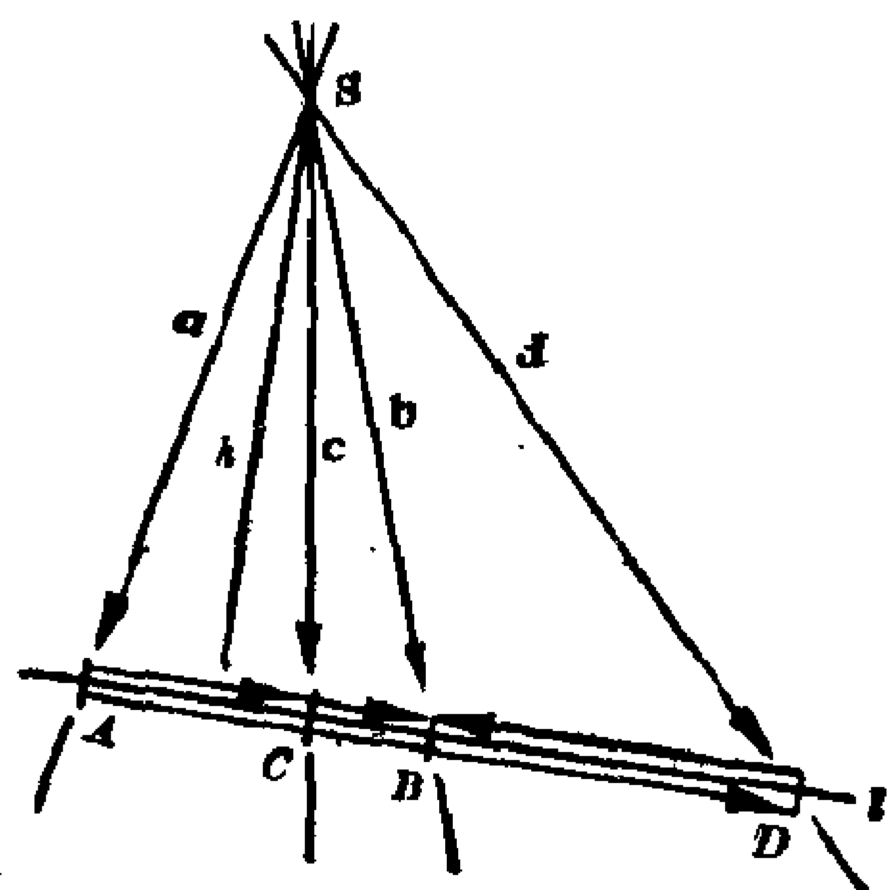


图12.3-2　在仿射直线上交比的定义，$(A,\ B;\ C,\ D)=(\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}):(\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{DB})$

四个点的特殊位置　假使两个点重合，那末行列式，从而交比取特殊值；例如:

当$A=D$时

$$|a_id_i|=0,$$

当$B=D$时

$$|b_id_i|=0,$$

当$C=B$时

$$|b_ic_i|=0,$$

当$A=C$时

$$|a_ic_i|=0。$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(A, B; C, D=A)=(A, B; C=B, D)=\infty\\&(A, B; C, D=B)=(A, B; C=A, B)=0\\&(A, B; C, D=C)=1\end{aligned}}$$

对于调和点有$(A, B; C, D)=-1$。面积的比率$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}):F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$和$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}):F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})$符号相反。从向量积的定义得出，在由$l$和$S$确定的平面上按随便哪一种旋转方向，只有向量$\boldsymbol{c}$或者$\boldsymbol{d}$之中的一个向量落在$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$之间。我们说点对$A, B$和$C, D$互相分隔。

四个点有24种排列.假使两对互相交换，或每对中的两点互相交换，那末交比不变：

$$(A, B; C, D)=(C, D; A, B)=(B, A; D, C)=(D, C; B, A)。$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(A, B; C, D)=k,\ (A, B; D, C)=1/k,\\&(A, C; B, D)=1-k,\ (A, D; B, C)=(k-1)/k,\\&(A, D; C, B)=k/(k-1),\ (A, C; D, B)=1/(1-k)\end{aligned}}$$

因此24种可能的排列给出6个交比值。在计算这些交比时，必须回到行列式的定义；例如，

$$\begin{aligned}|a_ib_i|\cdot|c_id_i|-|c_ib_i|\cdot|a_id_i|&=(a_0b_1-a_1b_0)(c_0d_1-c_1d_0)\\&\quad-(c_0b_1-c_1b_0)(a_0d_1-a_1d_0)\\&=(a_0c_1-a_1c_0)(b_0d_1-b_1d_0)=|a_ic_i|\cdot|b_id_i|。\end{aligned}$$

由定义直接得出，当第二对的点互相交换时，得到交比的倒数。当不同对的两点互相交换时，譬如得到

$$\begin{aligned}(A, C; B, D)&=\frac{|a_ib_i|\cdot|c_id_i|}{|c_ib_i|\cdot|a_id_i|}\\&=\frac{|c_ib_i|\cdot|a_ib_i|+|a_ib_i|\cdot|c_id_i|-|c_ib_i|\cdot|a_ib_i|}{|c_ib_i|\cdot|a_id_i|}\\&=1+\frac{|a_ic_i|\cdot|b_id_i|}{|c_ib_i|\cdot|a_id_i|}=1-k,\end{aligned}$$

因为$|c_ib_i|=-|b_ic_i|$。类似地，$(A, D; B, C)=1-\dfrac{1}{k}=(k-1)/k$。

在射影平面上，一线束中四条直线的交比定义为这四条直线与任一直线l的四个交点的交比。在中心射影下交比不变性，得出这个交比不依赖于l的选择(见图12.3-3)。

利用交比引进射影坐标 如果关于基$E_i(i=0, 1, 2)$和E，点P有

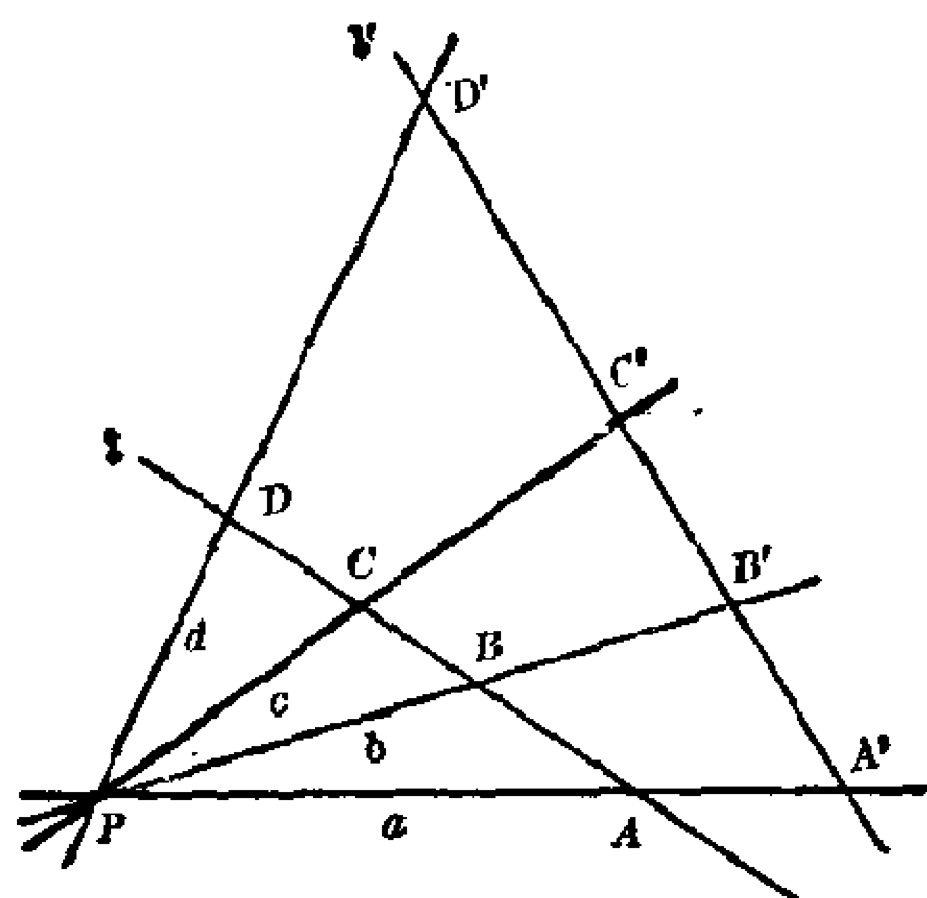


图 12.3-3　不依赖于直线 l 选取四直线的交比

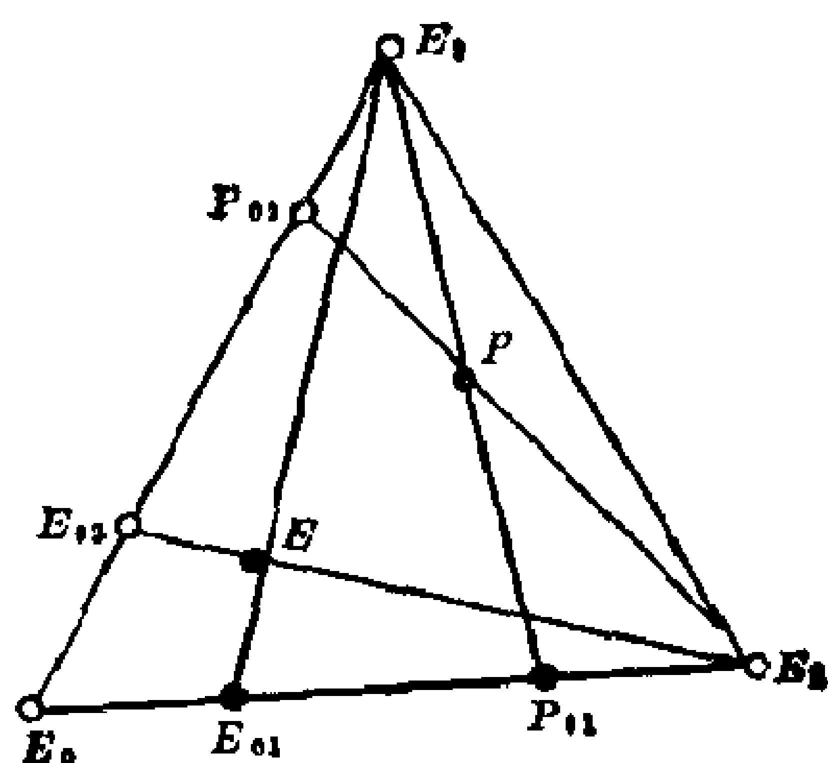


图 12.3-4　利用交比引进射影坐标系

射影坐标 (x_0, x_1, x_2)，又若从 E_2 把 E 和 P 点射影到坐标轴 E_0E_1 上（见图 12.3-4），则在限制于直线 E_0E_1 的坐标系内，E_{01} 和 P_{01} 有坐标 $(1, 1)$ 和 (x_0, x_1)。于是 $(E_0, E_1; E_{01}, P_{01})=x_1:x_1$。类似地，对于把 E 和 P 射影到直线 E_0E_2 上，有 $(E_0, E_2; E_{02}, P_{02})=x_2:x_0$。因此可以用交比，即只用射影量来定义坐标比 $x_0:x_1:x_2$。在特殊情形下，当 E_1 和 E_2 是非正常点并且直线 E_1P 和 E_2P 平行于坐标轴 E_0E_1 和 E_0E_2 时，坐标比 $x_1:x_0$ 和 $x_2:x_0$ 表示**仿射平行坐标**。

在一直线上给出三点，总能在这直线上选取第四点，使得这四个点的交比取给定的实数 λ；可以把给定的三点作为直线上坐标系的基 E_0, E_1, E_2，那末由

$$(E_0, E_1; E_{01}, P_{01})=x_1:x_0=\lambda$$

确定第四点。

12.4　射影映射

在中心射影 $\mathbf{A}$ 下，参考基 E_i, E 的象 $\overline{E}_i$, $\overline{E}$, 象点 P 的射影坐标与原象点的射影坐标相同。关于任意的基 E'_i, E' 以及相应的基向量 $\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'$，它们与基向量 $\overline{\boldsymbol{e}}_i$ 的联系是方程 $\overline{\boldsymbol{e}}_i=\sum\limits_{j=0}^{2}a_{ij}\boldsymbol{e}'_j$，其中，$\det(a_{ij})\neq 0$，点 P 有坐标 $x'_i=\sum\limits_{j=0}^{2}a_{ij}x_j$。因此，中心射影关于任意的基用具有非异矩阵 (a_{ij}) 的线性坐标变换 $\boldsymbol{A}$ 描述：$\rho x'_i=\sum\limits_{j=0}^{2}a_{ij}x_j$。如果 $\mathbf{A}$ 接着另一个中心射影 $\mathbf{B}$，而它具有坐标变换 $\mathbf{B}$：$\rho x''_k=\sum\limits_{j=0}^{2}b_{kj}x'_j$，$\det(b_{kj})\neq 0$，那末两个中心射影的结

果 $\Gamma=\mathbf{BA}$ 由坐标变换 $\boldsymbol{C}$ 描述: $\rho x_k''=\sum_{i=0}^{2}b_{ki}\sum_{j=0}^{2}a_{ij}x_j=\sum_{j=0}^{2}c_{kj}x_j$, $\det(c_{kj})\neq0$。作为中心射影的推广，将**射影映射**定义为一个射影平面到它本身或到另一个射影平面上的一一映射，用**正则线性**坐标变换 $\rho x_i'=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}x_j$, $\det(a_{ij})\neq0$ 来描述，可以证明任一射影映射能由有限多个相继的中心射影产生。

射影几何的主要定理。恰有平面 π 到平面 π' 上的一个射影映射，把 π 上三点不共线的四个给定点映成 π' 上三点不共线的四点。

为了证明这个定理，在 π 和 π' 上取四个给定点作为基，使得在相应的坐标系中每一组的点有射影坐标(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)和(1, 1, 1)。如果将四点及其象的这些坐标代入 $\rho x_i'=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}x_j$, 那末得到，当 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=0$, 当 $i=j$ 时 $a_{ij}=1$, 即有 $\rho x_i'=x_i$。反之，由坐标变换 $\rho x_i'=x_i'$ 描述的映射把 π 上基的四点映成 π' 上基的四点，因此它是唯一的这种射影映射。

π 到 π' 上的中心射影把交线 $s=(\pi\cap\pi')$ 上的每一点映射到它本身上。若任意一个射影映射有这一性质，则它必定是一个中心射影。若 π' 的直线 l' 是 π 的直线 l 的象，l 和 l' 交于 s 的同一点，根据假设，l 与 s 的交点保持不动，因此直线 l 和 l' 决定一个平面。然后如果 l' 上点 P' 和 Q' 是 l 上点 P 和 Q 的象，则直线 PP' 和 QQ' 的交点 C 就是中心射影的中心，它将 P 映成 P', Q 映成 Q', s 的每一点映为它本身。根据主要定理，这中心射影等同于给定的射影映射。

根据克莱因的**埃尔兰根纲领**(1872 年)，射影几何是研究在射影映射下保持不变的性质。

交比是一个射影不变量。

若在直线 l 上四点 A, B, C, D 具有 $c_i=\lambda_0a_i+\mu_0b_i$ 和 $d_i=\lambda_1a_i+\mu_1b_i$, 其交比$(A, B; C, D)$由$(\mu_0/\lambda_0):(\mu_1/\lambda_1)$确定，则在射影映射下 $\rho x_i'=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}x_j(i=0, 1, 2)$, $\det(a_{ij})\neq0$, 它们的象 A', B', C', D' 满足关系 $\rho a_i'=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}a_j$, $\rho b_i'=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}b_j$ 和 $\rho c_i'=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}c_j=\rho(\lambda_0a_i'+\mu_0b_i')$, $\rho d_i'=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}d_j=\rho(\lambda_1a_i'+\mu_1b_i')$, 由此得到$(A', B'; C', D')=(\mu_0'/\lambda_0'):(\mu_1'/\lambda_1')=$

$(\mu_0/\lambda_0):(\mu_1/\lambda_1)=(A, B; C, D)$。

所有的射影映射形成一个群，它由交比的不变性来表征。那些使一条直线固定不变，但不一定点点固定不变的射影映射形成一个子群。**仿射映射群**是一个子群，对于它来说，这个固定直线就是该平面的非正常直线。其次，有一个**相似映射**子群，它将正交直线映成正交直线。**合同映射**子群还使两点之间距离保持不变。

在一条射影直线上三个基点确定射影坐标，并且由线性变换 $\rho x_0'=ax_0+bx_1$，$\rho x'=cx_0+dx_1$，其中 $ad-bc\neq 0$，来描述射影映射。

直线射影映射的主要定理。在两条直线之间恰有一个射影映射，将原象直线上三个不同点映成象直线上三个不同点。

于是，中心映射是两条直线的交点为**不动点**的直线射影映射。

直线方程　射影直线上一点 P 相对于具有相应向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的直线上两点 A 和 B，用表达式 $\rho\boldsymbol{x}=t_1\boldsymbol{a}+t_2\boldsymbol{b}$ 中参数的比率 $t_1:t_2$ 来表征。因此在齐次坐标 (x_0, x_1, x_2) 中有如下的齐次方程组，从这个方程组可解出 t_1, t_2, ρ 的值，或许相差一个非零因子 λ。不失一般性，若假定 $x_2\neq 0$，则得 $t_1=\lambda(x_0b_1-x_1b_0)$，$t_2=\lambda(x_1a_0-x_0a_1)$ 和 $\rho=(\lambda/x_2)\{(x_0b_1-x_1b_0)a_0+(x_1a_0-x_0a_1)b_2\}$。若把这些值代入第一个方程，则得到 $x_0u_0+x_1u_1+x_2u_2=0$，这里 $u_0=a_2b_1-a_1b_2$，$u_1=a_0b_2-a_2b_0$ 和 $u_2=a_1b_0-a_0b_1$。

$$\begin{array}{|l|}\hline t_1a_0+t_2b_0-\rho x_0=0\\ t_1a_1+t_2b_1-\rho x_1=0\\ t_1a_2+t_2b_2-\rho x_2=0\\ \hline\end{array}$$

直线方程	$x_0u_0+x_1u_1+x_2u_2=0$

普吕克(Plücker)直线坐标 (u_0, u_1, u_2) 如同点坐标 (x_0, x_1, x_2) 一样，只确定到可能相差一个非零标量 λ 的程度。在直线方程中两个三数组的形式等价性表明，对于给定的三数组 (u_0, u_1, u_2)，该方程确定直线 l，作为满足该方程的坐标三数组 (x_0, x_1, x_2) 所有点的轨迹，而对于给定的三数组 (x_0, x_1, x_2)，该方程确定一点 P，作为其三数组 (u_0, u_1, u_2) 满足该方程的直线束的顶点。齐次线性方程组 $x_0u_0+x_1u_1+x_2u_2=0$ 和 $x_0v_0+x_1v_1+x_2v_2=0$ 确定两条直线 (u_0, u_1, u_2) 和 (v_0, v_1, v_2) 的公共点 (x_0, x_1, x_2)，即它们的交点。类似地，方程 $x_0u_0+x_1u_1+x_2u_2=0$ 和 $y_0u_0+y_1u_1+$

$y_2u_2=0$ 确定两个顶点在(x_0, x_1, x_2)和(y_0, y_1, y_2)的直线束的公共直线(u_0, u_1, u_2)，即它们顶点的连线(见图12.4-1)。

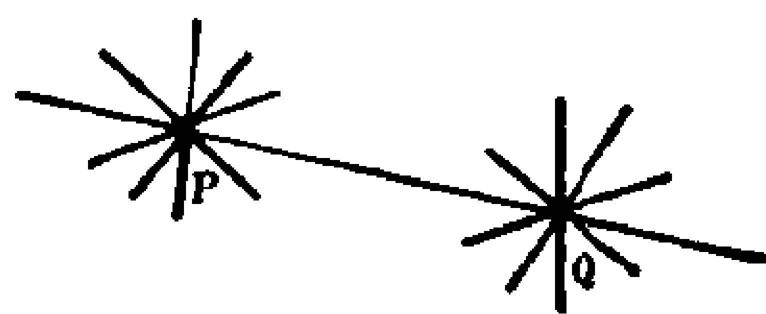


图12.4-1 两线束之间的联系

对偶原理 一些成对概念："直线的点"和"线束的直线"，"连结"和"相交"，"落在"和"通过"可以相互交换，因为它们由等价的代数运算或方程表示。在这种意义下，存在一个*对偶原理*：射影几何的真命题可通过相互交换变成另一真命题；例如，"两个不同点恰在一条直线上"的定理可变成"两条不同直线恰过一个点"的定理。因此，对于射影几何的每一个定理都有一个对偶形式，它的证明可从原定理的证明中得到。

笛沙格(Desargues)定理。若两个三角形相应顶点的连线过一点 S，则它们相应边的交点落在同一条直线 s 上。

对偶形式：若两个三角形相应边的交点落在一条直线 s 上，则它们相应顶点的连线过一点 S。

笛沙格定理的对偶形式也是它的逆定理。为了证明定理本身，假设三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$，其中直线 A_1A_2，B_1B_2 和 C_1C_2 交于一点 S(见图12.4-2)。需要证明点 $A=(B_1C_1\cap B_2C_2)$，$B=(C_1A_1\cap C_2A_2)$ 和 $C=(A_1B_1\cap A_2B_2)$落在直线 s 上。可以对两个三角形按这种方式运用射影映射：把 A 和 B 映成两个非正常点。于是在象中，$B_1'C_1'$ 和 $B_2'C_2'$ 平行，$C_1'A_1'$ 和 $C_2'A_2'$ 平行。根据截距定理推得 $A_1'B_1'$ 和 $A_2'B_2'$ 平行，即 C' 也落

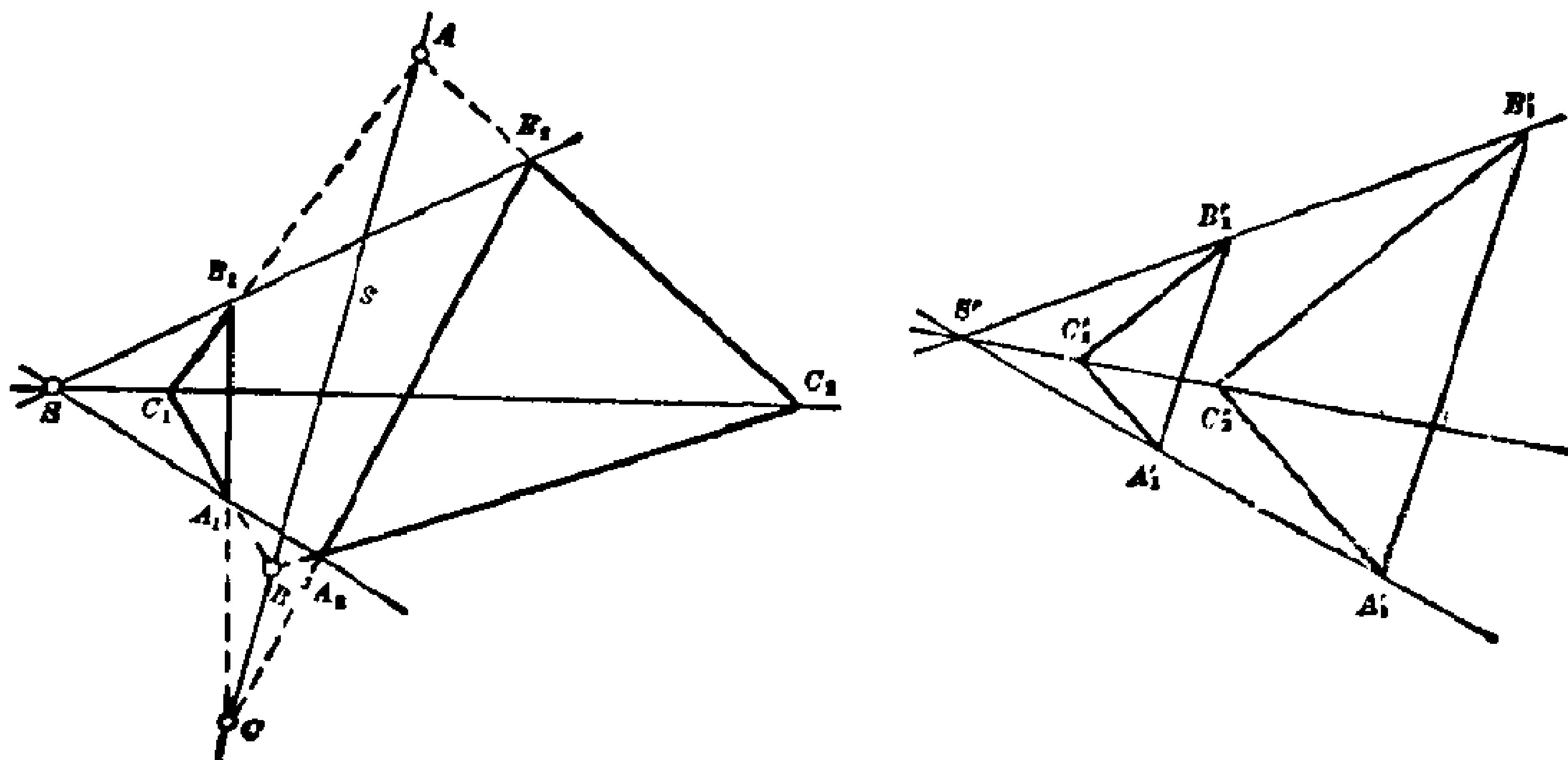


图12.4-2 笛沙格定理

在非正常直线上，因此在原来图形中，C 落在直线 $s=AB$ 上。

帕普斯(Pappus)定理。给出两条直线 l_1 和 l_2，设 A_1, B_1, C_1 是 l_1 上三点，A_2, B_2, C_2 是 l_2 上三点，它们都不同于两直线的交点 O。于是它们交叉连线的交点 $A=(B_1C_2\cap B_2C_1), B=(C_1A_2\cap C_2A_1), C=(A_1B_2\cap A_2B_1)$ 落在一条直线 l 上(见图 12.4-3)。

对偶形式：给出两点 L_1 和 L_2，设 a_1, b_1, c_1 是过 L_1 的三条直线，a_2, b_2, c_2 是过 L_2 的三条直线，它们都不同于这两点的连线。于是，直线 $a=[(b_1\cap c_2), (b_2\cap c_1)]$，$b=[(c_1\cap a_2), (c_2\cap a_1)]$，$c=[(a_1\cap b_2), (a_2\cap b_1)]$ 交于一点 L。

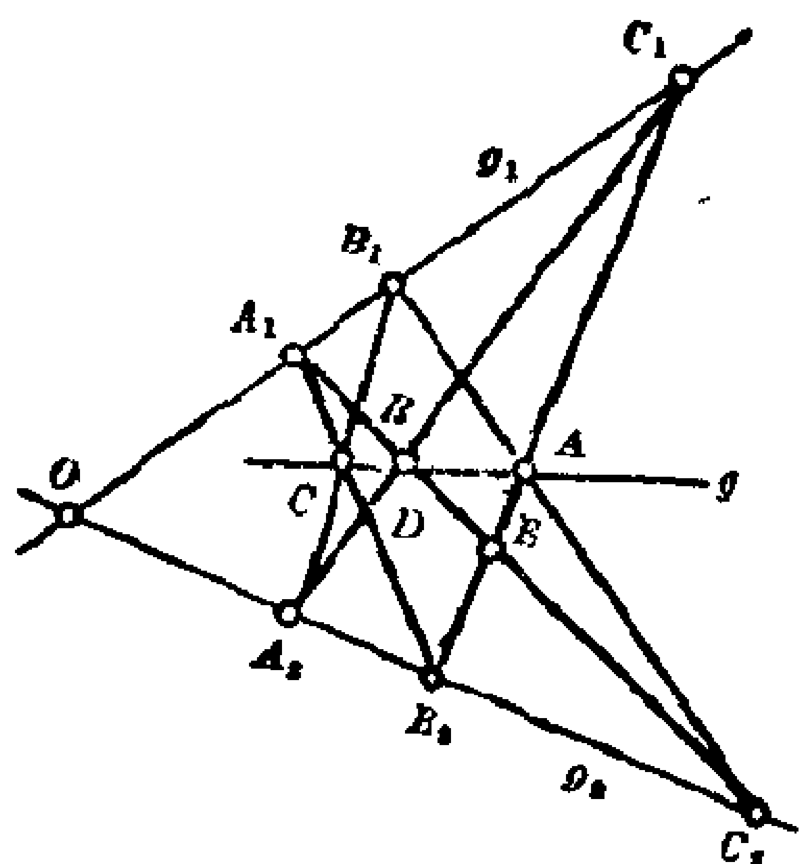


图 12.4-3　帕普斯定理

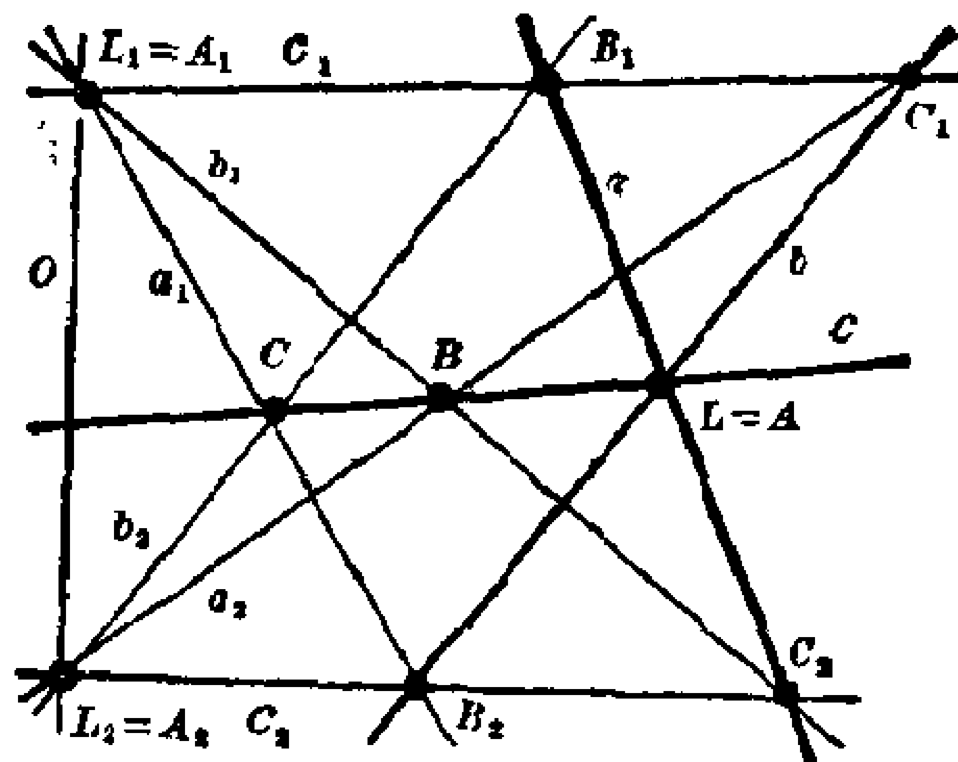


图 12.4-4　对偶化的帕普斯定理

为了证明帕普斯定理，引进交点 $D=A_1B_1\cap A_2C_1$ 和 $E=B_2C_1\cap A_1C_2$ (见图 12.4-3)。若从 A_2 将直线 A_1B_2 射影到直线 l_1 上，使有序三点组 (C, D, B_2) 映成三点组 (B_1, C_1, O)，点 A_1 保持固定不动。类似的从 C_2 的中心射影把 l_1 映射到直线 B_2C_1 上，使有序三点组 (A_1, B_1, O) 映成三点组 (E, A, B_2)，留下点 C_1 固定不动。这两个中心射影一起使有序四点组 (A_1, C, D, B_2) 映成四点组 (E, A, C_1, B_2)，因为 B_2 固定不动，这表示一个中心射影，它的中心 B 是直线 C_1A_2 和 C_2A_1 的交点。另一方面，CA 也必须过 B，即 A, B, C 落在一条直线上。

完全四角形和完全四边形　完全四角形由任三点不共线的四个顶点 A, B, C, D 和它们两两相连的六条直线，即六边 $AB, CD; AD, BC; AC, BD$ 组成。这六条直线的三个交点 $P=(AB\cap CD)$，$Q=(AD\cap BC)$，$R=(AC\cap BD)$ 称为**对边点**，是**对边三角形** PQR 的顶点(见图 12.4-5)。

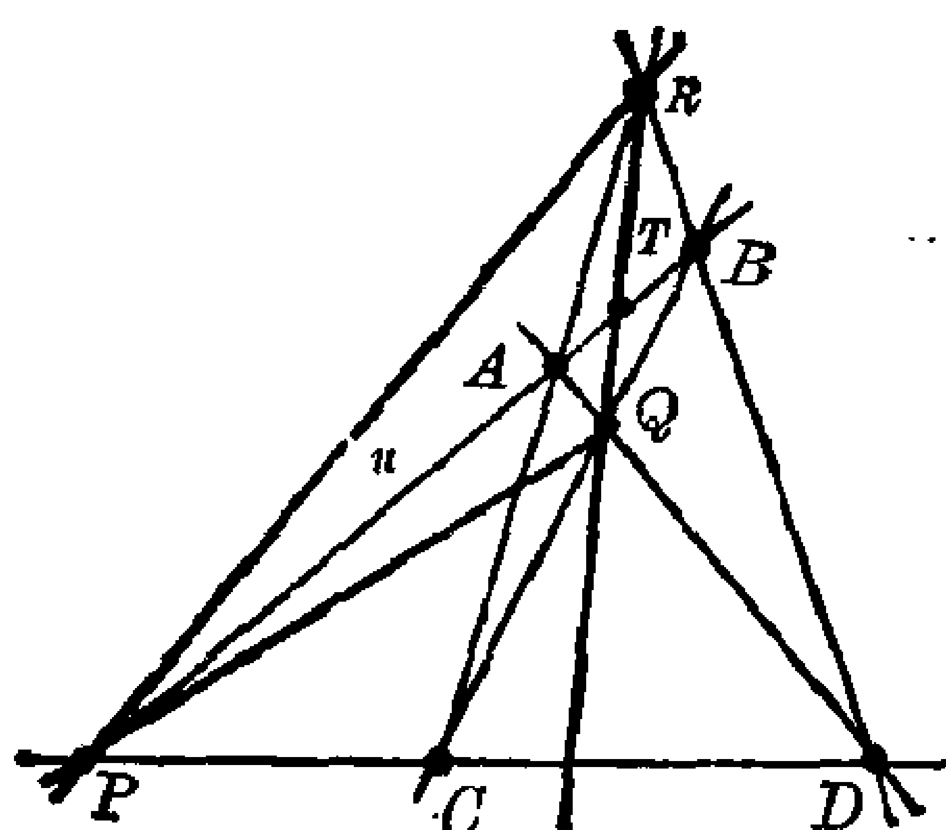


图 12.4-5 完全四角形

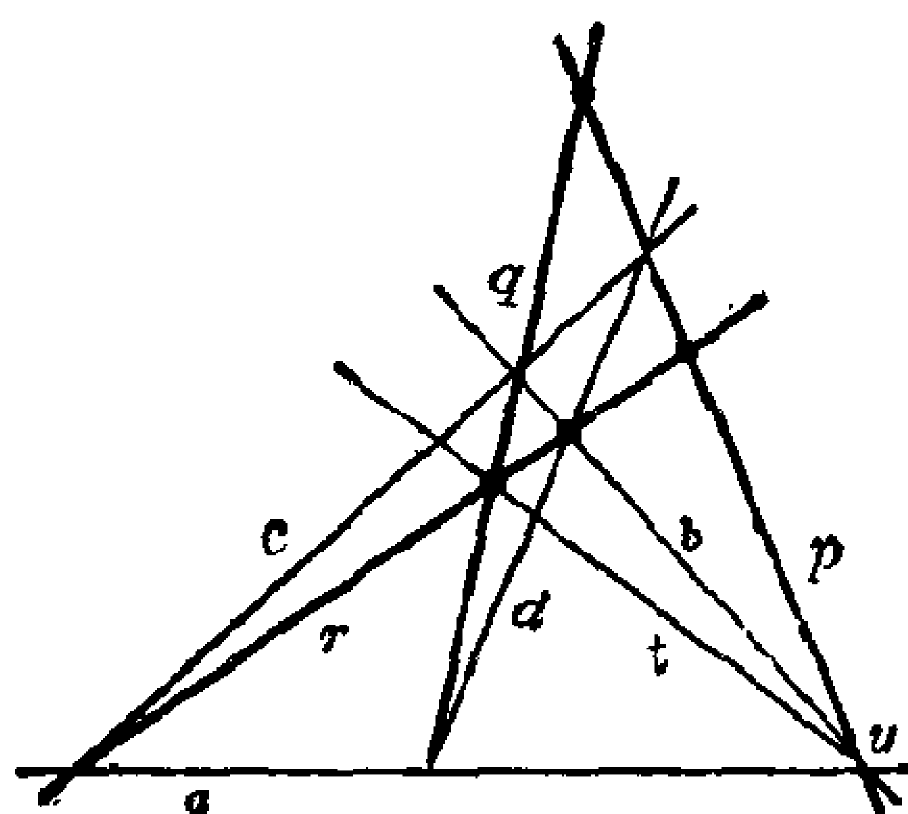


图 12.4-6 完全四边形

完全四边形作为完全四角形的对偶，由任三条不共点的四条直线 a, b, c, d 和它们的六个交点，即顶点 $(a\cap b)$, $(c\cap d)$; $(a\cap d)$, $(b\cap c)$; $(a\cap c)$, $(b\cap d)$ 组成。连接这六个点的三条直线 $p=[(a\cap b),\ (c\cap d)]$, $q=[(a\cap d),\ (b\cap c)]$, $r=[(a\cap c),\ (b\cap d)]$ 称为**对角线**，形成**对边三角形** pqr（见图 12.4–6）。

在完全四角形的任一边上，它的两个顶点被这一边上的一个对边点及这一边与其他两个对边点连线的交点调和地分隔。

对偶形式：在完全四边形的任一顶点，它的两边被过此顶点的一条对角线和此顶点与其他两条对角线交点的连线调和地分隔。

例如，若选出完全四角形的一边 $AB=u$（见图 12.4–5），则顶点 A 和 B 被对边点 P 和此边与其他两个对边点连线 QR 的交点 T 调和地分隔。相应地，在对偶图形中，相交于顶点 U 的两边 a 和 b 被对角线 p 和 U 与其他两条对角线交点 $(q\cap r)$ 的连线 t 调和地分隔。

完全四角形定理的证明，依赖于这样的事实，即射影平面上任一点 X 可以用从平面外一点 S 引到这一点的向量 $\boldsymbol{x}$ 来表征。相应于顶点 A, B, C, D 的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ 是线性相关的，但其中任何三个向量是线性独立的，因为没有三点是共线的。因此存在四个非零实数 α, β, γ, δ 使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}+\delta\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$。边 AB 和 CD 上的对边点 P 可以表征为向量 $\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=-(\gamma\boldsymbol{c}+\delta\boldsymbol{d})$，它是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的线性组合，也是向量 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 的线性组合。类似地，其他两个对边点 Q 和 R 可以表征为向量 $\boldsymbol{q}=\alpha\boldsymbol{a}+\delta\boldsymbol{d}=-(\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c})$ 和 $\boldsymbol{r}=\alpha\boldsymbol{a}+\gamma\boldsymbol{c}=-(\beta\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{d})$。若 T 是 QR 与 AB 的交点，则相应的向量 $\boldsymbol{t}$ 为 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b}$。这四点 A, B, P, T 的交比

则由$(A, B; P, T)=[\alpha/\beta]:[\alpha/(-\beta)]=-1$给出。

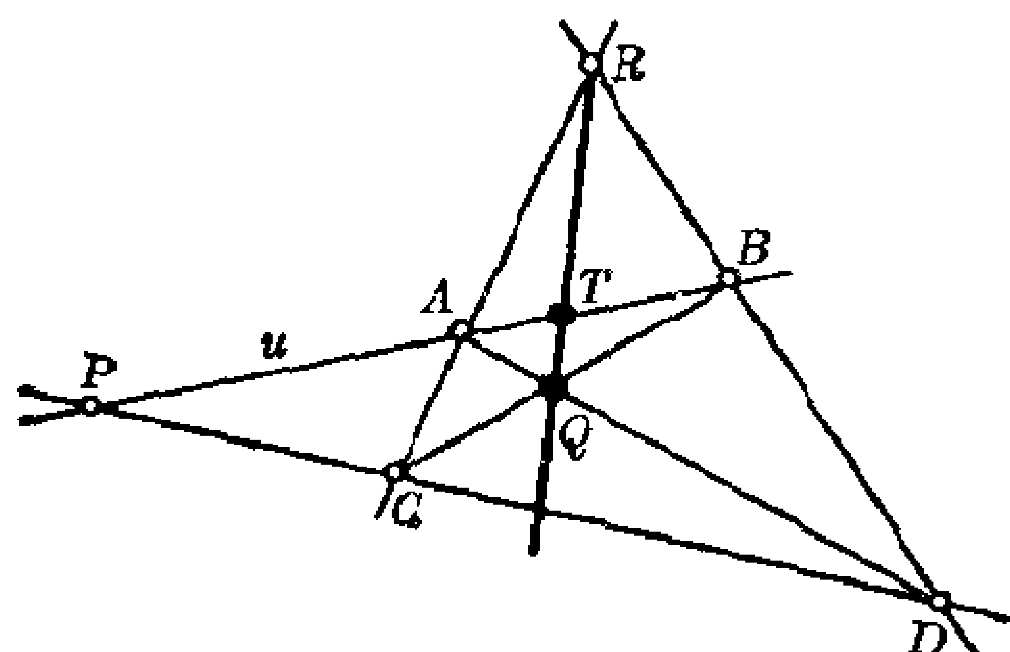


图12.4-7　第四调和点作图

借助于完全四角形可以只用直尺在直线u上作出点A, B和第三点P的第四调和点T(见图12.4-7)。若在过P点的一条直线上选取完全四角形的其余两个顶点C和D，它们彼此不同且不同于P，则对边点Q和R由$Q=(AD\cap BC)$和$R=(AC\cap BD)$确定。于是，对角线QR割边AB在所要求的第四调和点T。

空间的对偶性　对于在平面上具有普吕克坐标u_i的直线方程$\sum_{i=0}^{2}x_iu_i=0$，在空间相应有平面方程$\sum_{i=0}^{3}x_iu_i=0$。因此空间的对偶概念是"点"和"平面"，过空间两点的一直线对应于两个平面的公共线，因而"直线"概念是自对偶的。定理"一点和不过此点的直线恰好确定一个平面"具有对偶形式"一平面和不在这平面上的一直线恰好确定一点"。

在n维空间中，点的对偶是*超平面*，一般地，m维子空间的对偶是$(n-m-1)$维子空间。

直射变换　作为两个射影平面的点之间一一对应的任何一个射影映射，都可以看作这两个平面的直线之间的一一对应，只要将直线作为点的对偶，看作平面的基本元素。以这种解释，一个射影映射相对于坐标u_i和u_i'可用形如

$$\rho u_i'=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}u_j(i=0,\ 1,\ 2),\ \det(a_{ij})\neq 0$$

的线性变换描述。

射影映射主要定理的对偶形式。恰有一个从平面π的直线到平面π'的直线上的射影映射，使得π上任三条不共点的四条直线映成π'上任三条不共点的四条直线。

直线束中四条直线的交比是射影映射的不变量。

因为射影映射将共线点映成共线点，将共点线即直线束的直线映成共点线，所以称为*直射变换*。

直线上射影映射主要定理的对偶形式　恰有一个从顶点为P的直线束到顶点为P'的直线束的直射变换，将第一束中三条不同直线映成第二束的三条不同直线。

在中心射影下，两条直线 l 和 l' 点之间的对应借助于过中心 C 的直线，而交点 $F=(l\cap l')$ 是这个映射的**固定点**。反过来，具有固定点的两直线的任一直射变换是一个中心射影或者说**中心直射**。对偶地，在中心射影下，两束 L 和 L' 的直线之间的对应借助于固定直线 C 上的点；例如，若 p 是束 L 的一条直线，它的象 p' 是点 $P=(p\cap c)$ 与束 L' 顶点之间的连线。直线 $f=(L, L')$ 则是映射的**固定直线**(图 12.4-8)。反之，具有固定直线的两束之间的任一直射变换是一个中心直射。

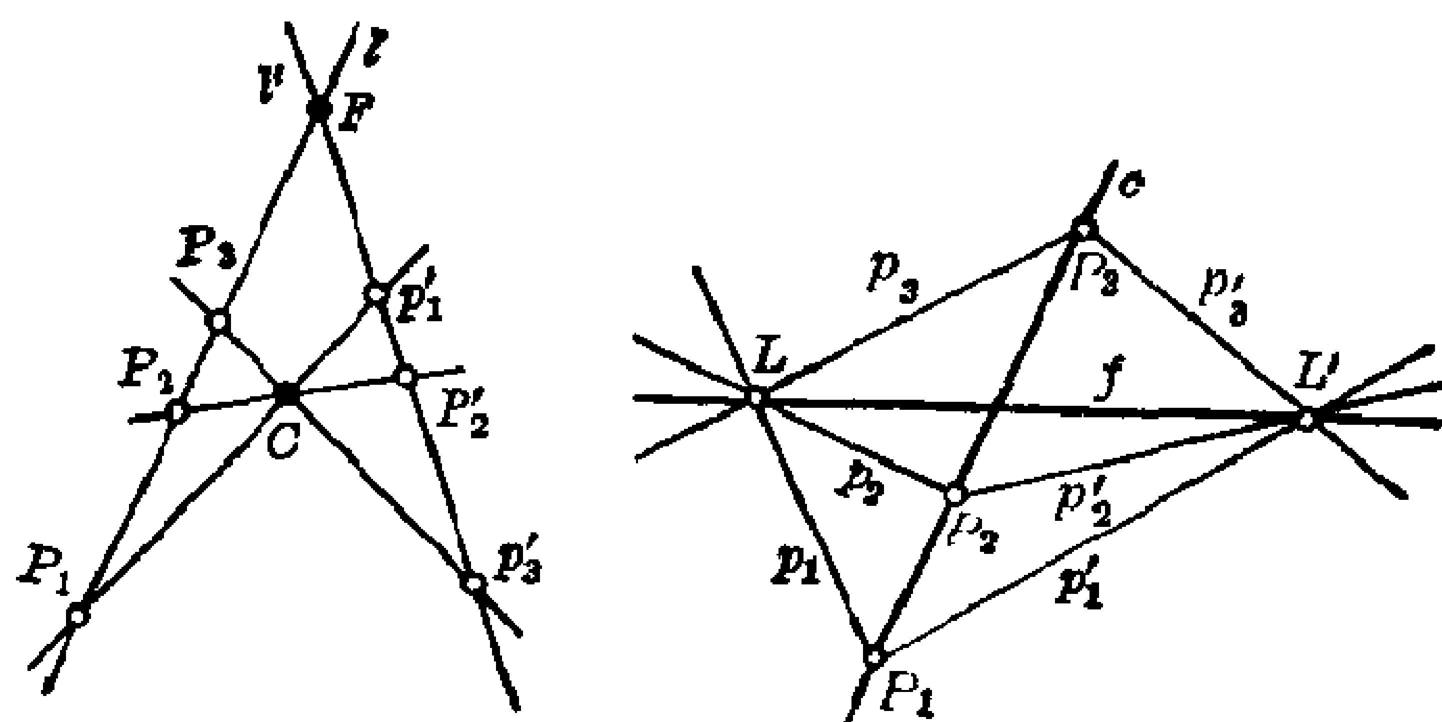


图12.4-8 中心射影

因为直线束 L 中四条直线 $p_i(i=1, 2, 3, 4)$ 的交比等于它们与不过 L 的任意一条直线 l 的交点 $P_i=(p_i\cap l)$的交比，又因为直射变换是由交比的不变性来表征的，所以对于两直线束 L 和 L' 之间的直射变换 λ 来说，也存在各不属于直线束 L 和 L' 的两条直线 l 和 l' 之间的直射变换 λ^*。l 上任一点 P 是 l 与直线束 L 中某条直线 p 的交点，λ^* 则把 P 映成直线 l' 的一点 $P'=(p'\cap l)$。同样地，对于两条直线 l 和 l' 之间的任一直射变换 λ^*，能作出两直线束 L 和 L' 之间的直射变换 λ，其中任意一条直线 $p=PL$ 对应于直线 $p'=P'L'$。

若两直线束的顶点 L 和 L' 落在直射变换 λ^* 下相对应的两点连线 f 上，则如此得到的直射变换 λ 是一个中心直射，因为例如若 L 和 L' 是 l 和 l' 关于 λ 的对应点，则此直线就是 λ 的固定直线(见图 12.4-8)。

类似地，若 l 和 l' 交于直射变换 λ 下相对应的两直线 p 和 p' 的交点 $F=(p\cap p')$，则从两直线束 L 和 L' 之间的直射变换 λ 得到的两直线 l 和 l' 之间的直射变换 λ^* 是中心直射，因为此时点 F 就是 λ^* 的固定点(见图 12.4-9)。

若 p_1, p_2 和 p'_1, p'_2 是在 λ 下的相对应两对直线，又若它们分别与直线 l 和 l' 相交于点 P_1, P_2 和 P'_1, P'_2, 则中心直射的顶点 $C=(s_1\cap s_2)$ 作为

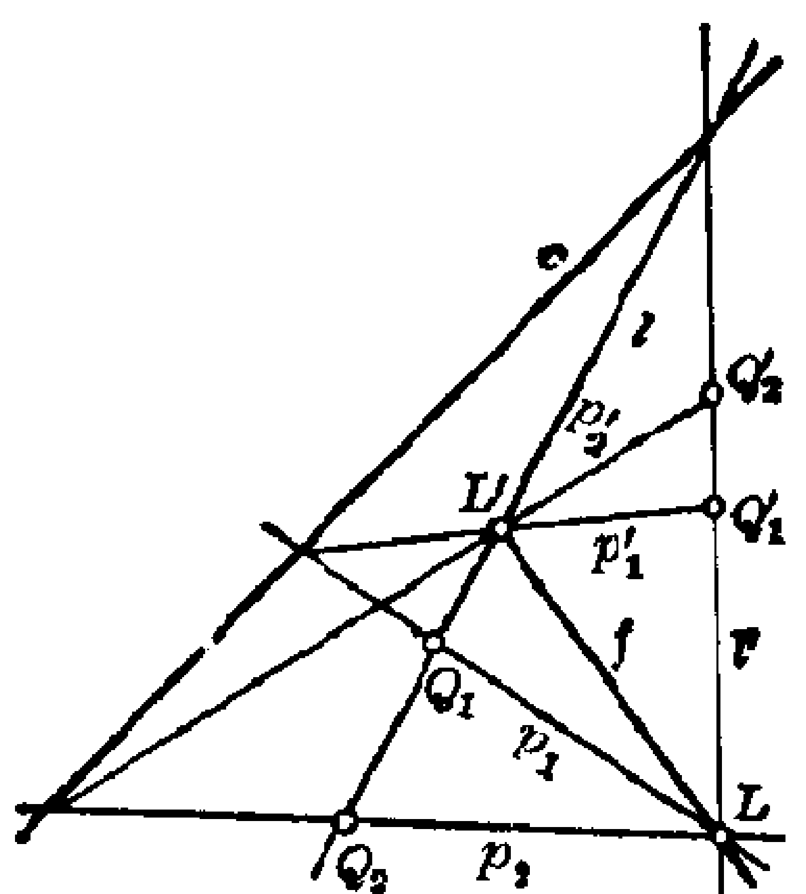


图 12.4-9　顶点为 L 和 L' 的两直线束之间的中心直射变换

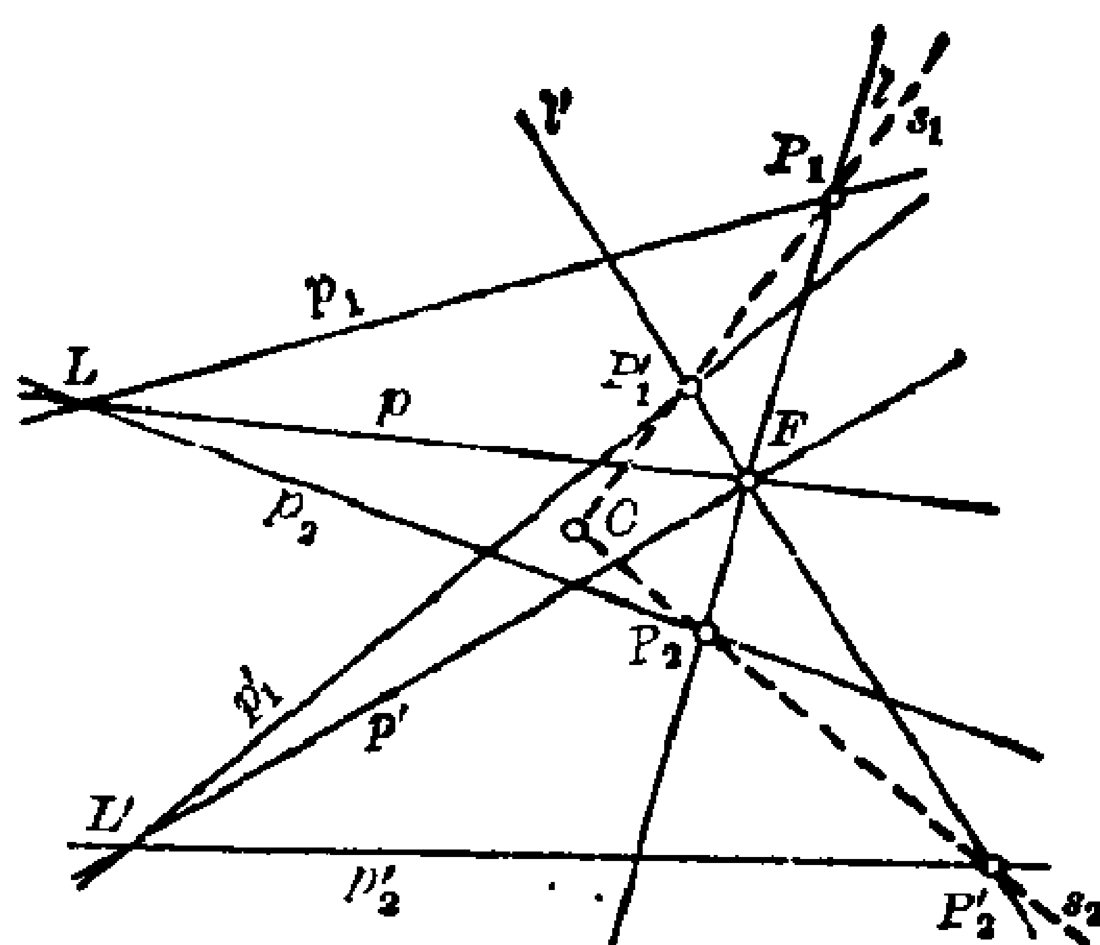


图 12.4-10　两直线 l 和 l' 的中心直射变换

两条直线 $s_1=P_1P_1'$ 和 $s_2=P_2P_2'$ 的交点来确定(见图 12.4-10)。

对射变换把射影平面 π 的点一一到上地映成平面 π' 的直线，把 π 的直线映成 π' 的点。用点坐标和直线坐标，对射变换由如下的线性变换给出：

$$\rho u_i'=\sum_{j=0}^{2}a_{ij}x_j(i=0,\ 1,\ 2),\ 其中\ \det(a_{ij})\neq 0,$$

$$\rho x_i'=\sum_{j=0}^{2}b_{ij}\ u_j(i=0,\ 1,\ 2),\ 其中\ \det(b_{ij})\neq 0。$$

对射变换把两条直线 l_1, l_2 的交点映成点 L_1, L_2 的连线，这里 L_1 和 L_2 是直线 l_1, l_2 的象；并把两点 P_1, P_2 的连线映成直线 p_1, p_2 的交点，这里 p_1, p_2 是点 P_1, P_2 的象。

12.5　二次曲线

二次曲线方程　椭圆、双曲线或抛物线能看作锥面与一个适当的射影平面的截线(见 I. 第13章—二次曲线)。任意两条二次曲线通过从锥面顶点出发的射影互相映射。因此在射影几何中，这些二次曲线之间不再存在什么差别。

在齐次射影坐标中，二次曲线的方程是

$$a_{00}x_0^2+a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{01}x_0x_1+2a_{02}x_0x_2+2a_{12}x_1x_2=0$$

或

$$\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}x_ix_j=0,$$

其中

$$a_{ij}=a_{ji}\quad 且\quad \det(a_{ij})\neq 0。$$

通过一个适当的线性变换可以把一个非退化的二次曲线简化成形式 $x_0^2-x_1^2-x_2^2=0$。行列式非零的二次式不一定表示一条二次曲线。空二次曲线方程 $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ 在任何变换下不能表示一条实在的二次曲线。具有 $\det(a_{ij})=0$ 的二次式 $\sum\limits_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j$ 表示一个**退化的或奇异的二次曲线**，它可能是一对直线、一个点或一对重合直线。

配极变换 对于任何具有 $\det(a_{ij})\neq 0$ 的正则二次曲线 $\sum\limits_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j=0$，存在平面到自身上的一种特殊的对射变换 $u_i=\sum\limits_{j=0}^{2} a_{ij}x_j (i=0,\ 1,\ 2)$，即所谓**配极变换**。用任一点 P 作为**极点**，相伴一直线 p 作为**极线**。于是 P 的极线上一点 Q 的坐标 y_i 满足方程 $\sum\limits_{i=0}^{2} y_iu_i=\sum\limits_{i,j=0}^{2} a_{ij}y_ix_j=0$，其中 x_j 是极点 P 的坐标。P 的极线上所有点 Q **共轭**于 P。二次曲线上点 P 的极线方程就是 P 点的切线方程。

二次曲线上点 P 的极线 p 是二次曲线在 P 的切线 t。

因此二次曲线上任一点 P 共轭于 P 点切线 t 上的每一点，所以也共轭于它本身。二次曲线的点是平面上以这种方式共轭于自身仅有的点。

若二次曲线上两点 B_1, B_2 的切线 t_1, t_2 交于点 P，因此这一点共轭于 B_1 和 B_2，由于共轭于 P 的所有点落在一条直线上，所以它共轭于直线 B_1B_2 上的所有点，它就是 P 的极线 p(见图 12.5-1)。

即使过 P 无二次曲线的切线，根据这个结论也能作出 P 的极线 p。设 p_1, p_2 是过 P 的两条直线，它们分别割二次曲线于 B_1, B_2 和 B_3, B_4。

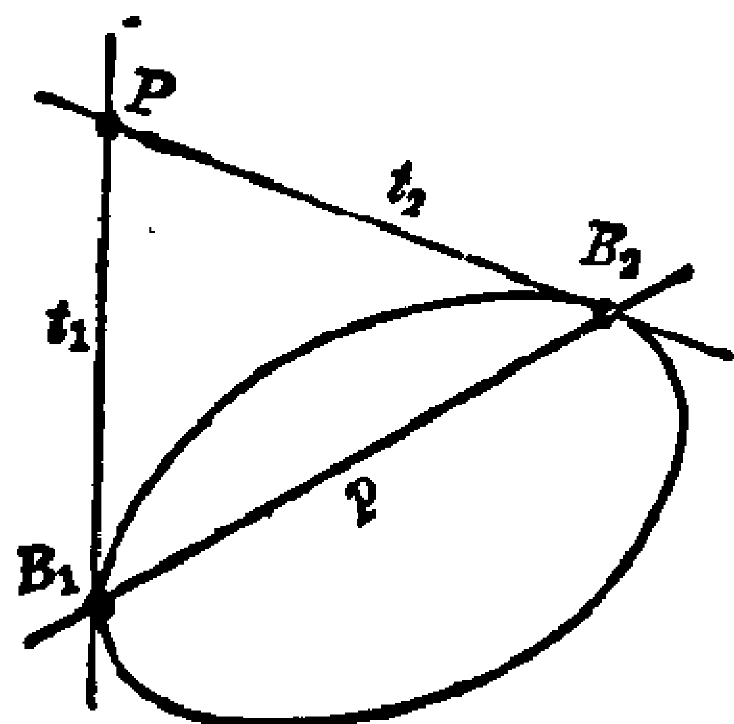


图 12.5-1 当 P 到二次曲线有实切线时的极点 P 和极线 p

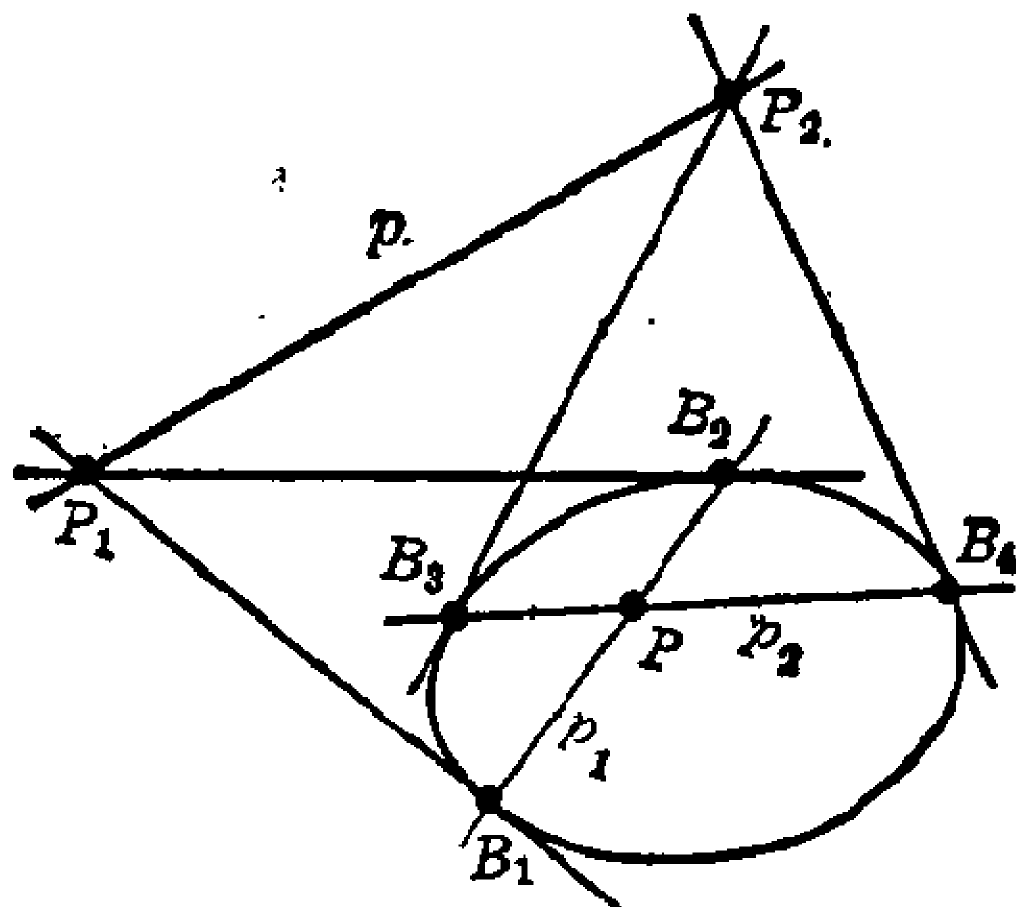


图 12.5-2 当 P 到二次曲线无实切线时的极点 P 和极线 p

于是 B_1, B_2 点切线的交点 P_1 和 B_3, B_4 切线的交点 P_2 分别共轭于直线 p_1 和 p_2 的任一点，因而也共轭于它们的交点 P。由此得出直线 $p=P_1P_2$ 是点 P 的极线(见图 12.5-2)。

过坐标为 x_i 和 y_i 的两点 P 和 Q 的直线 l 割二次曲线 $\sum\limits_{i,j=0}^{2}a_{ij}x_ix_j=0$ 于点 R, R', 这两点的坐标为 $r_i=x_it_1+y_it_2$, 其中的 t_1, t_2 由方程

$$\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}r_ir_j=\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}(x_it_1+y_it_2)(x_jt_1+y_jt_2)$$
$$=t_1^2\alpha+t_2^2\beta+2t_1t_2\gamma=0$$

确定，这里

$$\alpha=\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}x_ix_j,\ \beta=\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}y_iy_j,$$
$$\gamma=\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}x_iy_j。$$

若 $\gamma=0$, 也就是说若 P 和 Q 共轭时，则此二次方程的两个解 $t_1:t_2$ 和 $t_1':t_2'$ 只是符号不同。于是这四个点 P, Q, R, R' 为调和的，因为

$$(P,\ Q;R,\ R')=(t_2/t_1):(t_2'/t_1')=-1。$$

点 P 的极线 p 是这样的点 Q 的轨迹，使得 PQ 与二次曲线的交点 R 和 R' 调和地分隔 P, Q(见图 12.5-3)。

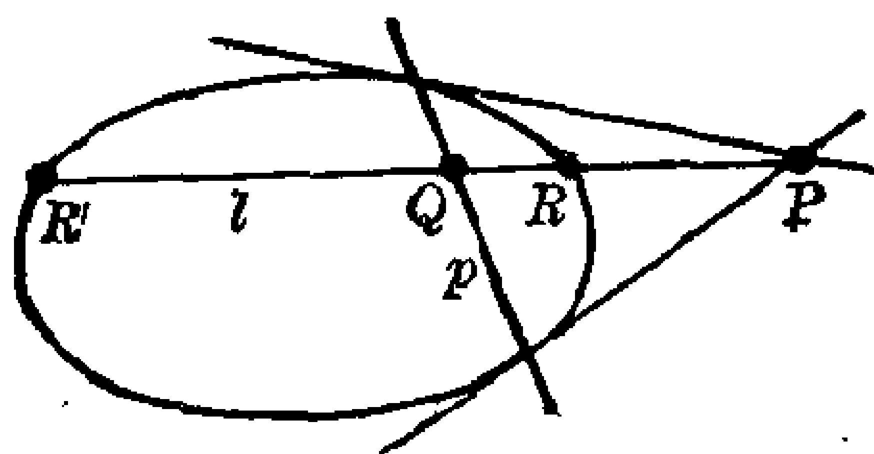


图 12.5-3　两个共轭点和它们的连线与二次曲线交点的调和关系

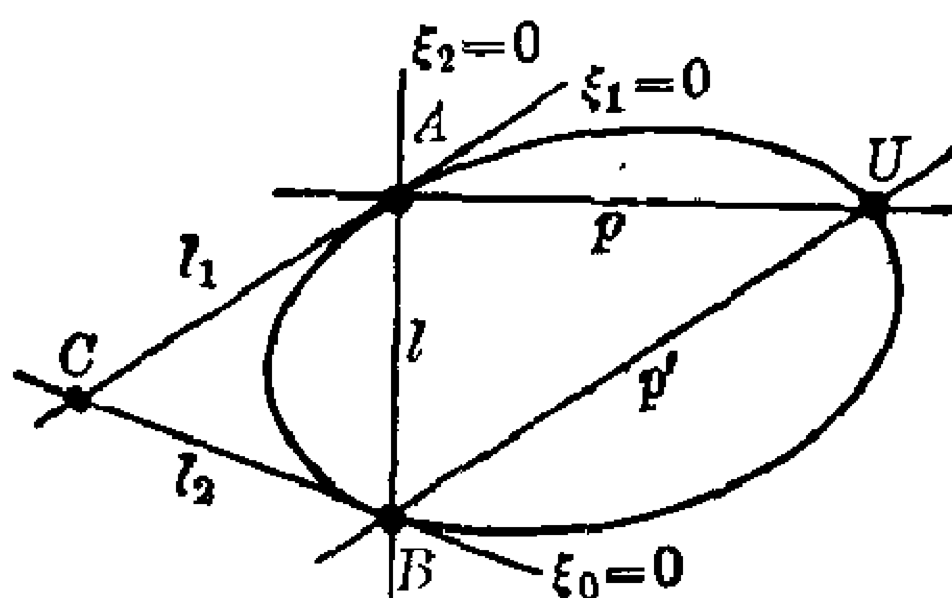


图 12.5-4　二次曲线的射影生成

因为二次曲线作为点集是**二阶曲线**，它们的对偶作为它们切线的包络是**第二类曲线**。若 P 是二次曲线 $\sum\limits_{i,j=0}^{2}a_{ij}x_ix_j=0$ 上一点，则在 P 点的切线(作为极线)有坐标 $u_i=\sum\limits_{j=0}^{2}a_{ij}x_j$。反之，从极线 p 的坐标 u_j 得到 P 的坐标为 $x_i=\sum\limits_{j=0}^{2}b_{ij}u_j(i=0,\ 1,\ 2)$; 这里阵 (b_{ij}) 是 (a_{ij}) 的逆阵，因为它描述逆映射。若把这些坐标代入二阶曲线的方程，就得到第二类曲线的方程 $\sum\limits_{i,j=0}^{2}b_{ij}u_iu_j=0$。

二次曲线的射影生成 若取二次曲线的两点 A, B 和 A, B 两点切线的交点 C 为坐标系的基点，因而有坐标 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$和 $C(0, 0, 1)$,则二次曲线的方程 $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j=0$ 有一个简单形式。若把 A 的坐标 a_i 和 B 的坐标 b_i 代入二次曲线的方程，就得到 $a_{00}=0$ 和 $a_{11}=0$。因为 C 共轭于 A 和 B, 所以有

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}a_ic_j=0 \text{ 和 } \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}b_ic_j=0。$$

代入这些值 a_i, b_i, c_i, 得到 $a_{02}=a_{12}=0$。在这个坐标系中，二次曲线的方程具形式 $2a_{01}x_0x_1+a_{22}x_2^2=0$, 即$(2x_0/a_{22})\cdot a_{01}x_1+x_2^2=0$ 或 $\xi_0\xi_1+\xi_2^2=0$, 其中$(2x_0/a_{22})=\xi_0$, $a_{01}x_1=\xi_1$ 和 $x_2=\xi_2$, 并由此规定了单位点。这个方程 $\xi_2/\xi_0+\xi_1/\xi_2=0$, 通过设 $\xi_2/\xi_0=u/v$ 和 $\xi_1/\xi_2=\frac{-u}{v}$,能分成二个方程$(A)\xi_1v+\xi_2u=0$ 和$(B)\xi_0u-\xi_2v=0$。对于(u, v)的各种值，每一个方程表示一直线束，因此它们通过一个射影映射而相关，对于同一值(u, v)可把二次曲线的点作为它们的交点确定下来(图 12.5-4)。直线束(A)的顶点是 A, 因为对 $a_1=0$, $a_2=0$ 有 $\xi_1=0$, $\xi_2=0$, 而由于 $b_0=0$, $b_2=0$, 所以直线束(B)的顶点是 B。

直线 $l=AB$ 用 $\xi_2=0$ 来表征，直线 $l_1=AC$ 用 $\xi_1=0$ 表征，直线 $l_2=BC$ 用 $\xi_0=0$ 表征。直线束 A 到直线束 B 上的射影映射将 A 的直线 $l=AB(v=0)$映成 B 的直线 $l_2=BC$, 将 A 的直线 $l_1=AC(u=0)$映成 B 的直线 $l=AB$, 因此它没有固定直线，它不是透视。

反之，顶点为 A 和 B 的两直线束如果是射影相关，但不是透视相关，则作为相应直线交点的集合生成二次曲线。若束 A 的直线 $l=AB$ 映成束 B 的直线 l_2, 又若束 B 的直线 l 是束 A 的直线 l_1 的象，则取点 A, B 和 $C=(l_1\cap l_2)$为坐标系的基点，它的单位点 U 是任何两条对应直线 p 和 p' 的交点。在此坐标系中，直线 l 用方程 $\xi_2=0$ 表征，直线 l_1 用 $\xi_1=0$ 表征，直线 l_2 用 $\xi_0=0$ 表征，直线 p 和 p' 用 $\xi_1+\xi_2=0$ 和 $\xi_0-\xi_2=0$ 表征。然而，直线束 A 到直线束 B 的，由对应直线 $\xi_1v+\xi_2u=0$ 和 $\xi_0u-\xi_2v=0$ 以相同比率 $u:v$ 所确定的直射变换具有把第一束的三条直线 l, l_1, p 变成第二束的三条直线 l_2, l, p' 的性质。根据主要定理，这与给定的直射变换相符。从直线方程中消去 u 和 v, 可以看出对应直线的交点描述二次曲线 $\xi_0\xi_1+\xi_2^2=0$。

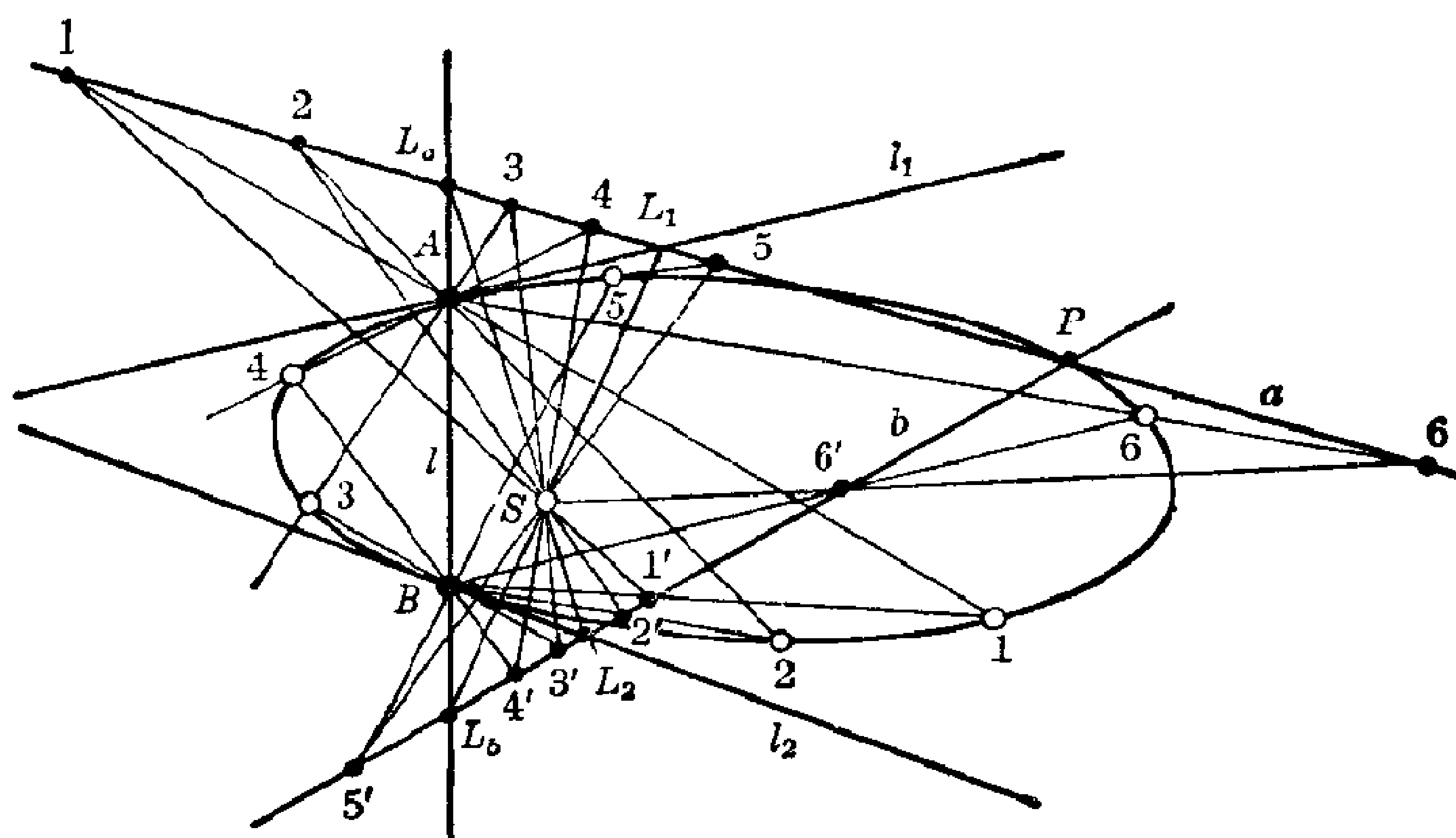


图 12.5-5　由三点和两条切线作出二次曲线

透视相关的两直线束，对应直线交于一条直线上，从此直线作射影，即生成一条退化的二次曲线。

为了要作一条过不共线的三给定点 A, B, P, 并在 A, B 以两条直线 l_1 和 l_2 作为切线的二次曲线，形成一个从直线束 A 到直线束 B 上的射影映射就够了。根据主要定理，这样一个直射变换由下列条件唯一确定，即直线束 A 的直线 l_1, $l=AB$ 和 $p=AP$ 分别对应于直线束 B 的直线 l, l_2 和 $p'=BP$。在此直射变换下，对应直线的交点唯一地生成一条二次曲线，它过点 A, B, P, 并在 A, B 以 l_1 和 l_2 为切线(见图 12.5-5)。

此直射变换也可用相交于 P 的两直线 a 和 b 之间的中心直射来构成，它们割直线 l_1 和 l 于点 L_1 和 L_a, 割直线 l 和 l_2 于点 L_b 和 L_2, 中心是 $S=(L_1L_b\cap L_aL_2)$。

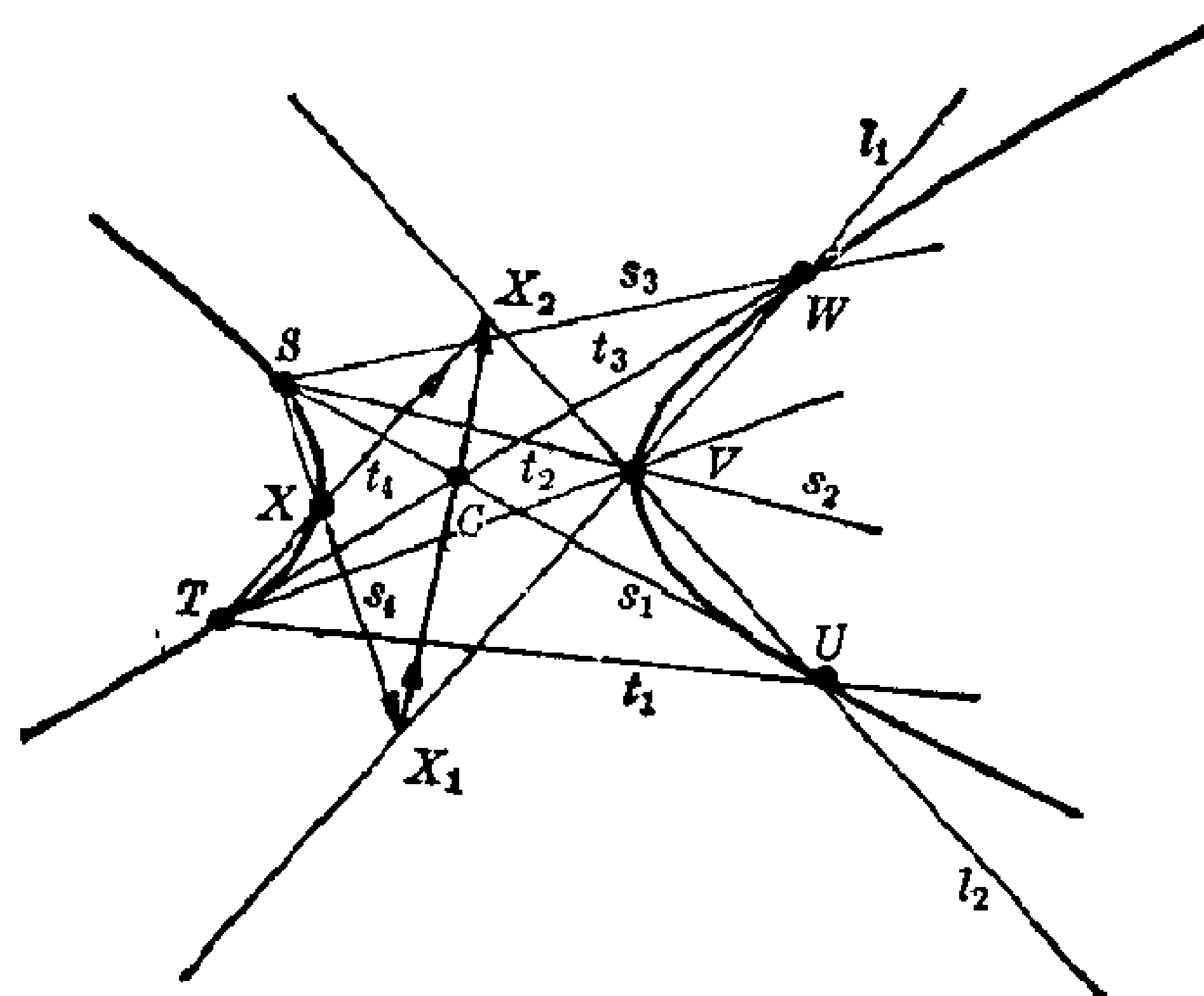


图 12.5-6　从任三点不共线的五点作出二次曲线

若要作一条二次曲线过任三点不共线的五个给定点 S, T, U, V, W, 则可选取其中两点作为射影相关，但不是透视相关的两线束的顶点(见图

12.5-6)，例如，S 有直线 $s_1=SU$, $s_2=SV$, $s_3=SW$; T 有 $t_1=TU$, $t_2=TV$, $t_3=TW$。由直线 s_i 变成直线 t_i 的条件所唯一确定的直线束 S 到直线束 T 上的直射变换定义一条二次曲线，它由对应直线的交点组成。这个直射变换能看作相交于点 V 的两直线 l_1 和 l_2 之间的中心直射变换。例如，若选取 $l_1=VW$ 和 $l_2=UV$，则此透视中心 $C=(s_1\cap t_3)$ 就是直线 s_1 和 t_3 的交点。对于割 l_1 于点 X_1 的直线 s_4，对应有直线 $t_4=TX_2$，其中 $X_2=(l_2\cap X_1C)$ 而两直线相割于二次曲线的一点 X。

因为直射变换由五个给定点唯一确定，而二次曲线又由这个直射变换唯一确定，所以这种作图给出过此五点的唯一的二次曲线。

过任三点不共线的五个给定点，恰有一条二次曲线。

作为用射影直线束产生的对偶，二次曲线能由射影相关的直线产生。若两条直线 l_1 和 l_2 非透视相关，则这两条直线相应点的连线包络一条非退化的二次曲线(见图 12.5-7)。若这两条直线射影相关，则此退化的二次曲线包络仅由两个点组成，即射影中心和这两条直线的交点。

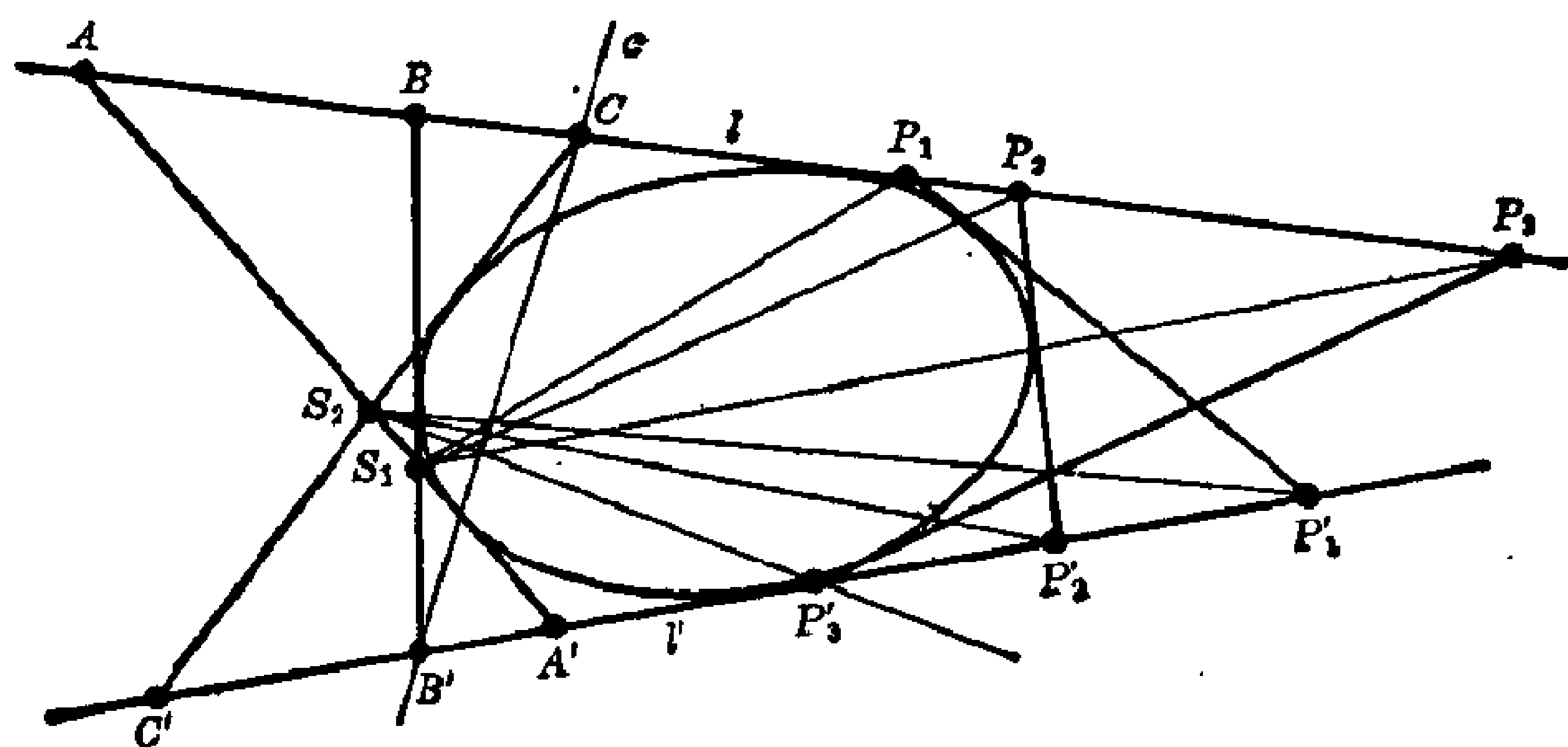


图 12.5-7 直线 l 和 l' 射影对应点的连线包络一条二次曲线

直线 l 和 l' 上点之间的射影对应由三对点确定。若给定 l 上三点 A, B, C 和它们在 l' 上的象 A', B', C'，则此对应能由两线束之间的透视类似地实现，例如，它们的顶点是点 $S_1=(AA'\cap BB')$ 和 $S_2=(AA'\cap CC')$，以直线 $c=CB'$ 作为"中心"。对应于任何别的点 P 的点 P'，由点 $(S_1P\cap S_2P')$ 必在 c 上这一事实来确定。直线 AA', BB', CC', $P_1P'_1$, … 都是二次曲线的切线。

正如过五点可以作出一条二次曲线一样，可以作出一条二次曲线切触任三条不共点的五条直线。

帕斯卡定理。 若二次曲线的六个点作为六边形的顶点，则对边的交

点共线(见图12.5-8)。

设 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ 是六边形的顶点，$A_3=(B_1C_2\cap B_2C_1)$，$B_3=(C_1A_2\cap C_2A_1)$，$C_3=(A_1B_2\cap A_2B_1)$ 是对边的交点，$D=(A_1B_2\cap A_2C_1)$ 和 $E=(A_1C_2\cap B_2C_1)$ 是两个别的交点。于是根据对应直线相交于此二次曲线的事实，顶点为 A_2 和 C_2 的两直线束射影相关。对于这个直射变换对应有直线 A_1B_2 到直线 C_1B_2 上的一个直射变换，在此直射下，点 A_1, C_3, D, B_2 映成点 E, A_3, C_1, B_2。因为点 B_2 固定，所以此直射变换是一个中心射影。射影的中心是直线 A_1E 和 DC_1 的交点。因此，直线 A_3C_3 也过点 B_3。

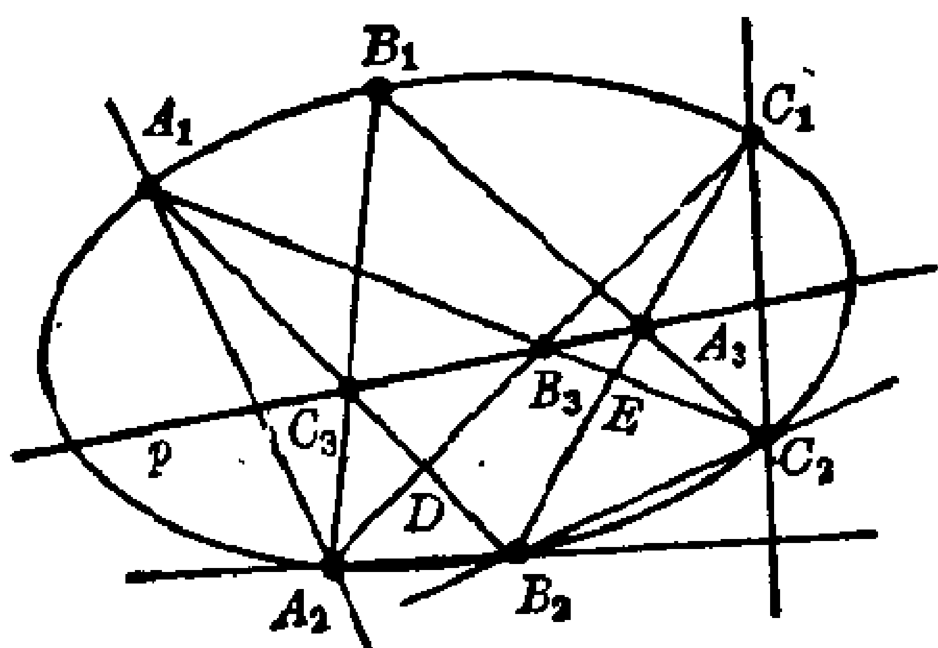


图12.5-8 帕斯卡定理

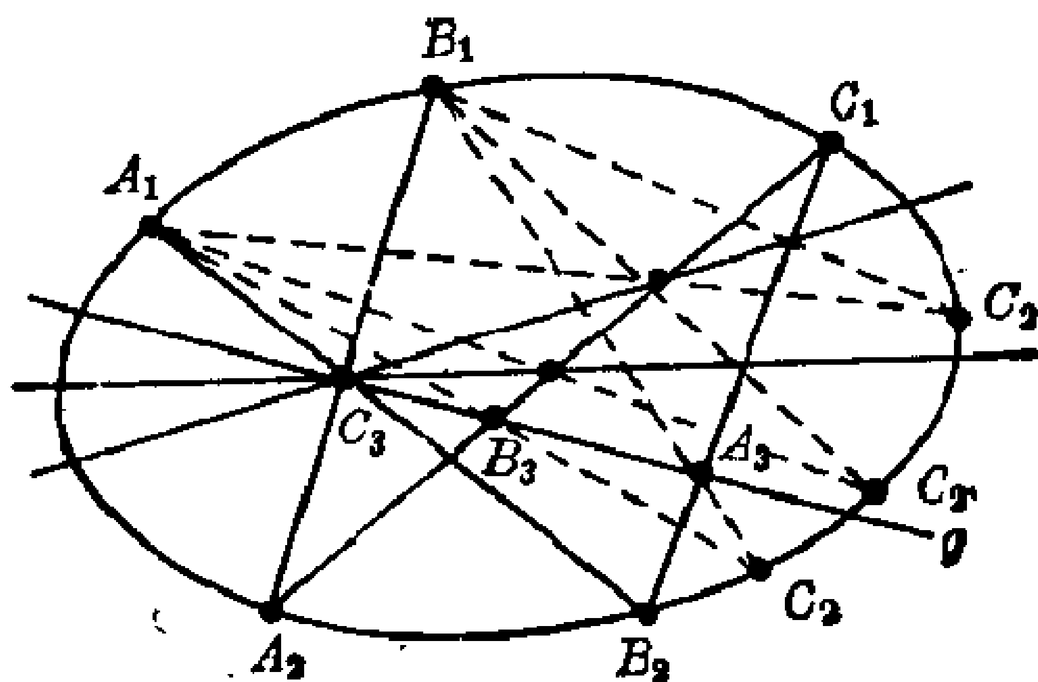


图12.5-9 根据帕斯卡定理由五个点作出二次曲线

帕斯卡定理给出过五点画一条二次曲线的另一种可能的作图方法。设 A_1, B_1, C_1, A_2, B_2，是任三点不共线的五个点。然后直线 A_1B_2 和 A_2B_1 相交于点 C_3。过 C_3 的任一直线 l 交直线 C_1A_2 和 C_1B_2 于点 B_3 和 A_3，然后直线 A_1B_3 和 B_1A_3 相交于点 C_2，当 l 遍历过 C_3 的所有直线时，就描绘一条过点 A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 的二次曲线(见图12.5-9)。

帕斯卡定理的对偶形式：布利安生(Brianchon)定理。若二次曲线的六条切线作为六边形的边，则对顶点的连线共点(见图12.5-10)。

与帕斯卡六边形对边的交点 A_3, B_3, C_3 相对偶，得到布利安生六边形对顶点的连线 a_3, b_3, c_3。与过 A_3, B_3, C_3 的帕斯卡直线 p 相对偶，得到作为 a_3, b_3, c_3 交点的布利安生点 P。

布利安生定理给出了一种以五条给定直线为切线作二次曲线适宜于制图用的方法。给定的五条直线 a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 应该无三条共点(见图12.5-11)。相对切线交点的三条连线中，仅有一条 $c_3=[(a_1\cap b_2), (b_1\cap a_2)]$ 是固定的。其他两条直线 a_3 和 b_3 由 c_3 上布利安生点 P 的任何位置确

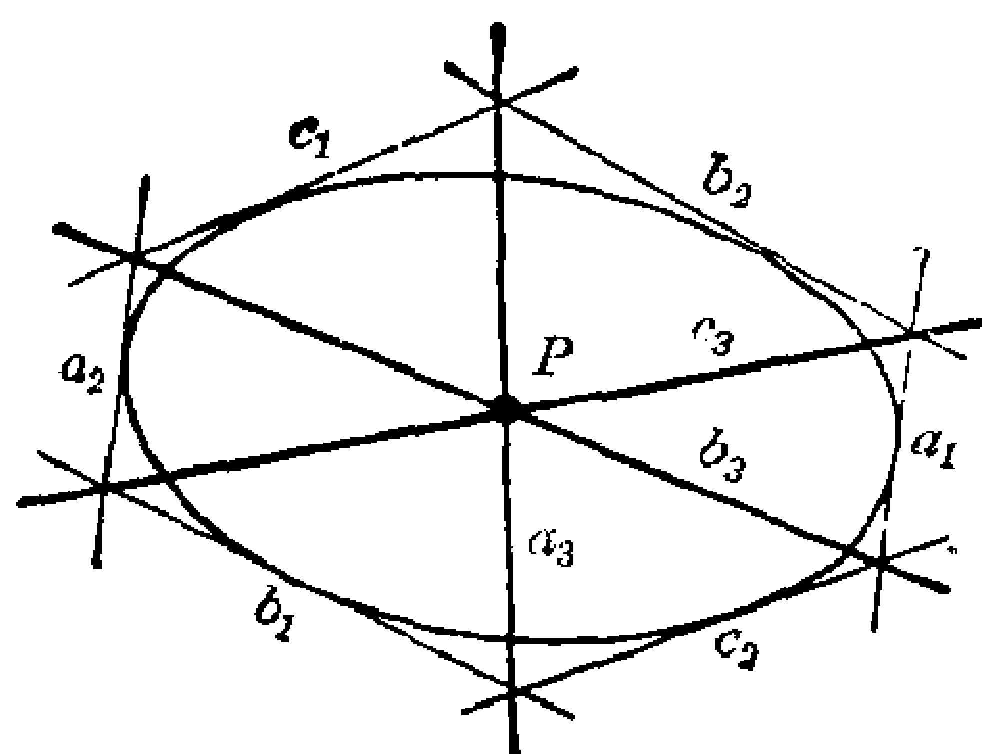


图 12.5-10 布利安生定理

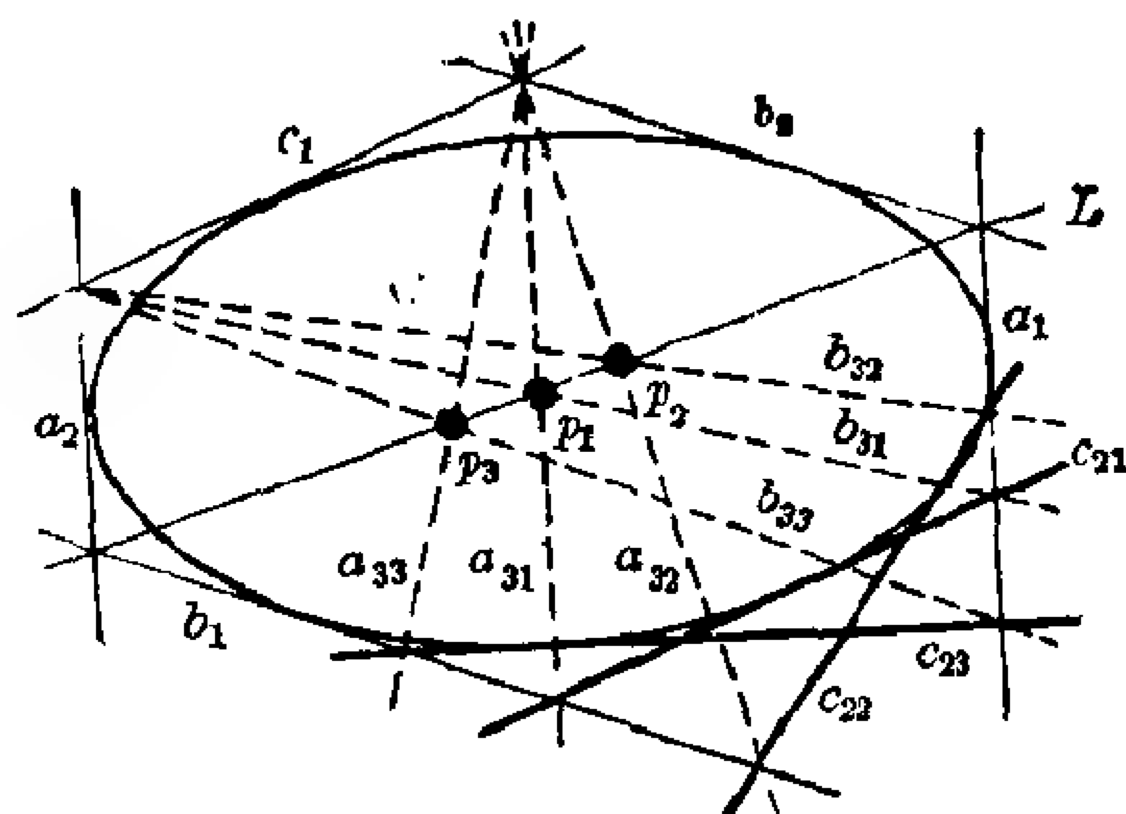


图 12.5-11 根据布利安生定理由五条切线作出二次曲线

定，而利用它们与 b_1 和 a_1 的交点，第六条切线 c_2 作为过这些点的直线就固定下来了。这种作图给出二次曲线作为所有直线的包络，这些直线连同五条给定直线一起组成布利安生六边形。

第13章 微分几何，凸体，积分几何

13.1 微分几何

微分几何用分析的概念和方法，特别是微分学和微分方程理论的概念和方法研究几何图形。如同解析几何一样，基本的几何空间或流形必须参考坐标。几何图形嵌入这些空间，例如一般的曲线或曲面由充分可微的方程或函数表征。为了理解微分几何的比较高深的部分，必须十分熟悉张量演算；再进一步，拓扑和某些其他数学分支的知识也是必要的。

欧几里得空间的曲线论

曲线的定义 设 $e_i(i=1, 2, 3)$ 是三个两两正交的单位向量，它们组成3维欧几里得空间 E_3 的一个标准正交三面体，再设 $x_i(i=1, 2, 3)$ 是关于这个三面体的笛卡尔坐标。所谓曲线段的参数表示，理解为将曲线上一点的坐标 x_i 表成区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一个实参数 t 的函数：$x_i=f_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$。通常把三个方程概括为一个向量方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{3} f_i(t)e_i。$$

函数 $f_i(t)$ 必须充分连续可微；通常要求开头三阶导数存在和连续就行了。所谓一条曲线，理解为这样的一个连通点集 C，使得对于 C 的任意一点 P，存在一个邻域 U，使 C 的落在 U 内的点能表示成曲线的一段，曲线段的参数几乎可以任意选取；若 t 是一个参数，我们能用参数变换 $t'=\varphi(t)$ 得到任何别的参数 t'，其中函数 $\varphi(t)$ 往往充分连续可微且其导数 $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ 不为零。重要的是不依赖于参数的特殊选取的曲线几何性质，而不在于表示的比较随意的解析形式。通常可选取3维欧几里得空间 E_3 的

坐标系以及曲线 C 上的参数 t，使得表示 C 的函数尽可能地简单，从而使计算变得较为容易。

一条曲线也能用两个独立的方程

$$g(x_1, x_2, x_3)=0,\ h(x_1, x_2, x_3)=0$$

以隐式表示给出，即在几何上作为两个曲面 $g=0$, $h=0$ 的交线给出。最简单的空间曲线之一是**圆柱螺旋线**，它可以用如下形式表示：

$$\boldsymbol{x}(t)=a(\boldsymbol{e}_1\cos t+\boldsymbol{e}_2\sin t)+bt\boldsymbol{e}_3。$$

螺丝的螺纹就是一条圆柱螺旋线，其中 $2a$ 是直径，$2\pi b$ 是螺旋的螺距（见图13.1-1）。

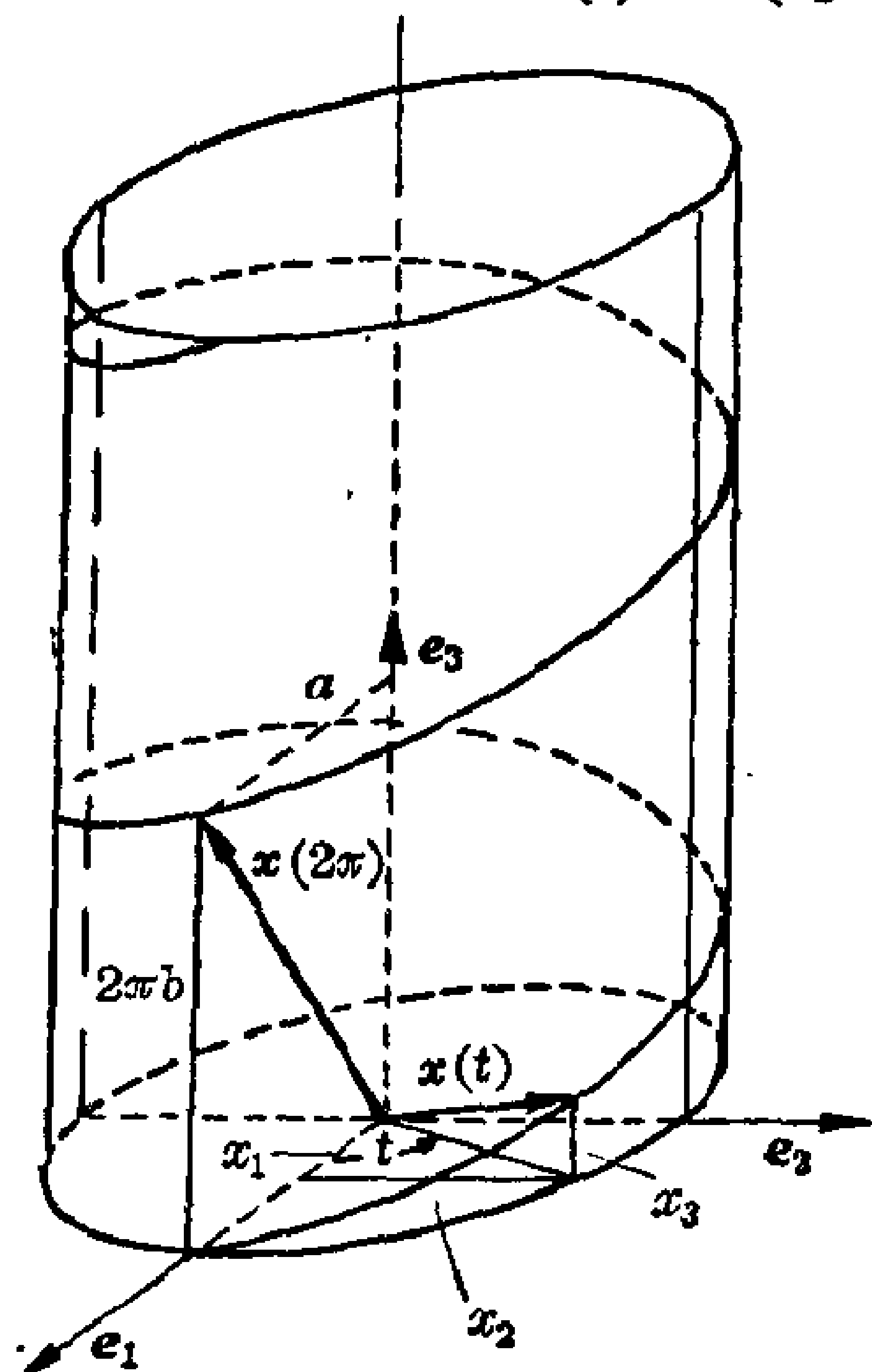


图 13.1-1 圆柱螺旋线

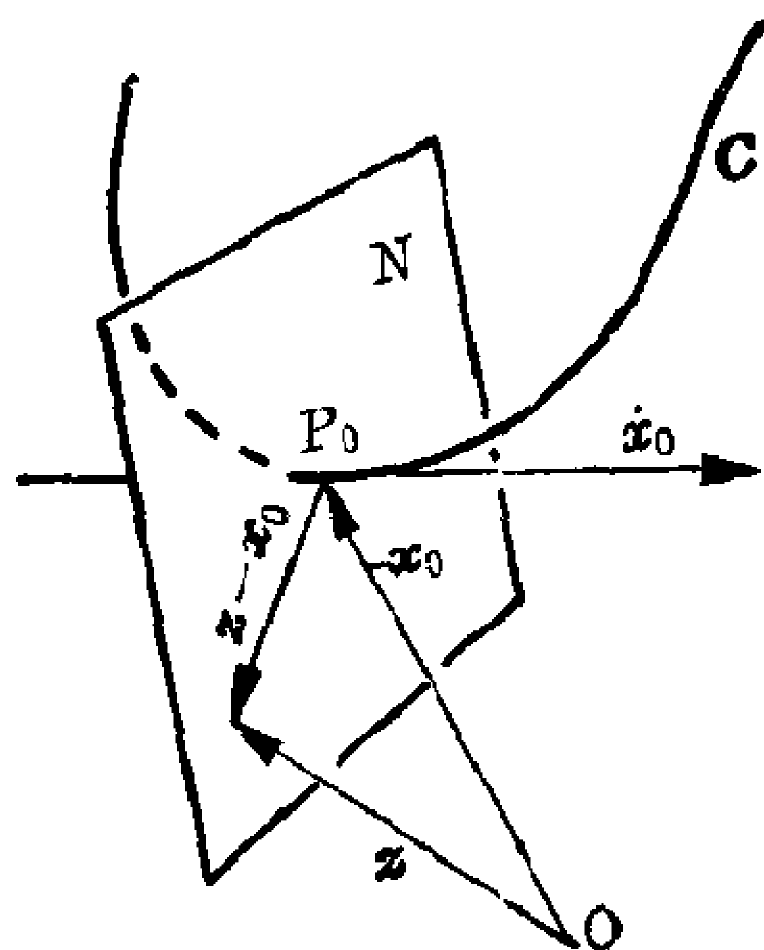


图 13.1-2 在点 P_0 的法平面 N

切线 若过曲线 C 的两点 P_1, P_2 引一条直线(割线)，然后设 P_1 和 P_2 趋于 C 的固定点 P_0，它的位置向量为 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_0(t)$，则此割线趋于过 P_0 的一条直线，称为**曲线 C 在 P_0 点的切线**。若 P_0 是**正则点**，即至少有一个导数 $\frac{df_i(t_0)}{dt}$ 不为零；用向量形式表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0=\frac{d\boldsymbol{x}(t_0)}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{df_i(t_0)}{dt}\neq 0,$$

则由上面所要求的可微性条件保证了这条切线的存在。非正则点称为**奇点**，它们的性质必须分开来研究。在正则点 P_0, $\dot{\boldsymbol{x}}_0$ 是在点 P_0 的切线的方向向量。至于切线上一点的位置向量 $\boldsymbol{y}$，通过引进参数 $\tau(-\infty<\tau<+\infty)$，就得到所给的方程。

切线方程	$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_0+\dot{\boldsymbol{x}}_0\tau$

过P_0点且垂直于切线的平面称为$\boldsymbol{C}$在P_0的**法平面**N(见图13.1-2)。若$\boldsymbol{z}$是法平面上一点的位置向量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$记两个向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$的纯量积，则法平面N的方程为：

法平面方程	$\dot{\boldsymbol{x}}_0\cdot(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_0)=0$

密切平面 假设曲线$\boldsymbol{C}$不是一条直线。于是一般地，它的任意三点P_1, P_2, P_3不落在同一直线上。因此，任何这样的三点决定一个平面。若P_1, P_2, P_3趋于$\boldsymbol{C}$上同一点P_0，则在极限情况下它们的平面收敛于过P_0的一个平面，称为曲线$\boldsymbol{C}$在P_0的**密切平面**T(见图13.1-3)。若位置向量$\boldsymbol{x}(t)$的一阶，二阶导数于$t=t_0$线性独立，即$\dot{\boldsymbol{x}}_0\times\ddot{\boldsymbol{x}}_0\neq\boldsymbol{0}$，则密切平面的存在性就有保证。这里$\ddot{\boldsymbol{x}}_0=\frac{d_2\boldsymbol{x}(t_0)}{dt^2}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\frac{d^2f_i(t_0)}{dt^2}$; $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$记向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的**向量积**。若$\boldsymbol{z}$是密切平面$T$上一点的位置向量，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$记向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$的纯量三重积，即$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，则密切平面的方程是

密切平面的方程	$(\dot{\boldsymbol{x}}_0\times\ddot{\boldsymbol{x}}_0)\cdot(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_0)=0$ 或 $(\dot{\boldsymbol{x}}_0, \ddot{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_0)=0$

曲线与它的切线有**一阶切触**，即在参数的适当选取下，曲线的一阶导数与切线在切点相符。密切平面可以定义为与曲线在点P_0有二阶切触的平面，即指它的一阶、二阶导数$\dot{\boldsymbol{x}}_0$, $\ddot{\boldsymbol{x}}_0$必须落在这个平面上。若$\dot{\boldsymbol{x}}_0\times\ddot{\boldsymbol{x}}_0\neq\boldsymbol{0}$，则密切平面是唯一确定的。这是在$P_0$点由向量$\dot{\boldsymbol{x}}_0$和$\ddot{\boldsymbol{x}}_0$所张成的平面。垂直于密切平面和法平面的平面称为在$P_0$的**从切平面**$R$。若$\boldsymbol{z}$点是此平面上一点的位置向量，则得到

从切平面方程	$(\dot{\boldsymbol{x}}_0, \dot{\boldsymbol{x}}_0\times\ddot{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_0)=0$

法线 落在法平面上且过P_0点的任意一条直线都称为**$\boldsymbol{C}$在P_0点的法线**。落在密切平面上的法线称为**$\boldsymbol{C}$在P_0点的主法线**，落在从切平面上的法线称为**副法线**。主法线的方向向量是$(\dot{\boldsymbol{x}}_0\times\ddot{\boldsymbol{x}}_0)\times\dot{\boldsymbol{x}}_0$，副法线的方向向量是$\dot{\boldsymbol{x}}_0\times\ddot{\boldsymbol{x}}_0$(若$\dot{\boldsymbol{x}}_0\times\ddot{\boldsymbol{x}}_0\neq\boldsymbol{o}$时)。若在曲线$\boldsymbol{C}$的每一点$P$沿切线，主法线和副法线方向引三个长度为1的向量$\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$，则有一个标准正交的三面体，称为（唯一决定的）**曲线的活动三面体**。活动三面体（n面体）的

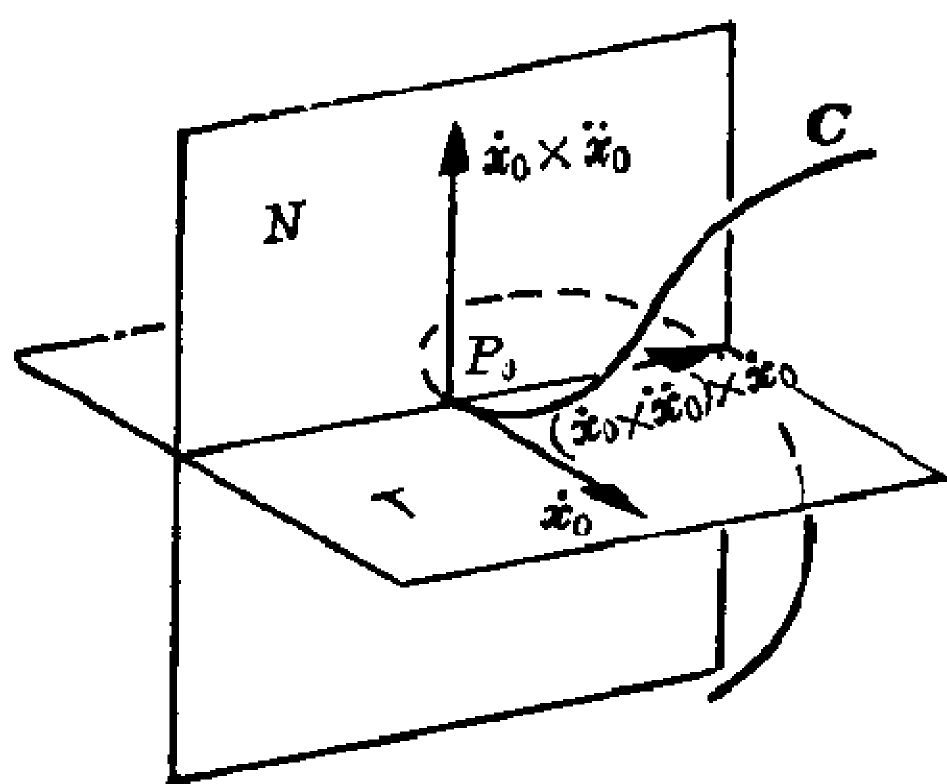


图 13.1-3 在 P_0 点的密切平面 T

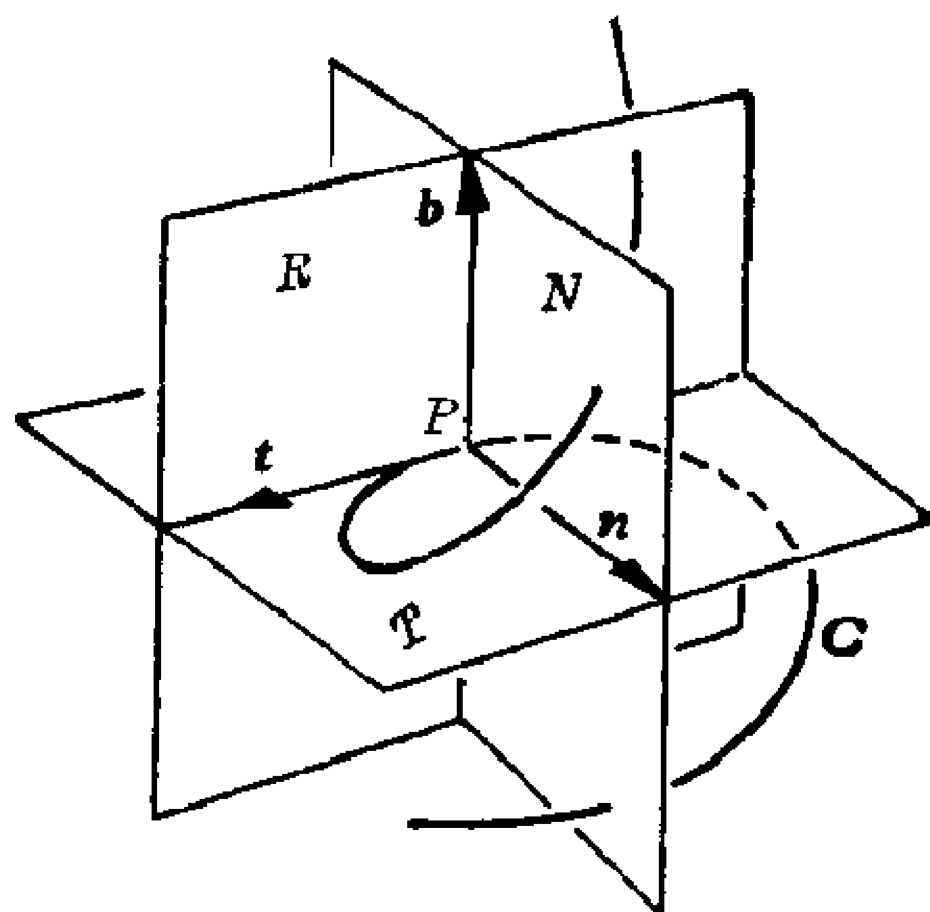


图 13.1-4 曲线的活动二面体

概念已被证明不仅在曲线论中，而且在整个微分几何中是很有用的(见图 13.1-4)。

弧长 在 E_3 中一条折线的长度可定义为它各段长度 $\Delta\boldsymbol{x}$ 的和。微分几何所讨论的曲线都可用折线来任意紧密地逼近。于是，近似折线的长度 $\Sigma\Delta\boldsymbol{x}$ 趋于一个极限值 l, 称为**曲线的长度**。对于用参数表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$, $0\leqslant t\leqslant a$ 的曲线段 $\boldsymbol{C}$, 有 $\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t+\Delta t)-\boldsymbol{x}(t)$, 可以证明，在通常的可微性条件下，上述曲线段的长度等于积分

$$l=\int_0^a|\dot{x}|dt=\int_0^a\left[\sum_{i=1}^3(\dot{f}_i(t))^2\right]^{1/2}dt;$$

这里 $|\dot{x}|=\sqrt{\dot{x}\cdot\dot{x}}$ 记向量 $\dot{x}$ 的长度。如果只考虑从参数为 0 的点到参数为 t 的点的弧 $\boldsymbol{C}_t$, 则此弧长 s 是 t 的函数:

$$s=s(t)=\int_0^t|\dot{x}(t)|d\tau。$$

若 $\boldsymbol{C}$ 是正则的，就得到

$$\frac{ds}{dt}=|\dot{x}(t)|>0,$$

从而 s 可作为新的参数引进，这个新参数有几何上的特点。参数 s 称为 $\boldsymbol{C}$ **的弧长或自然参数**(见图 13.1-5)。位置向量关于弧长的导数是单位切向量

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{x}'=\frac{d\boldsymbol{x}}{ds},\ |\boldsymbol{x}'|=1。$$

由此得出 $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}''=0$, 即 $\boldsymbol{x}''=\dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}$ 垂直于 $\boldsymbol{x}'$, 因而当 $\boldsymbol{x}''\neq\boldsymbol{0}$ 时，它是主法线的方向向量。

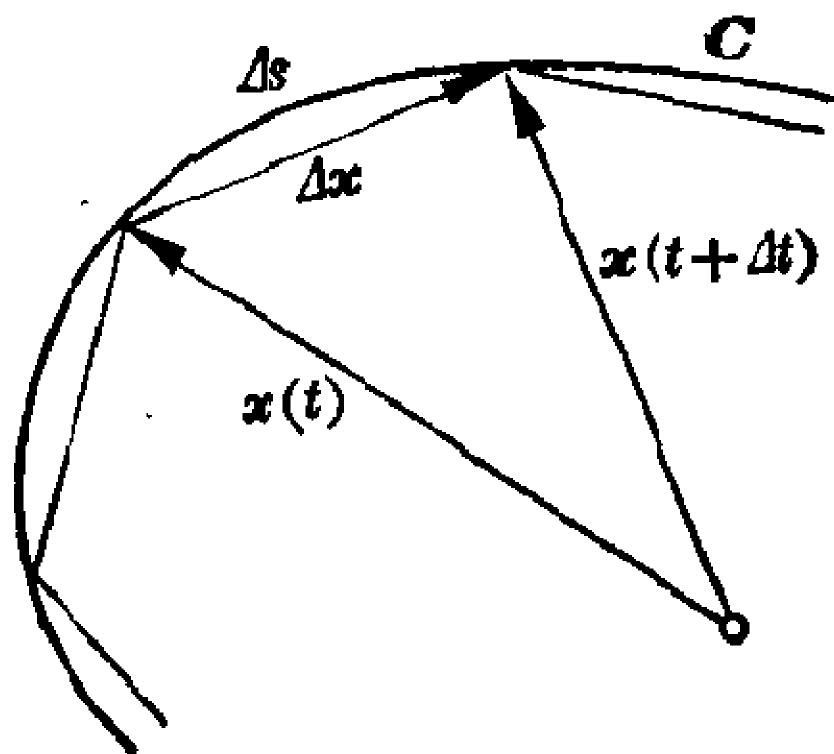


图13.1-5　弧长的定义

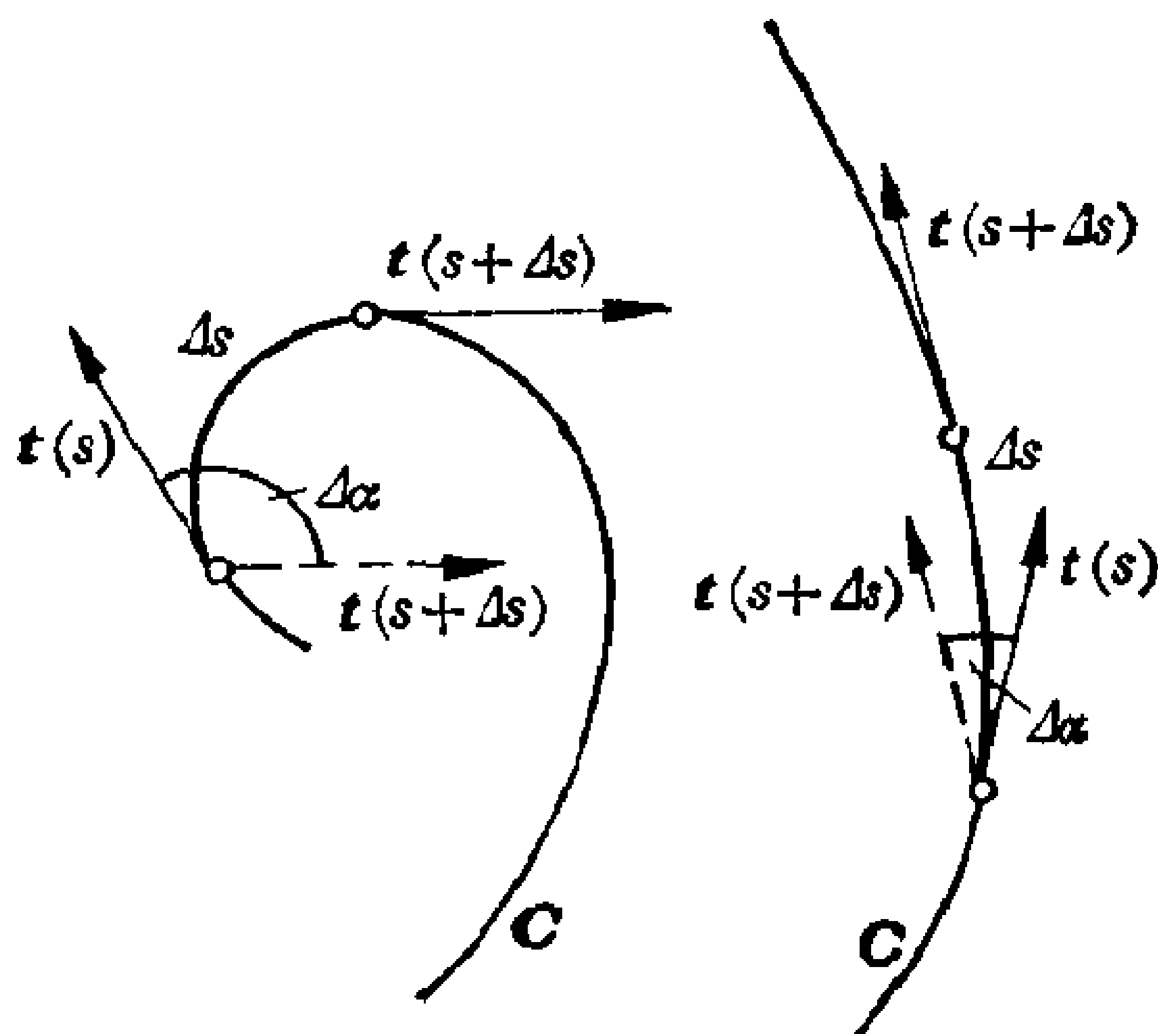


图13.1-6　曲率定义

曲率　设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$, $0\leqslant s\leqslant l$ 是用弧长作参数的曲线段 $\boldsymbol{C}$。在参数为 s 和 $s+\Delta s$ 的点 $P(s)$ 和 $P(s+\Delta s)$ 的切向量 $\boldsymbol{t}(s)$ 和 $\boldsymbol{t}(s+\Delta s)$ 互相形成一个角 $\Delta\alpha$。现在若 Δs 趋于 0, 则存在极限值

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\varkappa(s),$$

它称为 *$\boldsymbol{C}$ 在点 $P(s)$ 的曲率*(图 13.1-6)。对于直线总有 $\Delta\alpha=0$, 即曲率 $\varkappa(s)$ 恒为 0。

因此，曲率是曲线在形态上偏离直线的一种度量。若 s 是 $\boldsymbol{C}$ 的弧长，则 $\varkappa(s)=|\boldsymbol{x}''(s)|$。

若 $\boldsymbol{n}$ 记主法线方向上适当定向的单位向量，则有 $\boldsymbol{x}''=\varkappa(s)\boldsymbol{n}$。因此 $\boldsymbol{x}''$ 称为*曲率向量*。

挠率　平面曲线在任意一点的密切平面就是这条曲线所在的同一个平面。因此，平面曲线的单位副法线向量 $\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}''|}$ 是常向量(反之亦然)。所以垂直于密切平面的副法线向量 $\boldsymbol{b}$ 的变差就是密切平面变差的一种度量，也是曲线 $\boldsymbol{C}$ 在所讨论的点偏离它在密切平面上的投影的一种度量。若 $\Delta\beta$ 记点 $P(s)$ 和 $P(s+\Delta s)$ 的副法线向量 $\boldsymbol{b}(s)$ 和 $\boldsymbol{b}(s+\Delta s)$ 之间的夹角，则一般地存在极限值

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta s}=\tau(s),$$

称为 *$\boldsymbol{C}$ 在点 $P(s)$ 的挠率*。

自然方程　曲率、挠率和弧长是曲线在欧几里得运动下的不变量，即

若一条曲线(例如由金属丝作成的一条曲线)在空间作刚体运动,则曲率、挠率和弧长并不改变。此外，这些量不依赖于参数表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 的任意选择，因此它们也是在参数变换下的不变量。这两个不变性直接从上面给出的定义得到。这三个量 s, $\varkappa$, τ 用下面两个方程联系起来:

$$\varkappa=\varkappa(s)\geqslant 0,\quad \tau=\tau(s);$$

它们称为**曲线的自然方程**。下面的定理可当作曲线论的主要结果；它说明 $\varkappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 形成曲线 C 的**不变量完备系**:

对于任何给定的连续函数 $\varkappa=\varkappa(s)>0$ 和 $\tau=\tau(s)$, 在欧几里得运动的范围内，有一条且仅有一条曲线 C, 使得 $\varkappa(s)$ 是 C 的曲率和 $\tau(s)$ 是 C 的挠率。

弗雷奈(Frenet)公式 这个定理的证明用活动三面体的方法导出(见图 13.1-7)。对于活动三面体的向量 $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$的变差，成立如下的**弗雷奈公式**:

弗雷奈公式	$\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\qquad \varkappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ $\dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\varkappa(s)\boldsymbol{t}(s)\qquad +\tau(s)\boldsymbol{b}(s)$ $\dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\qquad -\tau(s)\boldsymbol{n}(s)$

因为 $\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\boldsymbol{x}''$ 是曲率向量，所以第一个方程已经证明了。由于 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{t},\boldsymbol{b}$ 是两两正交的单位向量，因此有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$ 和 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}=0$; 微分之，得 $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'=0$, $\boldsymbol{t}'\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{t}=-\boldsymbol{t}'\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}$。取向量 $\boldsymbol{b}'=\alpha_3\boldsymbol{t}+\beta_3\boldsymbol{n}+\gamma_3\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{n}'=\alpha_2\boldsymbol{t}+\beta_2\boldsymbol{n}+\gamma_2\boldsymbol{b}$ 与适当的向量 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{t}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 的纯量积，就能决定分量 α_i, β_i, γ_i($i=2, 3$)。得到: $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{b}=\gamma_3=0$; $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{t}=\alpha_3=-\boldsymbol{t}'\cdot\boldsymbol{b}=-\varkappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0$; $\boldsymbol{b}'=\beta_3\boldsymbol{n}$。按照挠率的定义，得出 $|\boldsymbol{b}'|=|\beta_3|=|\tau|$。为了与 $\tau(s)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\beta}{\Delta s}$ 相一致，必

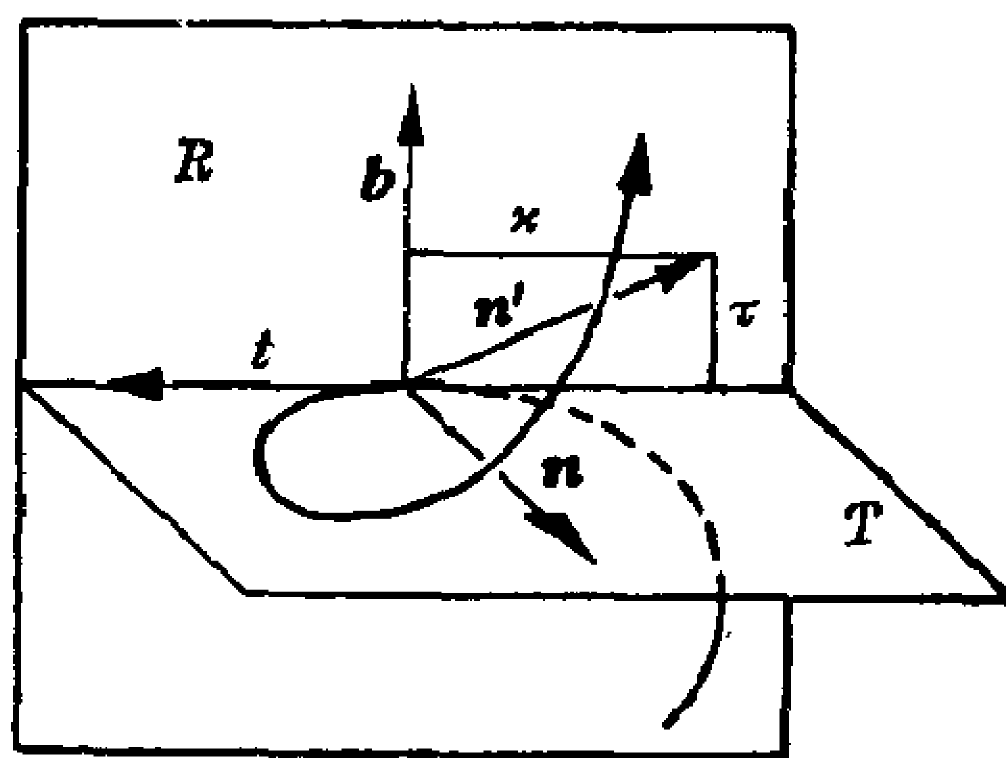


图 13.1-7 $\dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds}$ 关于活动三面体 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ 的分解

须设 $\boldsymbol{b}'=-\tau(s)\boldsymbol{n}$。对于第二个方程：$\beta_2=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'=0$；$\alpha_2=\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{t}=-\boldsymbol{t}'\cdot\boldsymbol{n}=-\varkappa(s)$ 和 $\gamma_2=\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}=\tau(s)$，即 $\boldsymbol{n}'=-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b}$。

对于给定的连续函数 $\varkappa(s)>0$ 和 $\tau(s)$，弗雷奈公式是确定 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ 的线性微分方程组。一旦得到 $\boldsymbol{t}(s)$ 后，就能通过 $\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}=\boldsymbol{t}(s)$ 的积分找到曲线；例如圆柱螺旋线表征为其曲率和挠率是常数的曲线。

欧几里得空间的曲面论

曲面的定义　若在 E_3 中一点的三个坐标 $x_i(i=1, 2, 3)$ 给定为两个参数 u 和 v 的函数 $x_i=f_i(u, v)(i=1, 2, 3)$，或者用向量形式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)=\sum_{i=1}^{3}f_i(u, v)\boldsymbol{e}_i,$$

其中 u 和 v 在某个平面区域 D 内变化，这就称为**曲面片的参数表示**。

若 E_3 中连通点集 $\boldsymbol{S}$ 的每一点 P，都存在一个邻域 U 使得落在 U 内的 $\boldsymbol{S}$ 的点有一个作为曲面片的参数表示，则此连通点集 $\boldsymbol{S}$ 称为**曲面**。若参数 u 和 v 的值(亦称**曲面上的坐标**)给定，则曲面片上点的位置是唯一确定的；例如，地球表面上一点是由它的**纬度**和**经度**定下来的。在广泛的范围内，曲面片的参数能任意选取；若存在如下形式的一一对应变换

$$\begin{aligned}u'&=u'(u, v)\\ v'&=v'(u, v)\end{aligned}\quad \text{行列式}\quad \begin{vmatrix}\frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v}\\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0;$$

则可用平面区域 D' 内的参数 u' 和 v' 代替 u 和 v，这就称为**参数变换**。曲面论的几何概念必须是在欧几里得运动下和在参数变换下**不变的**。一个曲面也能用方程 $g(x_1, x_2, x_3)=0$ **隐式地**给出。

切平面　为了研究曲面在参数为 u_0 和 v_0 的一点 P_0 的邻域内的性质，考虑曲面上过 P_0 点的曲线。任意一条这种曲线能以参数表示给出，形如：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(u_0+u(t), v_0+v(t)),$$

其中 $u(0)=v(0)=0$。在特殊情况下，$u=u_0+t$, $v=v_0$，即对于所有 t, $v(t)=0$，就得到过 P_0 的**参数曲线**，沿着这条曲线 $v=v_0$ 是常数。类似地，若 $u=u_0$, $v=v_0+t$，则得到另一条参数曲线，沿此曲线 $u=u_0$ 是常数。点 P_0 是这两条参数曲线的交点。在地球表面上的地面坐标中，经线和纬度圆就是相应的参数曲线。

过 P_0 点的曲线在 $t=0$ 的点即在 P_0 的切向量，可通过参数表示的微分而得到：

$$\left.\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|_{t=0}=\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}\frac{du(0)}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}\frac{dv(0)}{dt},$$

其中 $\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}=\frac{\partial \boldsymbol{x}(u_0, v_0)}{\partial u}$，$\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}=\frac{\partial \boldsymbol{x}(u_0, v_0)}{\partial v}$。从这些公式看到：向量 $\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}$ 是参数曲线的切向量。若这两个向量线性独立，则曲面上过 P_0 点的所有曲线的切向量一定落在过 P_0 点由 $\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}$ 所张成的平面内。这个平面称为曲面在 P_0 的**切平面**。若 a 和 b 是切平面上一点的参数，$\boldsymbol{z}$ 是这一点的位置向量，则得到**切平面的参数表示**：

切平面方程	$\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}\right)\cdot(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_0)=0$

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}_0+a\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}+b\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}。$$

只有当 $\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}$ 线性独立时，这些公式才有意义：参数曲线的切向量为线性独立的点称为**正则点**；否则称为**奇点**。显然，$\boldsymbol{S}$ 上一点 P_0 当且仅当 $\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}\neq\boldsymbol{0}$ 时，它是正则点。

在地球表面的地面坐标中，极点是奇点，圆锥的顶点对于任意的参数表示都是奇点，因为圆锥在这一点没有切平面。在微分几何中，只处理正则曲面；而奇点总得分开来处理。

过 P_0 且垂直于切平面的直线称为**法线**(见图 13.1-8)。

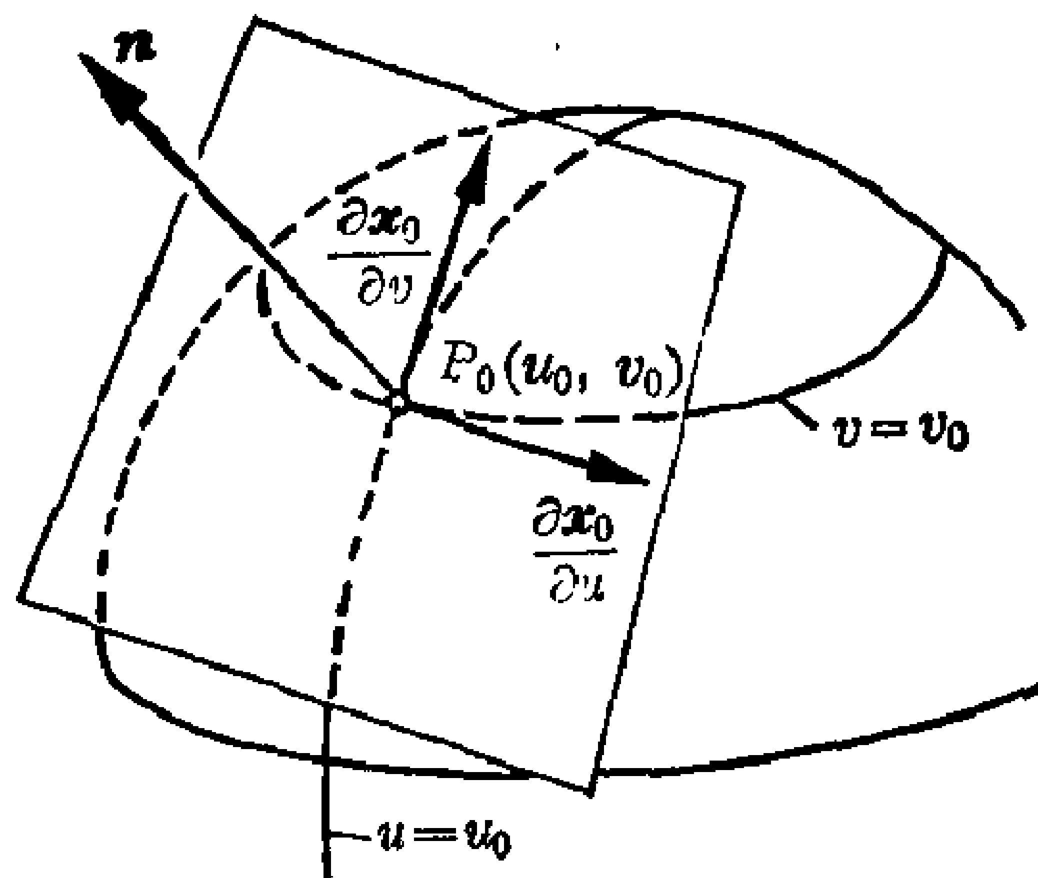


图 13.1-8 切平面和曲面法线

单位法向量	$\boldsymbol{n}=\dfrac{\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}}{\left\lvert\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial v}\right\rvert}$

内蕴几何 在微分几何的早期，把曲面当作嵌入 3 维欧几里得空间

的固体的外部边界，或者当作"无限薄"的固体。几何学家蒙日可作为这种思想的创始人；他写了第一本微分几何教科书(《分析在几何中的应用》，巴黎 1809 年)。与大地测量的实际问题相联系，高斯提出了这样一个问题：如何从曲面本身上的测量，引出曲面的空间形式的结论？——这个问题对于确定地球的形式是十分重要的，地球原来被当作一个球，以后认为它是扁平的旋转椭球，今天则认为这是不能用初等方式表示的曲面，即所谓**地球体**。这些问题的研究使高斯得出曲面的内蕴几何；在他的论文"**关于曲面的一般研究**"(1827年)中叙述了这个问题。在曲面论的这一部分中，不将曲面作为固体，而是当作皮革，它能**弯曲**但不能**伸长**。所谓曲面的**弯曲**，理解为曲面的连续变形，在这种变形下，曲面上所有曲线的长度保持不变。更一般地说，两个曲面 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}''$ 称为**等距的**是指若 $\boldsymbol{S}$ 上的点 P 和 $\boldsymbol{S}'$ 上的点 P' 之间存在一一对应 $P'=\varphi(P)$，使得在此对应下相互变换而成的曲线具有相同的长度。于是这个对应 φ 称为**等距映射**或称**等距**；例如，一个锥面若沿着它的一条母线割开，则它能等距地映射到一个平面区域上。曲面 $\boldsymbol{S}$ 弯曲成曲面 $\boldsymbol{S}'$ 也是 $\boldsymbol{S}$ 到 $\boldsymbol{S}'$ 上的一个等距映射；但是两个等距曲面不一定具有从一个曲面到另一个曲面的连续弯曲。在等距映射下保持不变的曲面性质，可以通过曲面上的测量来建立；它们就构成**曲面的内蕴几何**的内容。在这种意义下，**平面几何**是平面的内蕴几何，**球面三角学**是球面的内蕴几何。

曲面的弧长元素　内蕴几何完全由曲面的弧长元素所支配。设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(u(t),\ v(t))$；$t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 是曲面 $\boldsymbol{S}$ 上的一条曲线 $\boldsymbol{C}$。关于 t 进行微分，得到切向量

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\frac{dv}{dt}。$$

由 $\boldsymbol{C}$ 的弧长 $s(t)$ 定义，有 $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=|\dot{\boldsymbol{x}}|^2=\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$。代入到上面 $\boldsymbol{x}$ 的表达式，得

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2。$$

若按高斯引进的记号，

$$E(u,\ v)=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u},\quad F(u,\ v)=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v},\quad G(u,\ v)=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v},$$

并且只写出微分而不用关于 t 的导数写法，则得到**弧长元素**或曲面的**第一基本形式**。

曲面的第一基本形式	$ds^2=E(u,v)du^2+2F(u,v)du\,dv+G(u,v)dv^2$

曲线 C 的长度 l 用弧长元素表达如下:

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}\cdot\dot{x}}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt;$$

在积分中, E, F, G 的变量 u 和 v 自然得用曲线方程 $u=u(t)$ 和 $v=v(t)$ 代入。

利用第一基本形式不仅能够计算弧长，而且也能定义和确定在曲面上由测量可以得到的所有量; 例如, 曲面 S 上相交于 P_0 点的两条曲线之间的夹角, 还有 S 上一个点集的面积,都能用这个方式定义。

S 上一个区域 U 的面积 $A(U)$ 是

$$A(U)=\iint(EG-F^2)^{1/2}du\,dv。$$

被积函数 $dA=(EG-F^2)^{1/2}du\,dv$ 称为 **S 的面积元素**, 可直观地看作参数曲线网的一块无穷小网格的面积(见图 13.1-9); $(EG-F^2)^{1/2}\Delta u\,\Delta v$ 是由向量 $\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u$ 和 $\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v$ 张成的平行四边形的面积。在计算 $A(U)$时, 积分取遍使 $x(u, v)$落在 U 中的所有参数 u 和 v。

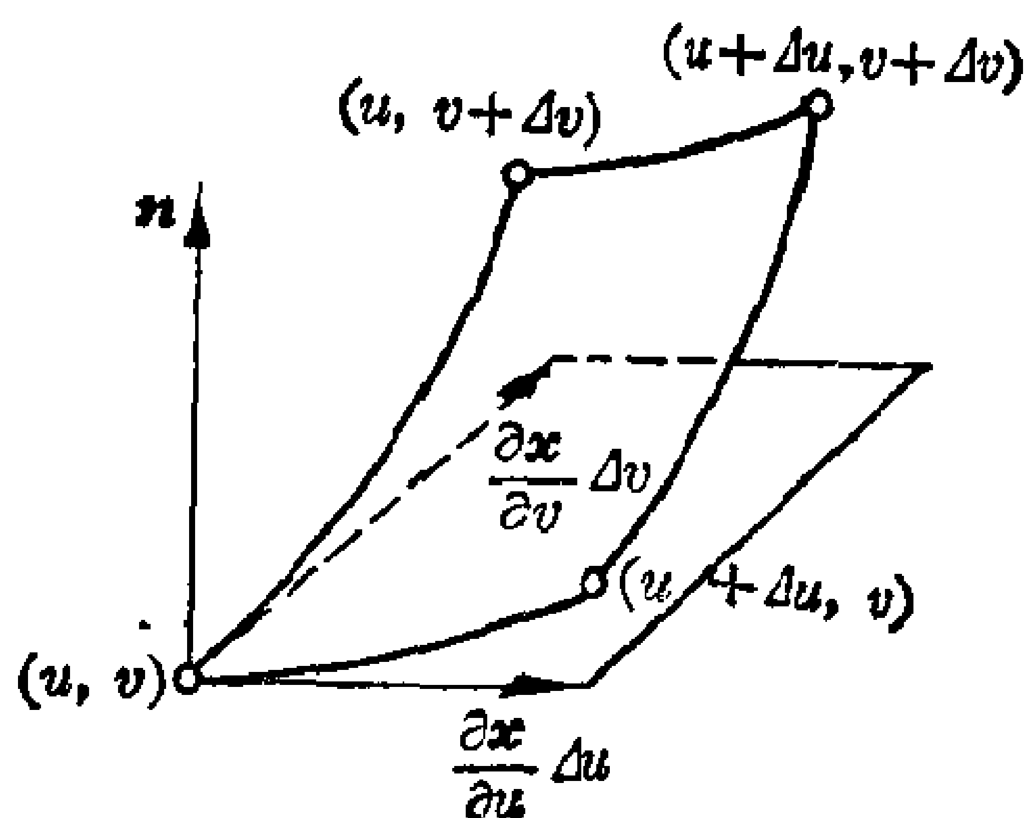


图 13.1-9 面积元素的定义

弧长元素完全确定了曲面的内蕴几何: 两个曲面 S 和 S' 是等距的, 当且仅当能找到它们的参数表示,使得它们的弧长元素相符。

测地线 若在曲面上过两点 P_1 和 P_2 的所有曲线中, 存在一条长度最小的曲线, 它就叫做**最短曲线**。确定曲面上的最短曲线是微分几何和变分演算最古老的问题之一。在平面上给出两点,只存在一条过这两点的最短曲线,即连结这两点的直线段。在曲面上可能存在某些对点,不能用最短曲线相连接。另一方面,也可能发生这样的情况: 过两点存在不止一条最短曲线,甚至有无限多条最短曲线;例如,就球面上两个对径点来说,过这两点的任何半个大圆都是最短曲线。不过:

若 U 是曲面上一点 P_1 的充分小邻域,又若 P_2 是 U 内的另一点, 则存在一条连接 P_1 和 P_2 的最短曲线。

曲面 $\boldsymbol{S}$ 上的一条曲线 $\boldsymbol{C}$ 称为测地线是指它为其上任何两个充分接近点之间的最短曲线。在球面上，凡大圆都是测地线，但显然不一定是最短曲线；一个大圆被它的两个点分成两段弧，一般地它们的长度不同，因而只有较短的一条才是最短曲线。所以，长度大于 πR（其中 R 是球半径）的大圆弧不是最短曲线，但它是测地线。任意曲面的测地线方程是二阶微分方程，它仅依赖于第一基本形式。

过正则曲面上任何一点，在任何给定方向上恰有一条测地线。一个完全（直观上"无边缘"）曲面上的两点，能用最短线相连接，因此也能用测地线相连接。

平行位移　平行位移的概念也能转移到任意曲面上。在测地线 g 的一点 P_0，若曲面 S 的一个切向量 $\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{a}(P_0)$ 与测地线的切向量 $\boldsymbol{t}_0=\boldsymbol{t}(P_0)$ 形成夹角 α，则在测地线的一点 P 能得到沿 g 平行于 $\boldsymbol{a}(P_0)$ 的向量 $\boldsymbol{a}(P)$，这个向量是如此构造的：从 P 在切平面上引一个长度为 $|\boldsymbol{a}_0|$ 的向量 $\boldsymbol{a}$，它与 g 的切向量 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(P)$ 形成相同的夹角 α。从这个定义得出，测地线的具有定常长度的切向量（如同对于直线那样）给出沿此测地线的一个平行位移；这里 $\alpha=0$。若把此定义运用于曲边多边形，它的各边由测地线组成，又若设想 $\boldsymbol{S}$ 上任意一条曲线由这样的测地线多边形逼近，则得到切向量沿曲面上任意一条曲线平行位移的直观概念。在弯曲曲面上的平行位移和仿射（或欧几里得）空间中的平行位移之间最重要的差别是*在第一种情况下，平行位移依赖于所沿的曲线。*若一个向量围绕曲面上一条封闭路径位移，则一般地说，它并不回到原来的位置（见图 13.1-10）。在图中，原来的向量 $\boldsymbol{a}_0$ 和绕具有三个直角的球面三角形位移后的向量 $\boldsymbol{a}_3$

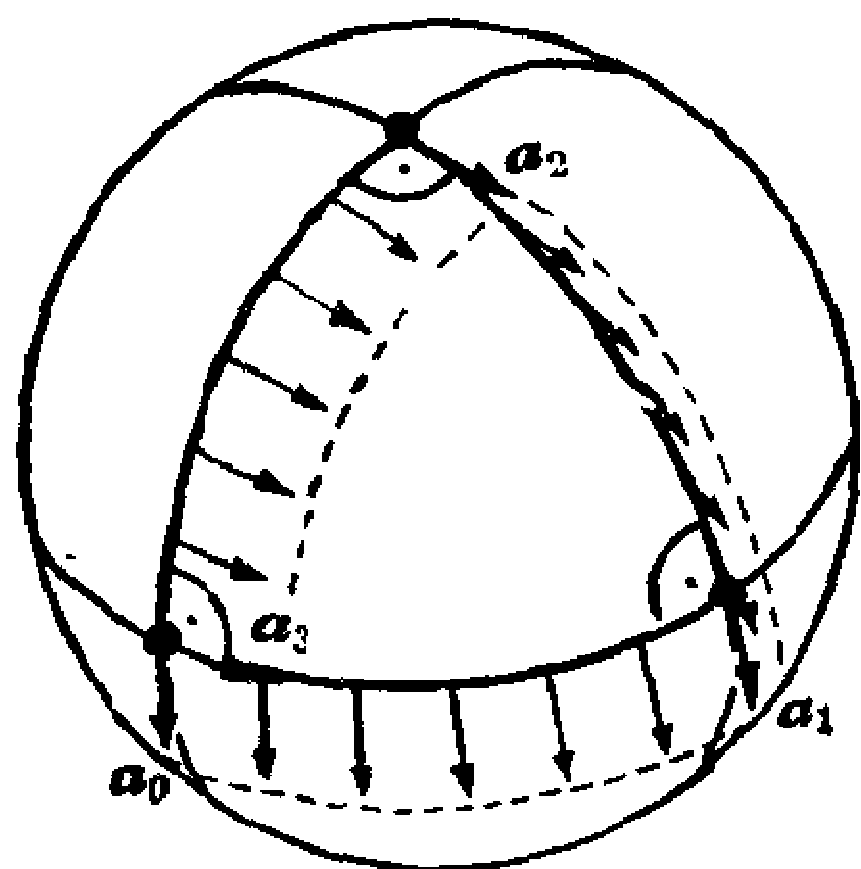


图 13.1-10　沿球面三角形的平行位移

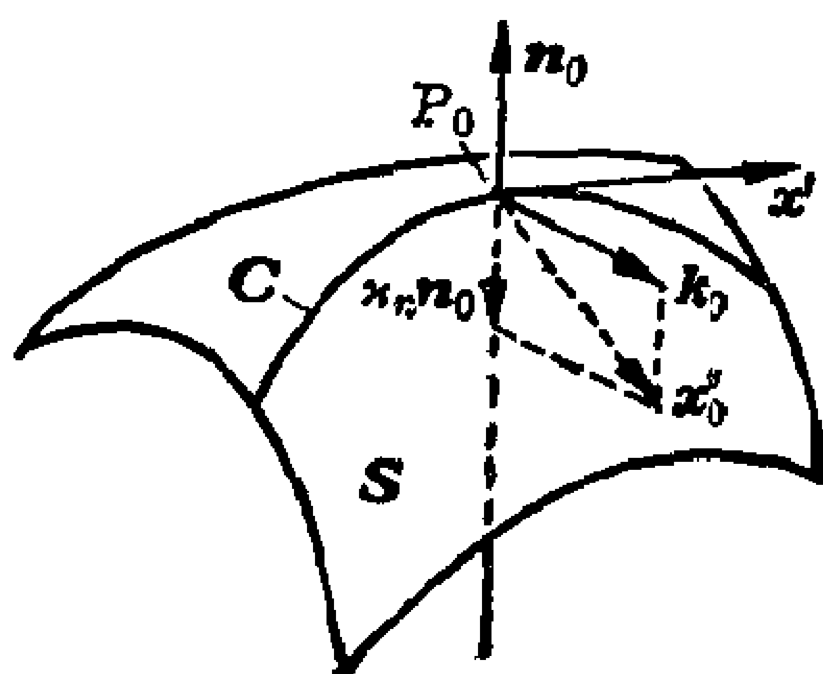


图 13.1-11　法曲率和测地线曲率

之间存在 $\frac{\pi}{2}$ 的夹角。

曲面的曲率 为了研究 $\boldsymbol{S}$ 上一点 P_0 邻域内的曲率性质，考虑 $\boldsymbol{S}$ 上过 P_0 点的曲线曲率(见图13.1-11)。若 $\boldsymbol{x}''$ 是曲线 $\boldsymbol{C}$ 在 P_0 的曲率向量，把它投影到曲面的法线上，得到 $\boldsymbol{x}_0''=\varkappa_n\boldsymbol{n}_0+\boldsymbol{k}_0$，其中 $\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{n}_0=0$，因而 $\boldsymbol{k}_0$ 是一个切向量；该曲线的曲率向量 $\boldsymbol{x}_0''$ 分解成切向分量 $\boldsymbol{k}_0$ 和垂直于它的法向分量 $\varkappa_n\boldsymbol{n}_0$。投影到法线上的长度 $\varkappa_n$，取以适当的符号，称为 $\boldsymbol{C}$ 在 P_0 点的**法曲率**。$\boldsymbol{k}_0$ 的长度 $\varkappa_g=|\boldsymbol{k}_0|$ 称为**测地曲率**。由曲率向量 $\boldsymbol{x}_0''$ 分解成法分量 $\varkappa_n\boldsymbol{n}_0$ 和切分量 $\boldsymbol{k}_0$ 中直接得出：(全)曲率 $\varkappa(s)=|\boldsymbol{x}''(s)|$，法曲率 $\varkappa_n=\boldsymbol{x}''(s)\cdot\boldsymbol{k}_0$ 和测地曲率 $\varkappa_g=|\boldsymbol{k}_0|$ 结成关系 $\varkappa^2=\varkappa_n^2+\varkappa_g^2$。测地曲率是在弯曲下的不变量，因此它是内蕴几何的概念，而法曲率则依赖于曲面在空间的嵌入，例如，在平面上每一条曲线的法曲率显然为0。现在若把平面的一条带子弯曲成半径为 r 的圆柱面片，则柱面的每一个母圆有法曲率 $\frac{1}{r}$。

曲面上一条曲线的测地曲率能用平行位移来定义，就象空间曲线的曲率一样。**测地线**可以作为曲面上测地曲率为零的曲线来表征。在圆柱面上，圆柱螺旋线，母线以及垂直于母线的圆都是测地线；由柱面沿一条母线割开得到的等距映射，将柱面展成平面时，这些测地线就变成直线段。

法曲率是由曲面论的**第二基本形式**给出；若 $u=u(s)$，$v=v(s)$ 是曲线 C 的方程，其中 s 是它的弧长，则曲面的第二基本形式是：

曲面的第二基本形式	$\varkappa_n=L(u,\ v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M(u,\ v)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N(u,u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$

其中 $L=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u^2}$，$M=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u\,\partial v}$，$N=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\Delta v^2}$。

由此得出，法曲率只依赖于曲线在 P_0 点的方向。

S 上在 P_0 点具有相同切线的所有曲线，也具有相同的法曲率。

对于法曲率更加精确的研究，导致曲面上点的分类。首先，若在 P_0 点所有的量 L, M, N 都为 0，如平面上的每一点就是这种情况，则点 P_0

称为平坦点。否则区别三种类型的点。

高斯曲率	$K(P)=(LN-M^2)/(EG-F^2)$

若曲面上坐标为(u, v)的点P，高斯曲率$K(P)>0$，则P称为**椭圆点**，若$K(P)<0$，则P称为**双曲点**；而若$K(P)=0$，则P称为**抛物点**(见图13.1-12)。这种纯粹形式上的分类和曲面的形状有密切联系。例如，在自行车胎(环面)上，内侧的点是双曲点，外侧的点是椭圆点；这两个点集被两个圆隔开，而这两个圆由抛物点所组成。椭面上只有椭圆点，双曲抛物面(鞍面)上只有双曲点，圆柱面上只有抛物点(见图13.1-13)。

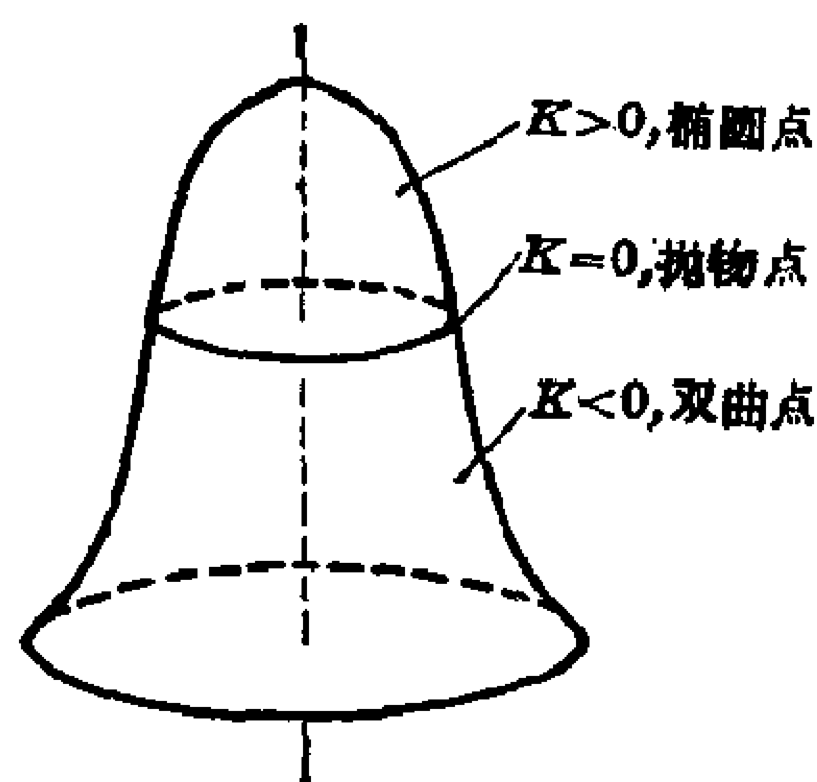


图13.1-12 旋转曲面(钟面)上点的分类

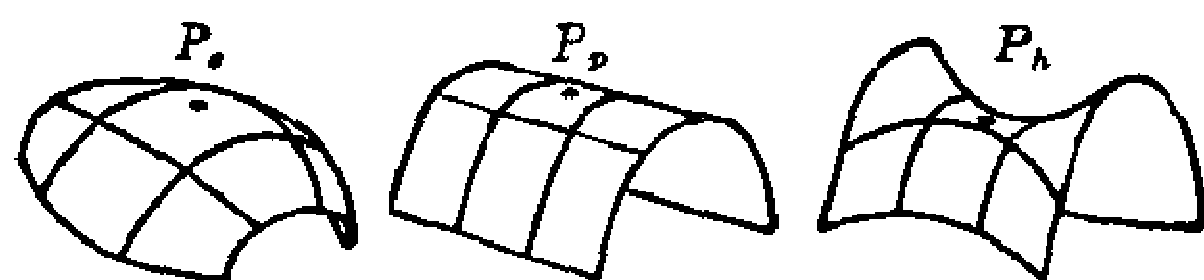


图13.1-13 椭圆点(P_e)、抛物点(P_p)和双曲点(P_h)

非凡的定理 曲面的第一和第二基本形式是在运动下的**不变量**，即若曲面在空间作为刚体而运动(不改变它的形状)，则这两个基本形式不变。若曲面被弯曲即**等距**变形，则第一基本形式保持不变，而确定法曲率的第二基本形式会变。因此第一基本形式是一个**弯曲不变量**。

高斯指出，高斯曲率不仅在运动和参数变换下是不变量，而且在弯曲下也是不变量。他把这个意想不到的惊人结果称为非凡的定理。

非凡的定理。高斯曲率K在等距映射下保持不变。

为了证明这个定理，导出K的一个公式，其中只出现第一基本形式的系数以及它们的导数。因为这些都是弯曲不变量，所以K也必定是弯曲不变量。适当地选取参数u和v，可使曲面的参数曲线相交成直角，即$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}=F=0$。假定是这样的话，非凡的定理就可以表达为公式：

$$K=\frac{LN-M^2}{EG}=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right\}+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right\}\right]。$$

由此得出，例如半径为r的球面，它在每一点的高斯曲率为$\frac{1}{r^2}$，所以球

面不可能等距映射到平面上($K=0$)。

因此不可能画一张地球表面部分正确无误的地图，只有限制在充分小的区域内才能得到一个近似准确的表示。

由基本形式确定曲面 非凡的定理直接联系着如下的问题：设

$$\varphi_1=E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2,\ \varphi_2=L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2$$

是两个二次形式，它们的系数是两个变量 u 和 v 的函数；进而设 φ_1 是正定的。是否总存在一个曲面 $\boldsymbol{S}$, φ_1 是它的第一基本形式和 φ_2 是第二基本形式？这个问题类似于由给定的曲率和挠率确定一条曲线。但相比于这个简单问题，其中的曲率和挠率可以彼此独立地给出，而在曲面情况下，两个基本形式不能彼此独立地选取；它们的系数由三个条件即所谓*可积性条件*相联系，这三个条件在每个曲面上都成立。其中一个条件在前面一段已经给出，即表达非凡的定理的那个方程(在 $F=0$ 的假定下)；另外两个可积性条件叫做科达齐-迈纳迪(Codazzi-Mainardi)公式。若对于 φ_1 和 φ_2 这三个条件都满足，则至少就变量 u 和 v 的充分小区域 U 而言，总存在一片曲面，以 φ_1 和 φ_2 作为它的第一、第二基本形式；定义在 U 上不同的两片曲面是合同的。

高斯-波奈(Bonnet)定理 在曲面 S 的一个区域 U 上，高斯曲率 K 乘以面积元素 dA 再积分，得到所谓的区域*总曲率* $K(U)$：

$$K(U)=\iint_U K\,dA=\iint K(EG-F^2)^{1/2}\,du\,dv,$$

它自然也是弯曲不变量。

关于总曲率因而也是高斯曲率的一种直观解释，可以从研究曲面 $\boldsymbol{S}$ 上区域 U 的*球面映象*中得到。这个球面映象是由一个固定点，譬如说原点 O 引出 U 上一点 P 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 得到。这些向量的端点描出单位球的一个区域 V，它就是 U 的*球面映象*。于是这个球面映象的面积(除了符号以外)等于 U 的*总曲率*。直观上很明显，$\boldsymbol{S}$ 弯得越厉害，这个面积就越大。

若 U 以简单的闭曲线 $\boldsymbol{C}$ 为界，则总曲率 $K(U)$ 可表达成绕 $\boldsymbol{C}$ 的积分。这里高斯-波奈定理成立，其中 $\varkappa_g$ 是测地曲率，s 是沿 $\boldsymbol{C}$ 的弧长。

高斯-波奈定理	$\iint_U K\,dA+\oint_C \varkappa_g\,ds=2\pi$

把这个定理应用到闭曲面，得到特别有趣的结果。直观上可以把一个闭曲面想象成一个被刺穿 g 个洞的有限光滑物体的边界；数 g 称为曲面的亏格；闭曲面的例子有球面($g=0$)，环面($g=1$)和纽结面($g=2$)(见图 13.1-14)。

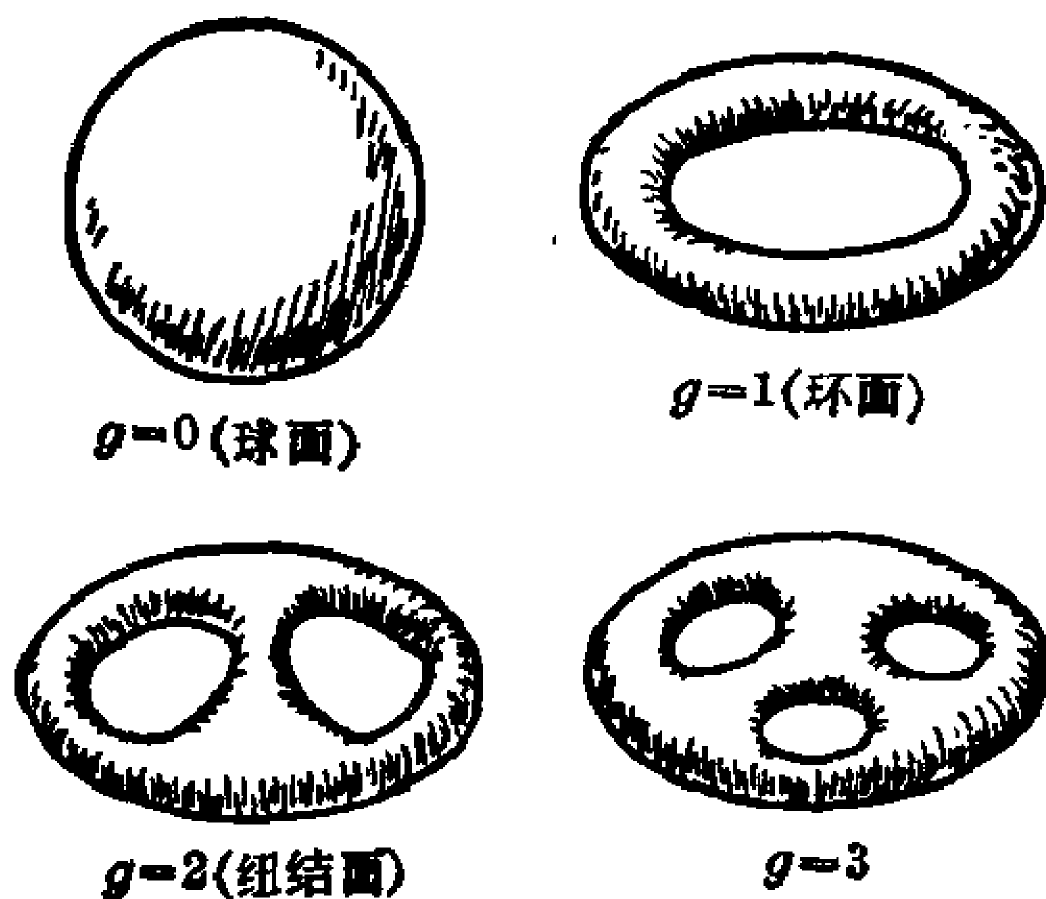


图 13.1-14　不同亏格的曲面

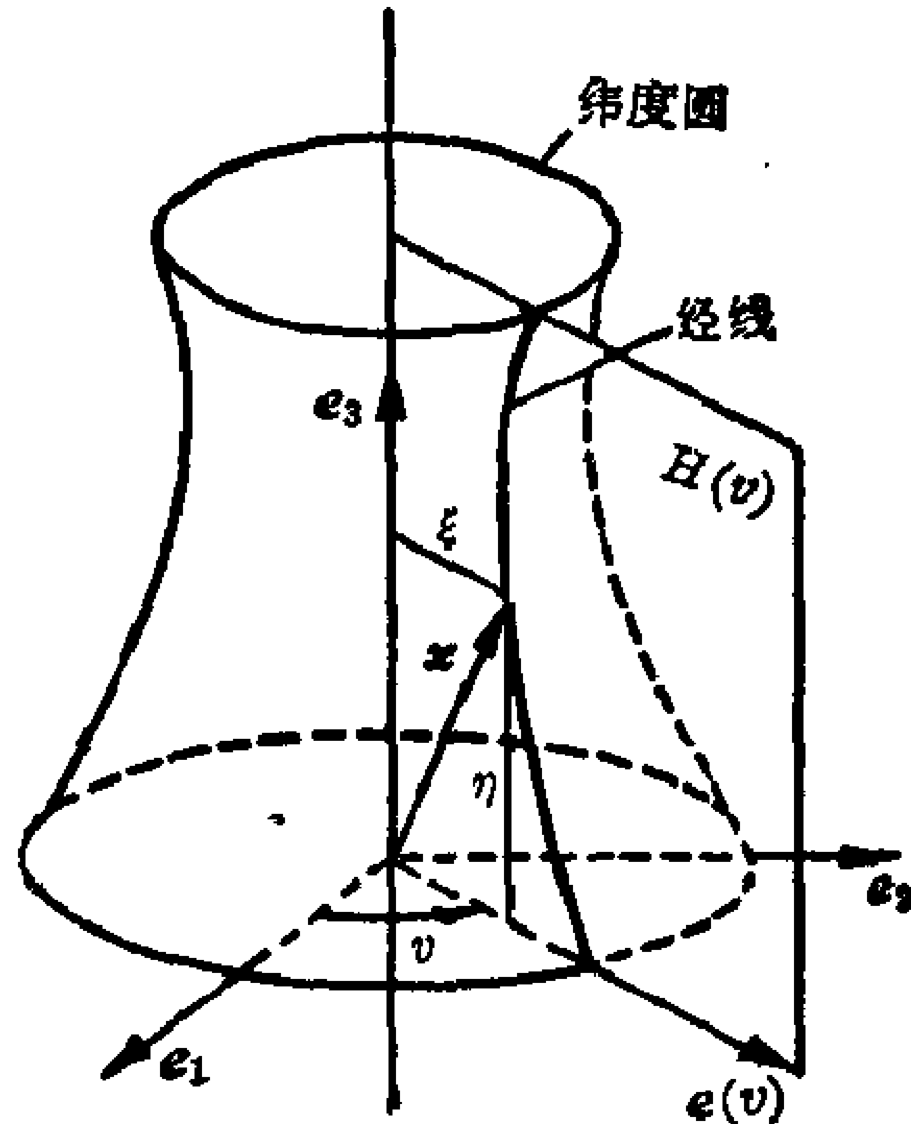


图 13.1-15　旋转曲面的定义

亏格为 g 的闭曲面 S 的总曲率不依赖于曲面的形状，且等于

$$K(S)=\iint_S K\,dA=4\pi(1-g)。$$

这个结果很重要，因为它使我们有可能用微分几何的量(这里是用总曲率)表达曲面的拓扑性质，在当前情况下表达亏格 g，而亏格是即使在任意连续变形下仍然保持不变的。它的推广以及类似的问题最近几十年来引导现代几何最有意义也是最困难的分支之一的发展，这个分支还研究高维空间的微分几何和拓扑在几何形式的性质之间的联系。

旋转曲面　所谓**旋转曲面**是指一条平面曲线绕曲线所在平面的一根轴旋转而成的曲面。实际上经常出现这种具有旋转对称性的曲面。为了得到旋转曲面的参数表示，在空间直角坐标系中取 e_3 轴为旋转轴(见图 13.1-15)。在垂直于 e_3 轴的 e_1, e_2 平面中定义一个单位向量 $e(v)$ 为：

$$e(v)=e_1\cos v+e_2\sin v,$$

它的导数　$$e^*(v)=\frac{de}{dv}=-e_1\sin v+e_2\cos v=e\left(v+\frac{\pi}{2}\right)。$$

由此直接得出，对于所有的 v 值，向量 $e(v)$, $e^*(v)$, e_3 形成一个右手的正交三面体。过原点且由 $e(v)$ 和 e_3 张成的平面 $H(v)$，当 v 变化时这

个平面就绕 $\boldsymbol{e}_3$ 轴旋转。在 $H(v)$ 中任何一条固定曲线 $\boldsymbol{x}(u)=\xi(u)\boldsymbol{e}+\eta(u)\boldsymbol{e}_3$，其中 u 是弧长因而 $\frac{d\boldsymbol{x}}{du}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{du}=1$，当平面 $H(v)$ 绕 $\boldsymbol{e}_3$ 轴旋转时就产生一个旋转曲面。因此由 $\boldsymbol{x}(u)$ 产生的旋转曲面具有如下形式的参数表示：

$$\boldsymbol{x}(u,\ v)=\xi(u)\boldsymbol{e}(v)+\eta(u)\boldsymbol{e}_3。$$

曲面的参数是 u 和 v。参数曲线是**经线**，即母线 $\boldsymbol{x}(u,\ v_0)$，$v_0=$常数，和**纬度圆**，即曲面与垂直于旋转轴平面相交而成的圆 $\boldsymbol{x}(u_0,\ v)$，$u_0=$常数。为了找出曲面的奇点——假定母线是正则的——计算：

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}=(\xi'\boldsymbol{e}+\eta'\boldsymbol{e}_3)\times\xi\boldsymbol{e}^*=\xi(-\eta'\boldsymbol{e}+\xi'\boldsymbol{e}_3),$$

式中撇号记关于母线弧长 u 的微分。向量 $\boldsymbol{n}=-\eta'\boldsymbol{e}+\xi'\boldsymbol{e}_3$，是这条曲线的单位法向量，因此也是曲面的法向量。曲面上一点是奇点，当且仅当 $\xi=0$，亦即落在旋转轴上的点。对于第一基本形式的系数，直接得到 $E=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}=|\boldsymbol{x}'|^2=1$，因为 u 是经线的弧长，$F=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}=0$（经线与纬度圆正交），最后，$G=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}=\xi^2(v)$；因此第一基本形式是

$$ds^2=du^2+\xi^2(u)dv^2。$$

为了计算第二基本形式，需要参数表示的二阶导数

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u^2}=\boldsymbol{x}''=\varkappa_r\boldsymbol{n},\quad \frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u\,\partial v}=\xi'\boldsymbol{e}^*,\quad \frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial v^2}=-\xi\boldsymbol{e}。$$

量 $\varkappa_r$ 称为经线的**相对曲率**。显然，$|\varkappa_r|=(\boldsymbol{x}''\cdot\boldsymbol{x}'')^{1/2}$，因为 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$，即 $\varkappa_r$ 的值等于母线的曲率；当曲线朝法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向弯曲时，$\varkappa_r$ 是正的，当它朝相反方向弯曲时，$\varkappa_r$ 是负的；在图 13.1-16 中，$\varkappa_r<0$。与法向量作纯量积，得到

$$L=\varkappa_r(u),\ M=0,\ N=\xi\eta',$$

所以第二基本形式是

$$\varkappa_n=\varkappa_r(u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\xi(u)\eta'(u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2。$$

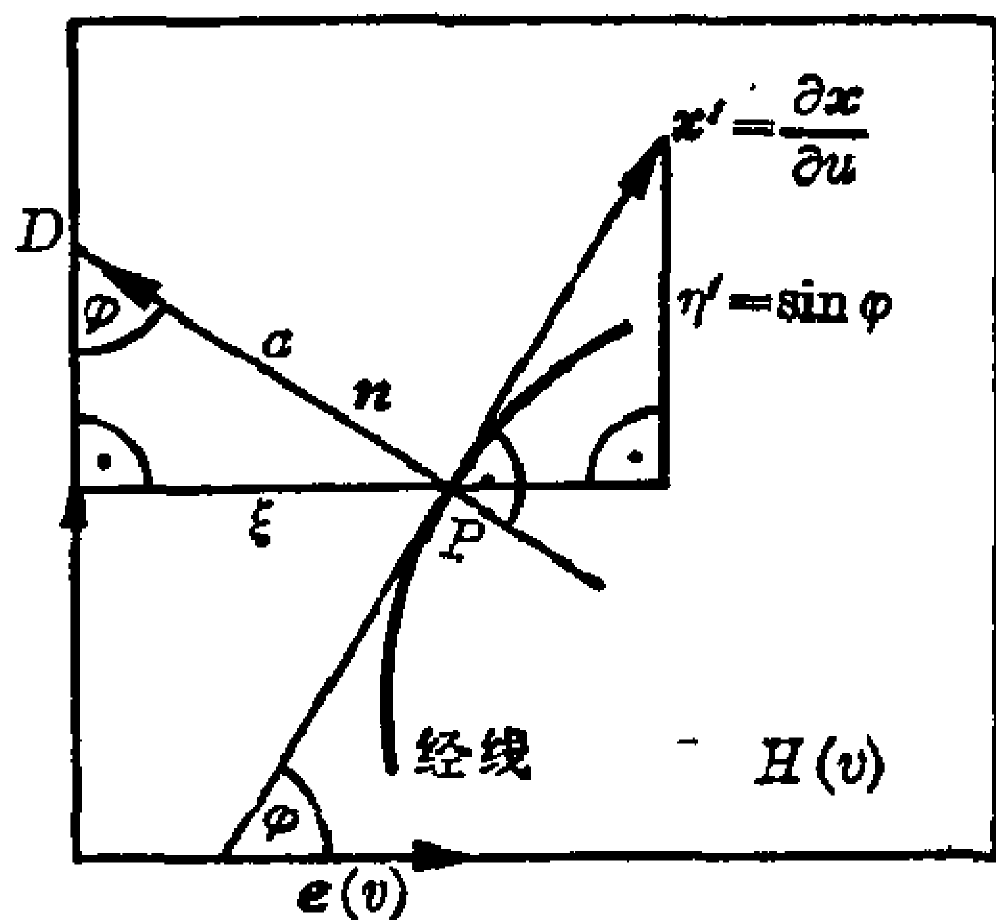


图 13.1-16 旋转曲面的曲率

由此可以容易地计算经线和纬度圆的法曲率。对于经线 $v=v_0$，$dv=0$，从第一基本形式有 $du=ds$。由此得

到 $\varkappa_{n(\text{经})}=\varkappa_r$；经线的法曲率等于它的相对曲率。对于纬度圆 $u=u_0$，$du=0$，于是从第一基本形式有 $ds^2=\xi^2 dv^2$。由此得到 $\varkappa_{n(\text{纬})}=\eta'/\xi$。这些公式能作几何解释。因为 $\boldsymbol{x}'=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}$ 是一个单位向量，

$$\boldsymbol{x}'=\xi'\boldsymbol{e}+\eta'\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}\cos\varphi+\boldsymbol{e}_3\sin\varphi,$$

其中 φ 是 $\boldsymbol{x}'$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角。从图 13.1-16 直接看出 $\xi/a=\sin\varphi=\eta'$，即 $\eta'/\xi=\frac{1}{a}$ 是从曲面上一点 P 沿法线到旋转轴的线段 PD 长度 a 的倒数。可以证明，这个计算值正好是曲面上过 P 的任意曲线的法曲率最大值和最小值。法曲率的极值称为曲面在 P 的**主曲率**。一条曲线如果在它的每一点都有一个主曲率为其法曲率，曲线就称为**曲率线**。一般地，过曲面上每一个正则点有两条相交成直角的曲率线；在旋转曲面的情况下，这两条曲线正好是经线和纬度圆。对于高斯曲率，直接得到

$$K=(LN-M^2)/(EG-F^2)=\varkappa_r\xi\eta'/\xi^2=\varkappa_r/a。$$

高斯曲率是主曲率的乘积。

由此得到，对于旋转曲面而言，当曲线弓形朝着旋转轴时（$\varkappa_r<0$），有 $K<0$，当曲线弓形背着旋转轴时（$\varkappa_r>0$），有 $K>0$。

平均曲率和极小曲面　若在 P 的切平面上适当地选取正交基，使曲面的第二基本形式获得标准形式

$$\varkappa_n=\lambda_1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\lambda_2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

则得到的**主曲率** $\lambda_1(u,v)$ 和 $\lambda_2(u,v)$ 作为曲面的重要不变量。一个点如果它的两个法曲率相同且非零，就称它为曲面的**脐点**。在球面上，每一点都是脐点；反之，其上每一点为脐点的曲面是球面的一部分。若两个主曲率等于 0，就称为**平坦点**；其上每一点为平坦点的曲面属于平面的一部分。在脐点或在平坦点，法曲率不依赖于曲线的方向。主曲率的初等对称函数是曲面的**高斯曲率** $K=\lambda_1\lambda_2$ 和**平均曲率** $H=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$。过空间一条简单闭曲线（可以把它看成一个连续变形了的圆）引出一个曲面使这个曲面具有尽可能小的面积的问题，作为一个必要条件有方程 $H=0$，它早在 1760 年就被拉格朗日发现，它也是欧拉-奥斯特洛格拉特斯基微分方程（参见 **II**. 第 25 章）的一个特殊情况。这个方程的非平凡解称为**极小曲面**。因为从 $H=0$ 和 $K\neq 0$ 得到 $K<0$，所以极小曲面具有负的高斯曲率。进一步的

整体结果就只能提一下。

具有常高斯曲率的闭曲面就是球面。

若对于一个闭正则曲面总成立 $K>0$，则它是一个卵形面，即它是一个有限凸体的边界。

具有常平均曲率且亏格为 0 的正则闭曲面就是球面。

克莱因的埃尔兰根提纲

按照克莱因的看法，各种几何被看成相应变换群的不变量理论。这样，就欧几里得微分几何来说，它作为欧几里得几何的一个分支，是在欧几里得运动(或变换)群下，曲线和曲面的不变量理论，所谓欧几里得运动想象为刚体运动。用类似的方式，仿射几何是在仿射变换(平行投影)下的不变量理论，而射影几何研究在一般射影(中心射影)下保持不变的性质。例如，曲线上的点和密切平面之间的对应不仅是欧几里得不变量，而且也是射影不变量，而弧长、曲率和挠率只是欧几里得不变量，甚至就不是仿射不变量。事实上，圆的曲率是常数，而圆通过仿射变换可变成任意的椭圆，它的曲率不再是常数。

对于每一个具有变换李群的几何空间，作为这个空间的几何的一个分支，有相应的微分几何归属于它。今天，除了欧几里得微分几何学以外，还发展有仿射的、射影的、椭圆的、双曲的微分几何等等。在变换群 G 下不变的性质当然在 G 的子群下不变；例如，已经知道将曲面上的点分成椭圆的、双曲的和抛物的这种分类，不仅是欧几里得的不变量，而且还是仿射的甚至是射影的不变量。

此外，在微分几何中感兴趣的性质必须是在可微的参数变换下不变的。更一般地可以问：几何形式的哪些性质在空间到它自身上充分可微的映射下保持不变。共线或共面的性质在射影映射下显然不变，但一个平面可通过适当的可微映射变成非常任意的曲面。曲线或曲面的切触阶在充分可微的映射下是不变的。罗网几何在这些映射下也是不变的。关于在可微映射下不变性质的问题是富有成果的，即使这些微分映射的集合一般地不再形成一个群。

这些讨论导致微分几何的性质按照克莱因的埃尔兰根提纲的原理进行分类。例如，可以考虑 E_3 的曲面到 E_3 的曲面上的所有二次连续可微的一一映射。内蕴几何在前面是作为在等距映射下保持不变的曲面性质的理论而定义的。这里的等距映射集合是曲面彼此到上的可微映射集合的

一个真子集。

若保持两条曲线之间的夹角不变，则此映射称为**保角的**；例如，从球到平面上的**球极平面射影**是一个保角映射。每一个等距映射是保角的，但反之却不然。在保角映射下保持不变的性质形成曲面的**保角几何**的内容。类似地，还可考虑**保积映射**和其他类型的映射及其相应的几何学。

黎曼几何

流形　微分几何中研究的所有几何图形都被看成参考**参数或坐标**的点集。图形的维数定义为确定图形上一点所需要的坐标数目。这样，曲线是1维的；因为它的点能由一个参数 t 的值表征。相应地，曲面是2维的，我们周围的空间是3维的。在物理和科学技术的应用中出现高维空间。例如，如果要描述一架飞机的航线，即不仅它的路程，还有它的时间进度，那就必须知道在任何时刻 t 它的经度 u、纬度 v 和它的高度 h。这样得到在4维空间中变量 t, u, v, h 的一条曲线。如果希望更加精确地跟踪飞机，那就必须加上瞬时速度分量 $\dot{u}=\frac{du}{dt}$，$\dot{v}=\frac{dv}{dt}$，$\dot{h}=\frac{dh}{dt}$，从而得到7维空间中变量 $t, u, v, h, \dot{u}, \dot{v}, \dot{h}$ 的一条曲线。现在如果同时考虑 N 架飞机，为了描述这个“体系”，即 N 架飞机的集合，除了时间 t 以外，必须详细说明每一架飞机的6个位置和速度坐标 $u_i, v_i, h_i, \dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{h}_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, N)$；因此得到一个 $(6N+1)$ 维空间。在统计力学中理想气体表示为 N 个分子的一个体系，它们在空间互相独立地移动(象飞机一样)；为了描述气体，又必须有 $6N+1$ 个坐标。这里 N 是很大的，具有洛喜密脱(Loschmidt)数的量级：$N=6.02\times10^{23}$。所有这些例子有一个共同点：每一个空间是一个点集，它的点与实数的 n 数组 $(x_1, \cdots, x_n)$，即该点的坐标一一对应。这样的点集称为 **n 维微分流形**。它们是这样的一些流形，其坐标能象曲线和曲面的参数那样再受到充分可微坐标变换的限制。仅仅那些具有几何意义的性质才不依赖于坐标系的选择。因为实数是我们直观上的**连续统**这个内蕴几何观念的一个数学模型（数直线），所以毫不奇怪，可在微分流形上进行一些重要的几何讨论；例如，可以引进**切向量**和**切空间**概念，可以提出子流形(曲线、曲面、n 维流形的 m 维子流形)的**切触理论**。在此基础上，则可以建立**偏微分方程的几何理论**．还能建立变分演算的几何理论，即所谓**芬斯拉**(Finsler)几何。

黎曼几何 虽然可以对于微分流形发展一种几何，但它相比于欧几里得几何是很贫乏的，因为象长度、角度、面积、平行位移和曲率这样一些概念完全丧失。1854年黎曼在他的就职讲演《几何所根据的假设》中发展了几何的基本概念，后来作为爱因斯坦广义相对论的数学基础，得到重要的物理应用。一个n维流形称为黎曼空间，如果其中给出一个二次微分形式作为弧长元素：

$$ds^2=\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(x_1,\ \cdots,\ x_n)dx_i\,dx_k。$$

黎曼几何最简单的非平凡特殊情况是曲面的内蕴几何，它仅由弧长元素（第一基本形式）所确定，而不依赖于在欧几里得空间中的实际嵌入。若引进新的记号$u=x_1$, $v=x_2$, $E=g_{11}$, $F=g_{12}=g_{21}$, $G=g_{22}$, 则第一基本形式就变成上面所给出的2维黎曼空间弧长元素的形式。这里x_1和x_2不得与E_3中的空间坐标x_1, x_2, x_3相混淆。至于考虑E_3中互相等距的曲面之中的哪一个曲面倒是无关紧要的。

黎曼几何的确是曲面的内蕴几何到n维空间的一般化。所有上面提到的从微分流形理论中丧失的那些概念，都能借助于弧长元素（作为内蕴几何的富有意义的类似元素）来定义。例如，若$x_i=x_i(t)$, $0<t<1$是黎曼空间一条曲线的表示，则沿此曲线有$dx_i=\dot{x}_i\,dt$, 从而作为不变参数$s=s(t)$重又得到弧长

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}[x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)]\dot{x}_i(t)\dot{x}_k(t)}\ dt。$$

在内蕴几何中，形式$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k$总是正定的，而在黎曼几何中还允许有不定的形式，因而弧长有时可以是0或虚的。应用于相对论的，正是这样的黎曼空向。

还有，欧几里得空间是黎曼空间的一种特殊情况；它的弧长元素在正交的笛卡尔坐标下是$g_{ii}=1$和$g_{ik}=0$, $i\neq k$。可以说，黎曼空间的一部分是由相同维数的欧几里得空间的一部分变形得来的，就象汽车车身是由冲压一片金属平板所成的那样。以类似的方式，具有仿射联络的流形是通过仿射空间的“变形”产生的：在这些流形上，长度、角度和面积不再有定义，而只有依赖于路径的平行位移来确定流形的几何。黎曼空间（以及具有仿射联络的流形）的曲率指出该空间的几何与同一维数的欧几里得

(或仿射)空间几何的偏差：它用黎曼-克里斯托弗(Christoffel)曲率张量来量度。

13.2　凸体

在欧几里得空间中一个体 $\boldsymbol{B}$ 称为**凸体或卵形体**，即若连接 $\boldsymbol{B}$ 上任意两点的直线段位于 $\boldsymbol{B}$ 内。凸体在几何中已被研究了很长时间。凸体的真正理论是19世纪末叶在布鲁恩(Brunn)和闵可夫斯基(Minkowski 1864～1909年)的工作中提出来的；它已经被推广到 n 维欧几里得空间和非欧几里得空间。凸体的例子为球、椭球、柱体、锥体、立方体、四面体和长方体，后面三种体是**凸多面体**，即其边界由有限多个凸多边形组成。例如，在**凸多面体的理论**中，曾经考虑如下的问题：要多少条件(关于棱、顶点、面、面积等等的条件)才能唯一地(在运动范围内)确定一个多面体？什么时候存在一个具有某些预先指定条件的凸多面体？

在凸体理论中，经常要处理极值问题。其中最古老的问题是**等周问题**(参见**II**.第25章)。

所谓**凸曲面**，可理解为凸体的边界。如同凸多面体的例子那样，凸曲面可以有面和顶点。在欧几里得空间正则曲面的微分几何中最重要的结果，特别是它们的内蕴几何，还能推广到任意的凸曲面。用这个方式得到了比经典微分几何更加深入的结果。凸体理论最本质的特点是直接对几何对象、点、直线等等进行运算，而在很大程度上避免了对坐标或参数表示这类分析方法的依赖性。近来，几何的一个现代分支，即非常一般的**集合几何**，已经在这些方法的基础上建立起来。

凸体理论在数学的许多其他分支中得到应用。例如，也是由闵可夫斯基奠定基础的**数的几何**，与凸体理论一起得到发展；凸体理论的某些结果应用于数论的问题。与此有联系的是非常引人十分直观的**存储理论**。下面是这项理论的一个典型问题：在一个很大的桌上应当怎样放置钱币使能容纳尽可能多的钱币？钱币不得迭起来。问题的解是每一个钱币必须触及六个其他的钱币。与此类似的，关于在空间最稠密地存储圆球的问题仍然没有解决。凸体理论与**积分几何**也有许多联系。

13.3　积分几何

积分几何是从几何概率的问题发展起来的。第一个这样的问题由

蒲丰(Count George De Buffon, 1707～1788年)提出(蒲丰的投针问题): 在平面上画出等距为 a 的平行直线，长度 $l<a$ 的针随机地投在平面上。针碰到直线的概率 p 是多少?——答案是 $p=2l/(\pi a)$。因为 l 和 a 是已知的，而 p 能用统计方法来估计，这就实验上给出近似确定 π 的一种可能性。

随后考虑许多类似的例子，并得出重要的局部结果。勃拉希克(Wilhem Blaschke, 1885～1962年)和他的学派首先发现积分几何作为一门真正的几何学科。几何空间的积分几何的基础是某种**测度**，这种测度关于几何对象的集合是指定的且具有不变性；例如，在欧几里得平面上，每一个初等平面图形关联着它的面积。这个测度是不变量，即合同的图形具有相同的面积。每一个图形都可以看成**几何对象的集合**，即作为属于它的点的集合。在平面上，点的**对偶**几何对象是直线。现在发生一个显然的问题: 能否用一种不变的方式定义直线集的测度。在当前情况下这是可能的。例如，考虑与半径为 r 的圆相交的所有直线 l 的集合 L。如果给定直线的方向角 φ(它与某条固定直线譬如说与 x 轴的夹角)和圆心到此直线的距离 p，则这条直线的位置就确定下来了。这里，φ 必须取遍区间 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ 上的所有方向，p 必须取遍所有的距离 $0\leqslant p\leqslant r$。因此，作为直线集合 L 的一种测度，取两个区间长度的乘积。可以证明，这种测度是不变量，而且对于更一般的直线集合也能用类似的方式定义这种测度。在给出的例子中，集合 L 的测度是 $2\pi r$，恰好是圆周长。更一般地，与凸平面图形相交的所有直线的测度等于该图形的周长。若考虑两个不相重迭的凸图形，可以问同时与这两个图形相交的所有直线的测度。克罗夫顿(M. W. Crofton)推出，这个测度等于绕着这两个图形的交叉环路的长度减去围着这两个图形的非交叉环路的长度(见图 13.3–1)。

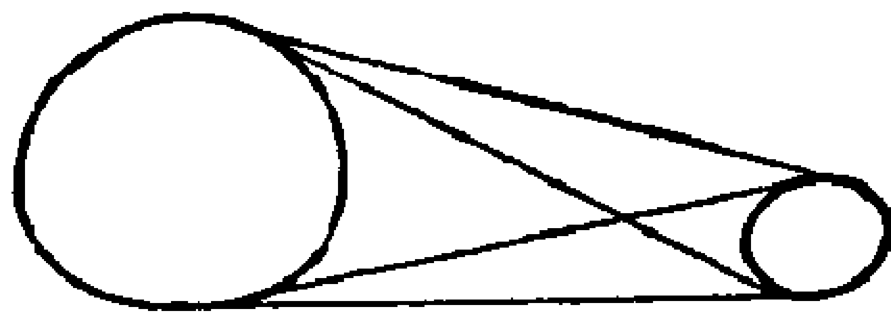


图 13.3–1 克罗夫顿环路定理

除了直线集合的测度以外，还能定义互相合同的图形集合的**运动测度**；例如，能计算与给定图形相交的边长为 1 的所有等边三角形的测度。运动测度是由庞加莱(Henri Poincaré, 1854～1912年)引进的。

如同在平面那样，可以在由**变换李群**(在克莱因的埃尔兰根提纲意义下)所确定的其他几何中发展或多或少有意义的积分几何。特别地，n 维

第14章 概率论和统计学

14.1 组合分析

组合分析是研究安排对象的各种不同可能性，例如问:“有多少种方式将四个字母排成一行？”或“从 90 个数中选取 5 个不同数可有多少种不同的情况？”——这类问题研究的对象可以是数、字母、人、试验等等。它们称为*元素*，并且记为数字或字母。若两种安排不是包含相同的元素，如 ab, cd, 或虽包含相同的元素，但不是相同的出现次数，如 aab, abb, 则把它们看成不同的安排。如果把出现次序考虑在内，那末象 $aabb$, $abab$ 这样的安排也就看作不同的。

排列

有限个元素按任一次序用到全部元素的每一种安排，称为给定元素的一种**排列**。例如，安排 $acdbe$, $dbcae$ 各是元素 a, b, c, d, e 的一种排列。

排列数目 由归纳推理能得到不同元素的排列数如下：从两个元素 a 和 b, 能形成两种排列 ab, ba。三个元素 a, b, c, 中，每一个都可以放在首位，同时其他两个能以两种不同方式定次序：

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba。$$

由此得到 $3\cdot2=6$ 种排列。对于四个元素，相应的论证得出 $4\cdot3\cdot2=24$ 种排列。一般地，n 个元素能以 $1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)n=n!$ 种(读作 n 阶乘)方式安排。

n 个不同元素有 $n!$ 种排列。

n 个不同元素的排列数
$n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$

【例】 从9个数字1, 2, 3, …, 9能形成 $9!=362880$ 个九位数，使在每一个九位数中上述九个数字的每一个数字仅出现一次。

从1! 到20! 的阶乘表：

n	$n!$	n	$n!$
1	1	11	39916800
2	2	12	479001600
3	6	13	6227020800
4	24	14	87178291200
5	120	15	1307674368000
6	720	16	20922789888000
7	5040	17	355687428096000
8	40320	18	6402373705728000
9	362880	19	121645100408832000
10	3628800	20	2432902008176640000

若某几个元素出现成群的同一元素，则排列数要小于所有元素全不同的排列数。例如，在5个元素 $e_1=a$, $e_2=a$, $e_3=b$, $e_4=b$, $e_5=b$ 的排列中，元素 e_1, e_2 的一切次序以及类似地元素 e_3, e_4, e_5 的一切次序必须视为同一。因为这些元素的排列数分别为 $2!$, $3!$，所以不同排列的总数仅为 $\frac{5!}{2!3!}=10$。一般地，若 n 个元素由 m 个分别包含 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_m$ 个同一元素的群组成，又若把 p_i 个元素的 $p_i!$ 个排列 $(i=1,2,\cdots,m)$ 视为同一，则此 n 个元素的排列总数为：

$$\frac{n!}{p_1!p_2!p_3!\cdots p_m!};\quad p_1+p_2+\cdots+p_m=n$$

【例】 一个桥牌迷能在他一生中玩完所有可能的牌局吗？——因为每家手中 13 张牌的排列并不导致不同的牌局，因此可能有的牌局数是 $\frac{52!}{13!13!13!13!}$。这个数超过 5.36×10^{28}。如果桥牌迷每天玩 200 局且持续 100 年，则一共 7300000 局，由此可见他只能玩总数的一个很小的零头。

字典次序。 按字典次序搜索 n 个元素的所有 $n!$ 种排列大为简便。首先确定某种自然次序，例如，对于数就按它们的大小次序，对于字母则按字母表次序。然后所谓按字典次序排列是指两种不同的排列，以其第一个元素的自然次序分先后，当它们的第一个元素相同时以其第二个元素的自然次序分先后，如果它们开头的两个元素都相同，则按照第三个元素来区分，以此类推。下面开头两对排列是按字典次序的，如同上面给出的三个元素的六种排列也是按字典次序的，不过下面的第三对就不是按字典次序的。

$$1.\ \begin{matrix} a\ b\ c\ f\ g \\ a\ b\ c\ g\ f \end{matrix}\ \downarrow \qquad 2.\ \begin{matrix} a\ b\ c\ h\ i \\ a\ c\ b\ i\ h \end{matrix}\ \downarrow \qquad 3.\ \begin{matrix} a\ b\ d\ f\ e \\ a\ b\ d\ e\ f \end{matrix}\ \downarrow$$

反演 在一种排列中的两个元素称为形成一个**反演**，是指它们的次序与它们的自然次序相反。在由元素 a, b, c, d, e 形成的排列 $cdbea$ 中，元素 c 在 b 之前，c 在 a 之前，d 在 b 之前，d 在 a 之前，b 在 a 之前以及 e 在 a 之前，它们每一个都形成一个反演。于是给出的这一种排列包含六个反演。如果一种排列的反演数是偶数，则称此排列为**偶排列**；否则就称为**奇排列**。

组合

从 n 个元素中取 k 个元素的每一个集合称为**第 k 类组合**或**第 k 阶组合**。

【例】 $ab, ac, ad, bc, bd, cd, bb, dd, \cdots$ 就是从四个元素 a, b, c, d 取的第二类组合。

若对每一个集合，仅取不同的元素，则称为**无重复组合**；否则称为**重复组合**。若两个组合包含相同的元素而有不同的阶，视为两个不同的组合，则称为**广义的排列**。

排列数 从 n 个元素中选取 k 个元素的排列数记为 ${}^nP_k$。第一个元素能以 n 种不同方式取出，然后第二个能以 $(n-1)$ 种方式取，第三个有

$(n-2)$种方式，第 k 个元素为$(n-k+1)$种方式。因此，

$$ {}^nP_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}。$$

从 n 个元素中无重复地选取 k 个元素的排列数	${}^nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

于是，对于 $n=4$，从 4 个元素 a, b, c, d 中每次取 3 个元素的排列数是 ${}^4P_3 = 4\cdot3\cdot2 = 24$。这些排列是

$$abc\to abd\to acb\to acd\to adb\to adc\to bac\to bad\to bca$$
$$\to bcd\to bda\to bdc\to cab\to cad\to cba\to cbd\to cda\to cdb$$
$$\to dab\to dac\to dba\to dbc\to dca\to dcb。$$

若允许重复，则第二个元素也能以 n 种方式选取，第三个元素亦然，如此等等。因此，对于 $n=3$ 个元素，每次有重复地取 2 个元素的排列为 ${}^3P_2^{(r)} = 3^2 = 9$。这些排列是

$$aa\to ab\to ac\to ba\to bb\to bc\to ca\to cb\to cc。$$

更一般地，${}^nP_k^{(r)} = n^k$。

从 n 个元素中有重复地取 k 个元素的排列数	${}^nP_k^{(r)} = n^k$

【例 1】　从数字 1, 2, …, 9, 0 中能形成 ${}^{10}P_3^{(r)} = 10^3 = 1000$ 个第三类有重复的排列。它们正好是数 000, 001, 002, … 一直到 999。

【例 2】　利用*点字法*盲人能感觉到字母、数字和标点，它们在纸上被印成 6 个点的排列，这些点有的凸起有的不凸起。*点和无点*是两个可变的元素，从而由它们表示的可能符号数是这两个元素每次有重复地取 6 个的排列数。这就给出 $2^6=64$ 种符号。这些可能性足以表示盲人字母以及数和标点(见图 14.1-1)。

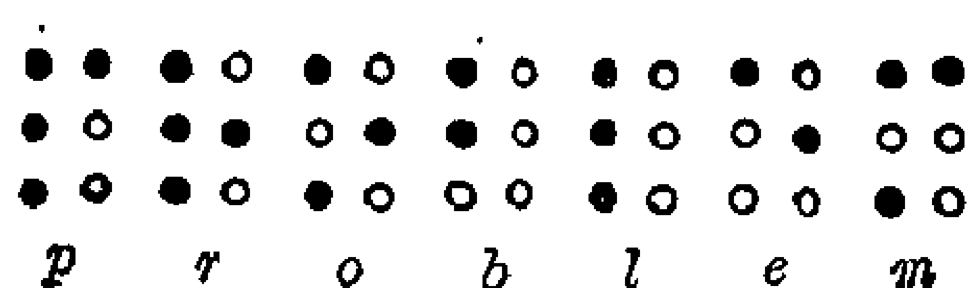


图 14.1-1　英文Problem (问题)的点字法

组合数　在组合中，不考虑其中元素出现的次序。从 n 个元素中取 k 个元素的组合数记为 ${}^nC_k$。从四个元素 a, b, c, d 可形成下列第二类组合：

$$ab \to ac \to ad \to bc \to bd \to cd。$$

若置换每一个组合的元素，则得到从四个元素中取2个元素的排列数 ${}^4P_2$，它要大2!倍。类似地，从 n 个元素取 k 个元素的排列数 ${}^nP_k$ 是组合数 ${}^nC_k$ 的 $k!$ 倍。于是，

$$k!\cdot{}^nC_k={}^nP_k=\frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{或} \quad {}^nC_k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!},$$

其中 $\binom{n}{k}$ 是二项式系数。

从 n 个元素中无重复地取 k 个元素的组合数 ${}^nC_k$	${}^nC_k=\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

【例】 在纸牌的赌博中，从 $n=90$ 个数取 $k=5$ 个不同数，就有 $\binom{90}{5}=43949268$ 种方式。正是以所有这些可能性拿到一行五张纸牌。用类似的方式可以计标4张和3张的组合数。从5个(正确)数中总是少一个；于是就有 $\binom{5}{4}=5$ 种4个的组合。对3个正确数，总是少两个，因而有 $\binom{5}{3}=10$ 种组合。这5种4个数的组合，每一种组合在可能的不正确的5张成行出现 $\binom{90-5}{1}=85$ 次，因为这是从剩下的85个不正确的数中添加第5个数的可能方式的数目。于是，4个正确数成行的数目是 $\binom{5}{4}\binom{90-5}{1}=\binom{5}{4}\binom{85}{1}=5\times85=425$。三个数的每一种组合能并有剩下数中的两个数，一共 $\binom{85}{2}=85\times42$ 种方式，使其既不是4个正确数一行也不是5个正确数一行所造成的。于是，具有三个正确数的行数是 $\binom{5}{2}\binom{85}{2}=35700$。

若允许重复，则 n 个元素的第 k 类组合数记为 ${}^nC_k^{(r)}$。对于三个元素 a, b, c 和对于 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 得到下列第二类组合：

$$\begin{array}{lllllll} aa & ab & ac & a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3\cdots\cdots & a_1a_n \\ & bb & bc & & a_2a_2 & a_2a_3\cdots\cdots & a_2a_n \\ & & cc & & & a_3a_3\cdots\cdots & a_3a_n \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_na_n \end{array}$$

于是 $${}^3C_2^{(r)}=3+2+1=6$$

和 $${}^nC_n^{(r)}=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\binom{n+1}{2}。$$

一般地，有 ${}^nC_k^{(r)}=\binom{n+k-1}{k}$；如上所示，这个命题当 $k=2$ 时为真，用数学归纳法可以对于每一个自然数 $k>2$ 确立这个命题。

从 n 个元素可重复地每次取 k 个元素的组合数	${}^nC_k^{(r)}=\binom{n+k-1}{k}$

14.2 概率论

历史背景 概率论的起源可追溯到17世纪中叶。一个狂热的赌徒德梅尔请求帕斯卡解决一个对于他来说很重要的问题：两个赌徒在一场赌博中，一个已赢了 $n<m$ 回，另一个赢了 $p<m$ 回，原来决定首先赢得 m 回的人将赢得整场赌博，请描述两个赌徒输赢的分布。帕斯卡将他的解法写信告诉费尔马，费尔马也发现了一个解法。第三个解法是由惠更斯(Chrisian Huygens, 1629～1695年)提出的。这些学者都认识到研究控制随机事件规律的问题的重要性。这门新科学的概念和最初的方法是从机会对策的问题中发展出来的。过了很久，十九世纪在自然科学中迅速增长的兴趣，使得有必要推广概率论越出机会对策的框架。它的发展与下面一系列名字密切地联系着：伯努利(Jacob Bernoulli,1654～1705年)，棣美弗(Abraham De Moivre, 1667～1754年)，拉普拉斯，高斯，普阿松(Simon Denis Poisson, 1781～1840年)，切比晓夫(Pafnuti Lvovich Chebyshev, 1821～1894年)，马尔科夫(Andrei Andreevich Markov, 1856～1922年)，以及现代的辛钦(Alexander Yakovlevich Khinchine, 1894～1959年)和柯尔莫哥洛夫(Andrei Nikolaevich Kolmogorov，生于

1903 年)。与研究控制随机事件的规律相联系的是研究大量事件。例如，日用商品的生产就是一种大量事件，其中出现次品是一个随机事件。今天的概率论联系着许多别的数学分支，联系着自然科学、工程技术和经济的许多领域。

随机事件的概率

事件 在随机事件意义下，一个事件 E 是能出现但不一定出现的一个试验结果。试验可以是一种观察或者是一种实验，它由应满足的一组条件及其可重复性表征。极限情况也视为事件：一定出现的事件，即必然事件 S，永不出现的事件即不可能事件 ϕ。例如，在"掷骰子"试验中，E_3 为"出现 3"事件，S 是"出现 1 或 2 或 3 或 4 或 5 或 6"事件，"出现 7"事件为 ϕ。

若作为试验的结果，它们之中仅有一个能出现，则这些事件是互相排斥的或互不相容的：例如，在"掷骰子"试验中，事件 E_i(出现 i)，$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 就是互相排斥的，因为它们中间仅有一个能出现。又如在一只含有红球和黑球的罐中摸一个球，E_1"摸到一个红球"和 E_2"摸到一个黑球"是互不相容的，因为它们不能同时出现。若作为试验的结果，其中一个必须出现，则两两互相排斥的所有事件形成事件一个完备系。例如，对于"掷骰子"试验，事件 $E_i(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$就形成一个完备系。

若两个事件 E_1 和 E_2 形成一个完备系，则它们之中的每一个事件对于另一个来说是互补的。例如，扔硬币时出现"正面"和"反面"是互补的。

若在试验中，事件 A 或 B 至少有一个出现，则称为两个事件 A 与 B 之和 C，记为 $C=A\cup B$ 或记为 $C=A+B$。这个概念也能推广到多于两个事件的情况。例如，对于"掷骰子"试验，出现"偶数"事件等于事件 $E_2+E_4+E_6$ 之和。

若在试验中，事件 A 和 B 同时出现，则称为事件 A 和 B 的积 C，记为 $C=A\cap B$ 或记为 $C=A\cdot B$(简写成 $C=AB$)。例如，对于"掷两个骰子"试验，当每一个骰子都掷到 6 时出现事件 C"12 点"。积的概念也能推广到多于两个事件的情况。

概率的经典定义 虽然有公理化的概率论，但从经典定义能导出一些重要的定律。

概率的经典定义。若试验能在 n 个同等似然事件中得出结果，又若其中的 m 个事件有利于事件 E 的出现，则出现事件 E 的概率 $P(E)$ 是

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{\text{有利事件数}}{\text{可能事件数}}。$$

因此，$P(E)$ 总是 0 和 1 之间的一个数；$0\leqslant P(E)\leqslant 1$。对于必然事件 S，有 $P(S)=1$。通常一个事件的概率表示为一个百分比。

对于“掷骰子”试验，事件 E_i(出现 i)($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)全是可能的。若掷到 3 视为有利的，则它出现的概率是 $P(E)=\frac{1}{6}$。这里假定有**一个理想骰子**，它在几何上和力学上是均匀的，因此考虑其形式和质量分布时，没有哪一面更为有利。于是，事件 E_i 是同等可能的。它们形成一个完备系，由此得出它们之和就是掷出 1 到 6 中一个数的必然事件。而这个概率是 1，因此每一个 E_i 的概率是 1/6。对于事件 $E=E_2+E_4+E_6$(出现偶数)，得到 $P(E)=\frac{3}{6}=1/2$。

概率论中的加法定律。若作为一个试验的结果有 n 个可能事件，又若 m_i 是事件 E_i 出现($i=1, 2, \cdots, k$)的有利事件数，且若事件 E_i($i=1, 2, \cdots, k$)互相排斥，则 $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$ 是事件 $E=\sum_{i=1}^{k} E_i$ 出现的有利事件数。由此得出，

$$P(E_i)=\frac{m_i}{n}(i=1, 2, \cdots, k)$$

和
$$P(E)=\frac{m}{n}=(m_1+m_2+\cdots+m_k)/n=\sum_{i=1}^{k} m_i/n=\sum_{i=1}^{k} P(E_i)。$$

一些互相排斥的事件之和的概率等于这些事件的概率之和，即

$$P(E_1+E_2+\cdots+E_k)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_k)。$$

【例】 作为掷一个理想骰子的结果，设 E_4 和 E_5 分别为出现 4 和 5 的事件。然后对于 $E=E_4+E_5$(出现 4 或 5)得到

$$P(E)=P(E_4+E_5)=P(E_4)+P(E_5)=2/6=1/3$$

(见图 14.2-1)。

若在试验中仅有 k 个事件 E_i($i=1, 2, \cdots, k$)是可能事件，则它们形

成事件的一个完备系；因为在这种情况下，$n=m=m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k$，由此可得 $P(E)=1$。对于两个互相排斥的事件 E_1 和 E_2，$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)=1$，或者 $P(E_2)=1-P(E_1)$；例如，设 E_1 是"生一个男孩"的事件，E_2 是"生一个女孩"的事件。

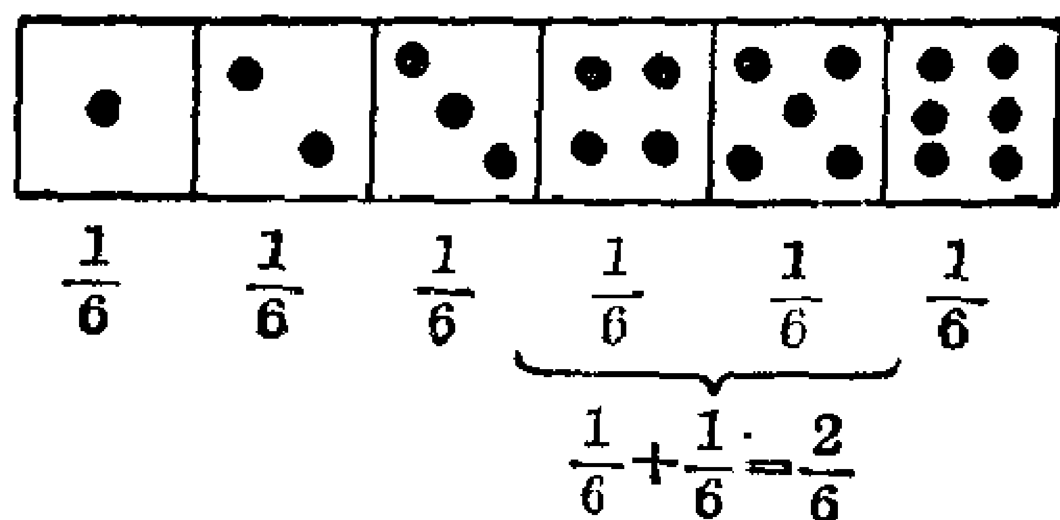


图 14.2-1 对于一个理想骰子的加法定律

若在有 n 种可能结果的一个试验中，事件 E_1 出现 m_1 次，事件 E_2 出现 m_2 次，但这两个事件并不互相排斥，那末要是考虑到事件 E_1E_2 出现的 l 次情况，加法定律仍然能用。存在三组互相排斥的事件：只有事件 E_1 出现的 $\overline{m}_1=(m_1-l)$ 次情形；唯有事件 E_2，出现的 $\overline{m}_2=(m_2-l)$ 次情形，以及这两个事件同时出现的 l 次情形。因此按照加法定律得到

$$P(E_1+E_2)=(m_1-l)/n+(m_2-l)/n+\frac{l}{n}$$

$$=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{l}{n}=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cdot E_2)。$$

若 $P(E_1E_2)$ 未知，则估计式 $P(E_1+E_2)\leqslant P(E_1)+P(E_2)$ 成立。这个加法定理能推广到多于两个事件的情况。

条件概率 无条件概率只依赖于对试验初始确定的一组条件；例如，使用的每一个骰子是理想的，因此每掷一次各个数同等似然。而条件概率至少还依赖一个另外的条件。在事件 F 已经出现的假定下事件 E 出现的概率记为 $P(E/F)$。

【例 1】 若一个罐中有 n 个球，其中 m 个是黑球，$(n-m)$ 个是白球，则对于"摸了又放回"试验，有两个可能事件，F_1"摸到一个黑球"和 F_2"摸到一个白球"。对于这两个事件得到无条件概率 $P(E_1)$ 和 $P(E_2)$。在"摸了不放回"的试验中，第二次摸时所提供的球的个数依赖于第一次的结果。若先是出现事件 F_1，则在罐中还有 $(m-1)$ 个黑球和 $(n-m)$ 个白球；若先出现的是 F_2，则在罐中是 m 个黑球和 $(n-m-1)$ 个白球。因此对于事件 E_1"第二次摸到一个黑球"和 E_2 是"第二次摸到一个白球"，有四个条件概率 $P(E_1/F_1)$，$P(E_2/F_1)$，$P(E_1/F_2)$，$P(E_2/F_2)$。

事件	F_1	F_1	F_2	F_2	第一次摸
概率	$\frac{m}{n}$	$\frac{m}{n}$	$\frac{n-m}{n}$	$\frac{n-m}{n}$	
事件	E_1/F_1	E_2/F_1	E_1/F_2	E_2/F_2	第二次摸
概率	$\frac{m-1}{n-1}$	$\frac{n-m}{n-1}$	$\frac{m}{n-1}$	$\frac{n-m-1}{n-1}$	

【例 2】　在掷两个理想骰子时，会出现 36 个事件 $E_{(a,b)}=(a, b)$，其中 $a=1, 2, \cdots, 6$ 和 $b=1, 2, \cdots, 6$，它们是两两互相排斥的。用这种记号和一般的有序数对一样，把(a, b)看作与(b, a)不同。因此能得到无条件概率 $P(E_{a,b})=\frac{1}{36}$。对于“在掷一次总数为 8”的事件，加法定理给出 $P(a+b=8)=\frac{5}{36}$，因为存在 5 个有利事件，对应于 $a+b=2+6=3+5=4+4=5+3=6+2$。另一方面，在附加条件 S_e“总数是偶数”下，得到 $P(E_{(a,b)}/S_e)=\frac{1}{18}$ 从而 $P(a+b=8/S_e)=\frac{5}{18}$。另外，“第二个骰子得数 4”的条件，给出另一个条件概率。对于 $b=4$，(a, b)可以是 6 个数对 $(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)$中的一个，所以 $P(E_{(a,b)}/(b=4))=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。对于在 $a=4$ 的 6 个数对中出现 $b=4$ 的概率，得到相同的数值 $\frac{1}{6}$(见图 14.2-2)。

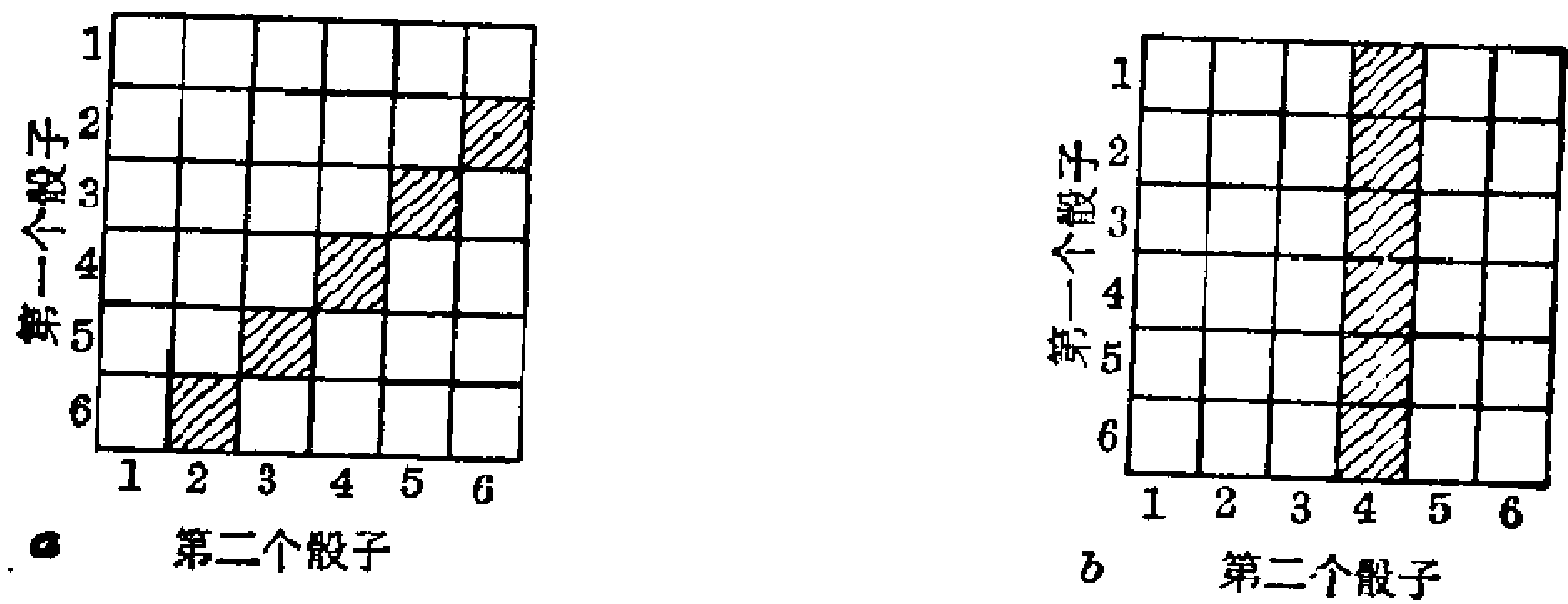


图 14.2-2　掷两个骰子时的概率

a)　总数为 8 的概率 5/36

b)　第二个骰子得数 4 的概率 6/36=1/6

概率的乘法定律。若在具有 n 次可能结果的试验中，事件 F 出现 k 次. 因此 $P(F)=\frac{k}{n}$，再若在这 k 次事件 F 中有 m 次 F 还满足另外的条件，在此条件下事件 (E/F) 出现，则对于这个事件的概率为 $P(E/F)=\frac{m}{k}$。另一方面，分数 $\frac{m}{n}$ 表示 $P(EF)$，因为乘积 EF 记为既满足 F 出现的条件又满足 E 出现的条件的这样一个事件。而 $\frac{m}{n}=\frac{k}{n}\cdot\frac{m}{k}$，由此得到 $P(EF)=P(F)\cdot P(E/F)$。

两个事件 E 和 F 同时出现的概率 $P(EF)$ 是第一个事件 F 的概率 $P(F)$ 和事件 E 在事件 F 已经出现的假定下的条件概率 $P(E/F)$ 的乘积。

【例】 当掷两个骰子时，有 36 个事件 $E_{a,b}$ 为可能事件。设 F 是"(a, b)的点数 $a+b$ 能被 2 整除"的事件，而 (E/F) 是其中 $a+b$ 也能被 3 整除的事件。因此 EF 是 $a+b$ 能被 6 整除的事件。从而得到

$$P(F)=\frac{18}{36},\ P(E/F)=6/18,\ P(EF)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

因为 EF 恰好由 6 个事件 $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5,1)$, $(6,6)$ 组成。换句话说，就是 $P(EF)=\frac{6}{36}=\frac{18}{36}\cdot\frac{6}{18}=P(E)\cdot P(E/F)$。

全概率定律 设事件 $F_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 形成一个*完备系*，又设 E 是另外一个事件，那末事件 $E\cdot F_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是两两互相排斥的。这些事件之和等于事件 E。按照概率的加法定律，概率 $P(E)$ 由 $P(EF_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 之和给出。但是对于和式中的每一项，由概率的乘法律得到 $P(E\cdot F_i)=P(F_i)P(E/F_i)$。因此把这些结果组合起来得到

$$P(E)=\sum_{i=1}^{n}P(F_i)\cdot P(E/F_i)。$$

这个无条件概率 $P(E)$ 称为*全概率*。

【例】 两个罐中各装有一定数量的黑球和白球，但每一罐中的黑球白球比例可以不同。于是"从其中一罐摸到一个白球"的事件 E 能表示为两个互相排斥的事件之和 EF_1+EF_2，其中 F_1 记"从罐 1 中摸球"，F_2 记"从罐 2 中摸球"。按照全概率定律，给出事件 E 的概率

$$P(E)=P(EF_1)+P(EF_2)=P(F_1)P(E/F_1)+P(F_2)P(E/F_2)。$$

因此 $P(E)$ 可以由 $P(F_1)$, $P(F_2)$, $P(E/F_1)$ 和 $P(E/F_2)$ 算得。

独立事件。 两个事件 E 和 F 彼此独立，是指一个事件的出现或者不出现不影响另一个事件的出现或者不出现；例如，在掷两个理想骰子时，一个骰子掷到的点数不依赖于另一个掷到的点数。若 E 记为“点数为 4”且两个骰子用下标 1 和 2 区分，则

$$P(E_1)=P(E_2)=\frac{1}{6},$$

但同样有

$$P(E_2/E_1)=\frac{1}{6}。$$

对于事件 $E_1\cap E_2=E_1\cdot E_2$，即“每个骰子点数为 4”，由此得到 $P(E_1\cap E_2)=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$。这个结果能推广到一般。

独立事件概率的乘法定律	$P(E_1\cap E_2\cap E_3)=P(E_1)\cdot P(E_2)\cdot P(E_3)$

概率的公理化定义 自然科学和工程技术的发展引起了一些问题，对于这些问题不能再不加鉴别地应用概率的经典定义。不能总是假定可能出现的情况数目是有限的以及个别情况是同等似然的。例如，纯粹从对称性的论证就难以确定在一根电话线上在指定的时间内 n 次总数中发生 m 次会话的概率。对于这些问题，概率的统计定义胜过经典定义，不过它的特征要比形式数学的定义更为描述性的。因此就有必要用一种公理化的结构来系统地研究概率演算的基本概念并建立起其可应用性的条件。在曾经提出的种种办法中，今天普遍遵循的是柯尔莫哥洛夫在三十年代初期为解决一些新问题而提出的公理化方法。他把概率论的概念与现代集合论、测度论和泛函分析联系起来。他的方法从概率的一些主要性质着手，这些性质无论它们是建立在经典的定义之上还是建立在统计的定义之上都有效。柯尔莫哥洛夫对于概率的概念创立了一个公理化基础，它包含了经典的和统计的两种定义，而且还满足现代自然科学和工程技术更加严格的要求。

这一公理化的发展建立在**基本事件集合** S 以及 S 的子集一个系统 $\boldsymbol{B}$ 的基础上。系统 $\boldsymbol{B}$ 的元素即 S 的子集，称为**随机事件**。若随机事件的系统 $\boldsymbol{B}$ 满足下列条件，则称为**波莱尔(Borel)事件场**。

波莱尔场:

1. 集合 S 是 $\boldsymbol{B}$ 的一个元素。

2. 若两个集合 E_1 和 E_2 是 B 的元素，则它们的并 $E_1\cup E_2$，它们的交 $E_1\cap E_2$ 以及它们的补 $\overline{E_1}$ 和 $\overline{E_2}$ 也是 B 的元素。

3. 若集合 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 是 B 的元素，则它们的并 $E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n\cup\cdots$ 和它们的交 $E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n\cap\cdots$ 也是 B 的元素。

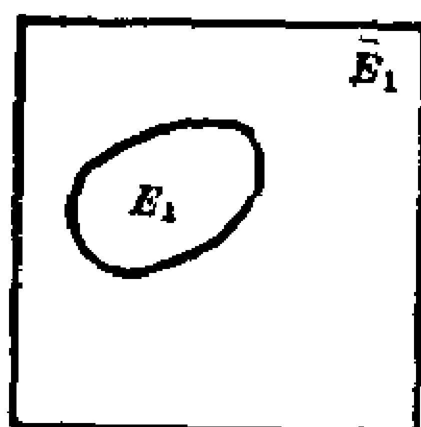


图 14.2-3 事件 E_1 和 $\overline{E}_1$

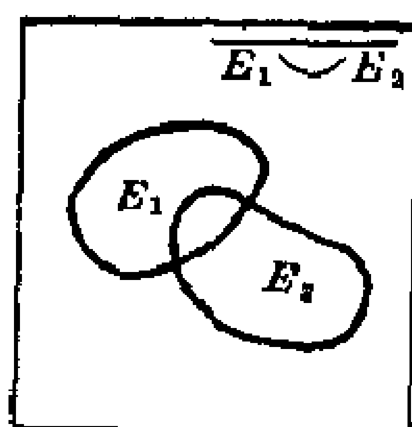


图 14.2-4 事件 $E_1\cup E_2$ 和事件 $\overline{E_1\cup E_2}$

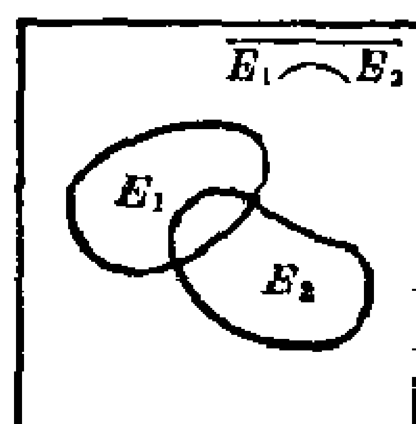


图 14.2-5 事件 $E_1\cap E_2$ 和事件 $\overline{E_1\cap E_2}$

若只满足条件 1 和 2，则称为一个**事件场**。

按照第二个条件，$\overline{S}$ 即空集 $\emptyset$ 必须是 B 的一个元素。它称为**不可能事件**。随机事件 E_1, $\overline{E}_1$, $E_1\cup E_2$, $\overline{E_1\cup E_2}$, $E_1\cap E_2$ 以及 $\overline{E_1\cap E_2}$ 已在图 14.2-3, 14.2-4, 14.2-5 上说明，其中随机事件用正方形内的点表示。于是，每一个点集表示一个随机事件。

现在用一个例子来说明。若掷一个骰子，则基本事件集是由 6 个元素 $e_i(i=1, 2, \cdots, 6)$ 组成，其中 e_i 记掷到点数为 i 的结果。于是，随机事件系统 B 由 $2^6=64$ 个元素组成：(e_1), (e_2), $\cdots$, (e_6), (e_1, e_2), $\cdots$, (e_5, e_6), (e_1, e_2, e_3), $\cdots$, (e_4, e_5, e_6), $\cdots$, $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ 以及空集 $\emptyset$。包含在每一对括号内的是 S 的某些元素，它们组成 S 的相应子集。

在随机事件系统 B 的基础上，其中 S 记为必然事件，$\overline{S}$ 记不可能事件，E 和 $\overline{E}$ 为对立的事件，于是一个事件出现的概率根据柯尔莫哥洛夫的公理系统来定义。

柯尔莫哥洛夫的公理系统：

1. 公理：对于事件场中的每一个随机事件 E，指定一个非负实数 $P(E)$，称为 E 的概率。

2. 公理：必然事件 S 的概率为 1，即 $P(S)=1$。

3. 公理：若事件 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是两两互相排斥的，则

$$P(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_n)。$$

这个系统还补充如下的广义加法公理，这就有可能考虑由无限多个部分事件组成的那些事件(在概率论中经常出现)。

广义加法公理：若事件E的出现等于两两互相排斥的事件$E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$中任一事件的出现，则$P(E)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_n)+\cdots$。

从这些公理作为第一个推论得到，对于B中的每一个事件E有$P(E)\leqslant 1$。这个公理系统无矛盾但不完备。它是概率论结构的基础。概率的测度论概念连同充分广泛的频率解释，是数理统计的基础。

随机变量和分布

随机变量X是这样的一个变量，在相同条件下所进行的不同试验中它取不同的值x，其中的每一个值则代表一个**随机事件**。下面将只考虑**离散随机变量**X，它们取有限个或至多可列无限个值x，或考虑**连续随机变量**X，它能取到有限区间或无限区间的一切值。例如，掷一个骰子得点的数值是一个离散随机变量；随机事件或**实现**是$x_i=i(i=1, 2, \cdots, 6)$。另一方面，气体分子的瞬时速度X是一个连续随机变量，它能取到某区间的每一个值。因此，随机变量完全由它们的概率，密度和分布函数来表征。

离散随机变量的概率和分布函数　随机事件x_i视为**间断的**，从而它们的概率$P(x_i)$为**间断量**。于是，概率函数与此间断量有关；例如，对于一个铅心骰子，概率$P(X=x_i)$对应于"点数为i"的事件x_i。因为一定出现这些事件当中的一个事件，所以$\sum_{i=1}^{6}P(X=x_i)=1$。

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

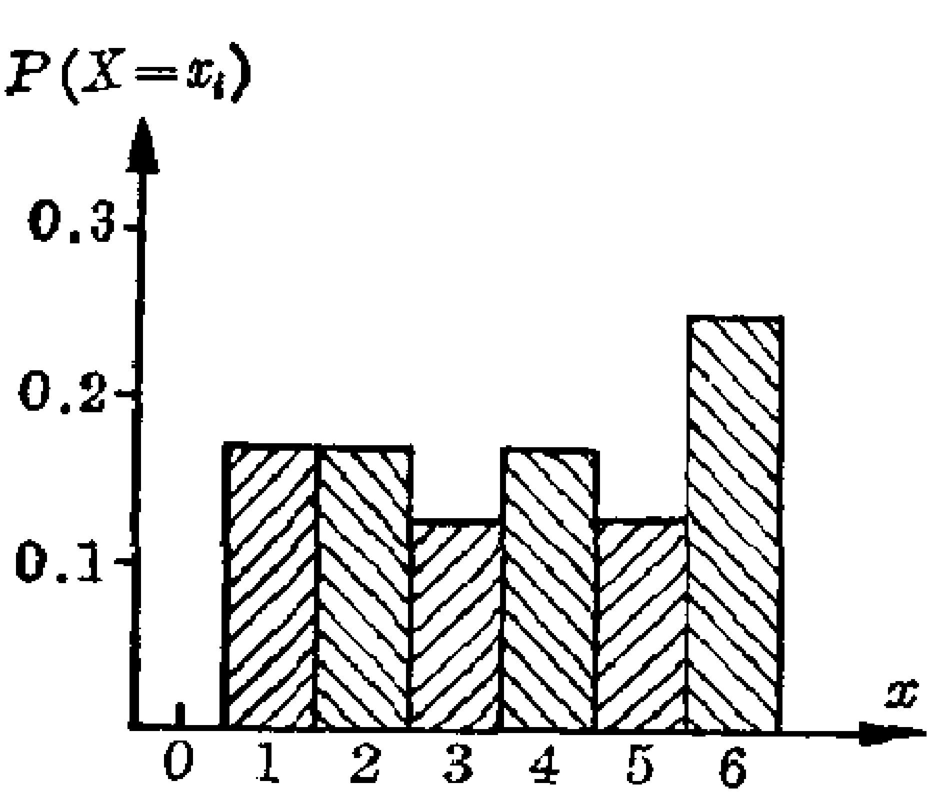


图 14.2-6　离散随机变量的概率函数图示

在图上，用直条形表示概率函数，其宽是e_x，高是$e_y\cdot P(X=x_i)$。对于一个铅心骰子，图14.2-6中给出值$P(X=x_i)$。若在横坐标和纵坐标方向上取e_x和e_y为单位，使得$e_x=e_y=1$，则矩形面积之和为$\sum P(X=x_i)=1$。分布函数$F(x)$给出随机变量X只取值$x_i<x$的概率$P(X<x)$。这样，对于具有实现$i=1, 2, \cdots, n$的随机变量X，当$x<x_1$时，$P(X<x)=0$；当$x_1<x<x_2$时，

$$P(X<x)=P(x_1);$$

当 $x_2<x<x_3$ 时，$P(X<x)=P(x_1)+P(x_2)$；当 $x>x_n$ 时，$P(X<x)=1$。因此分布函数 $F(x)$ 从 $F(-\infty)=0$ 到 $F(+\infty)=1$ 单调增加。例如，对于一个铅心骰子给定的概率函数，由于 $x_i=i$，得

$$F(1)=P(X<1)=0;$$

$$F(2)=P(X<2)=P(X=1)=\frac{1}{6};$$

$$F(3)=P(X<3)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{3};$$

$$F(4)=P(X<4)=\sum_{i=1}^{3}P(X=i)=\frac{11}{24};$$

$$F(5)=P(X<5)=\sum_{i=1}^{4}P(X=i)=\frac{5}{8};$$

$$F(6)=P(X<6)=\sum_{i=1}^{5}P(X=i)=\frac{3}{4};$$

$$F(X>6)=P(X<x)=\sum_{i=1}^{6}P(X=i)=1。$$

从图 14.2-7 中看出，分布函数 $F(x)$ 的图形是一个阶梯函数，在笛卡尔坐标系中，x_i 取为横坐标，相应的 $F(x)$ 取为纵坐标。

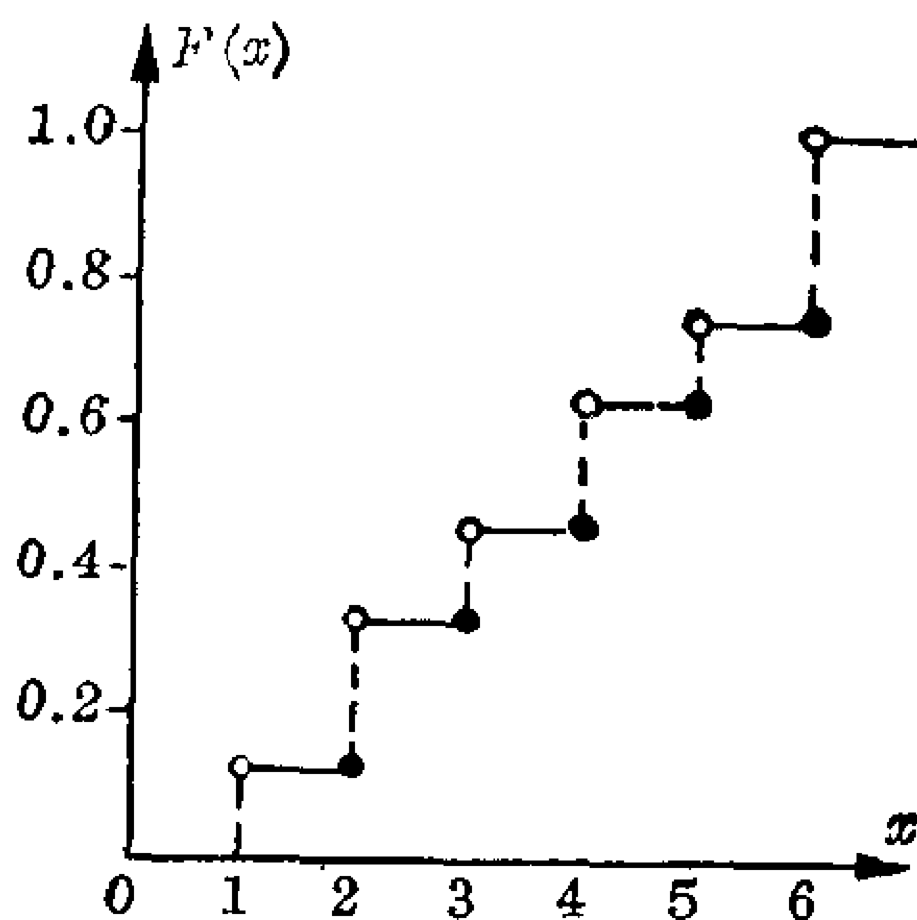


图 14.2-7 离散随机变量的分布函数图示

连续随机变量 X 的密度和分布函数 对于一个连续随机变量 X，一个区间中的每个值 x 是一个随机事件，它出现的概率为 0。但是对于每一个值 x，对应有**概率密度**或**密度函数**的一个值 $f(x)$。对于这个函数 $f(x)\geqslant 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=1$（见图 14.2-8）；即 X 轴和 $f(x)$ 的图形之间面积为 1。

分布函数 $F(x)$ 还表示连续随机变量取小于 x 值的概率 $P(X<x)$。因为 $f(t)\geqslant 0$，所以从 $F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ 得到，函数 $F(x)$ 从 $F(-\infty)=0$ 到 $F(+\infty)=1$ 单调增加（见图 14.2-9）。

随机变量 X 取区间 $x_1\leqslant x<x_2$ 值的概率由 $P(x_1\leqslant X<x_2)=P(X<$

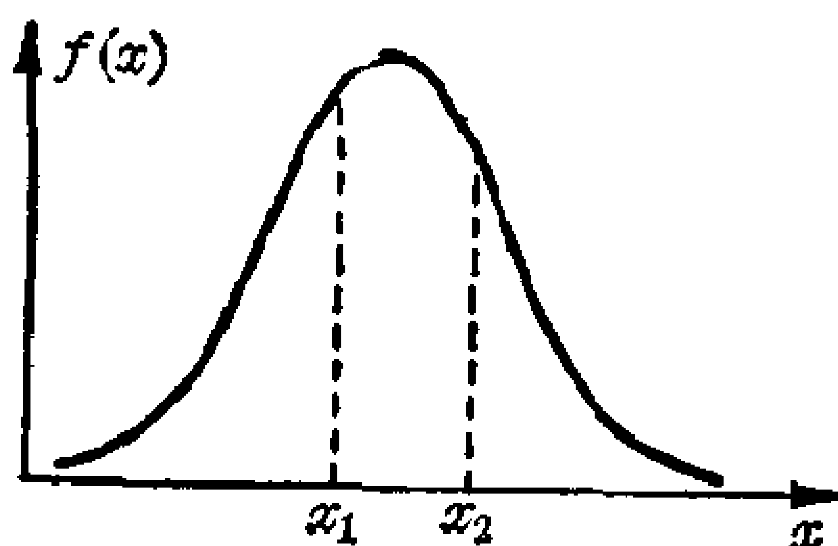


图 14.2-8 密度函数的表示

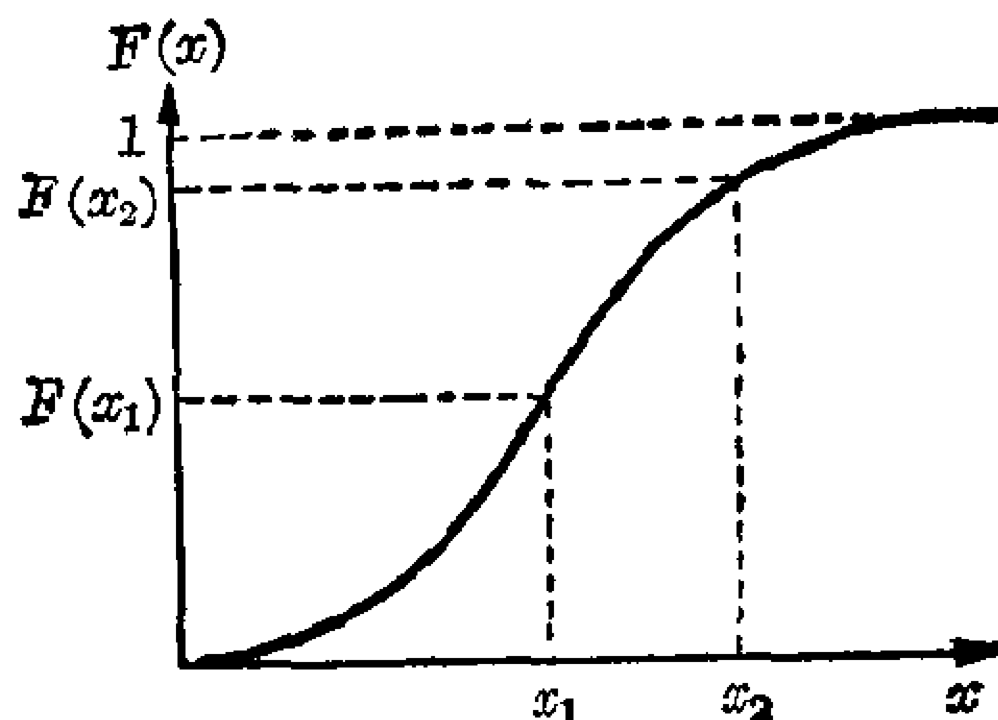


图 14.2-9 连续随机变量的分布函数

$x_2)-P(X<x_1)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt$ 给出，在密度函数的图示中是用虚线部分的面积表示。一个著名的连续随机变量 X 是**正态分布**，它将在后面研究。

均值或期望和方差

若一个随机变量是离散的，则它由概率函数完全地描述，若一个随机变量是连续的，则它由密度函数完全描述。从这些函数中，能算出一些参数来表征随机变量。最重要的是均值或期望和方差。

均值或期望 一个**离散随机变量** X 的均值 μ，是由它的每一个可能值乘以相应的概率再形成所有这些乘积之和而得到的。这个均值不一定在离散随机变量 X 的值中出现。

若 X 由概率函数 $P(X=x_i)=p_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 描述，则均值 μ 确定为 $\mu=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$。

离散随机变量的均值	$\mu=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

【例 1】 对于一个**理想**骰子，$p_i=\frac{1}{6}(i=1, 2, \cdots, 6)$；于是均值

$$\mu=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3.5。$$

对于一个**连续随机变量** X，均值 μ 是由 x 乘以密度函数 $f(x)$，再将此乘积从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分得到的。

连续随机变量的均值	$\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)dx$

【例 2】 求具有正态分布或高斯分布(见图 14.2–10)

$$p(x)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-(x-b)^2/(2a^2)}$$

概率密度的连续随机变量 X 的均值。

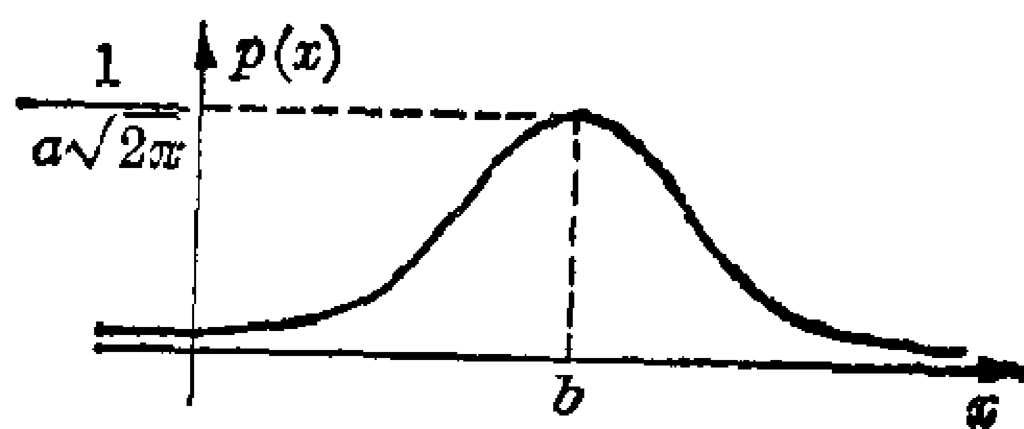


图 14.2–10 正态分布的均值

于是

$$\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}e^{-(x-b)^2/(2a^2)}dx。$$

用代换 $(x-b)/(a\sqrt{2})=z$, $dx/(a\sqrt{2})=dz$, 再借助于积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx=0$$

得到

$$\mu=a\sqrt{2}/\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[z+b/(a\sqrt{2})]e^{-z^2}dz$$

$$=b/\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=b。$$

随机变量之和与积的均值 具有均值 μ_x 和 μ_y 的随机变量 X 与 Y 之和 $Z=X+Y$ 也是一个随机变量;例如,掷两个骰子得点的数值。

随机变量 Z 的均值 μ_z 由单个随机变量 X 与 Y 的均值 μ_x 和 μ_y 确定。

两个随机变量之和的均值等于两个随机变量的均值之和。

$$\boxed{\mu_z=\mu_x+\mu_y}$$

这个法则还能推广到三个或更多个随机变量之和的均值。例如,随机变量 $Z=U+X+Y$ 由具有均值 μ_u, μ_x, μ_y 的随机变量 U, X, Y 之和形成,它的均值是 $\mu_z=\mu_u+\mu_x+\mu_y$。

【例 3】 若掷两个理想骰子,则随机变量 X 和 Y 分别是第一个和第二个骰子得点的数值。每一个的均值是已知的: $\mu_x=3.5$; $\mu_y=3.5$。于是掷两个骰子得点总数值的均值是 $\mu_z=3.5+3.5=7$。

【例 4】 可以把一个工厂在很小的时间单位(如一天)内的产量看作一个随机变量,由于某些总不能预测也不能用技术方法消除的故障,产量会受到一些小的变化。两个工厂 A 和 B 的产品数(在 A 为随机变量 X, 在 B 为 Y) 分别有均值 $\mu_x=260$ 和 $\mu_y=90$。于是两个工厂的生产(随机变量 Z)有均值

$$\mu_z=260+90=350。$$

同样，若 X 和 Y 是独立的，即若方程

$$P(X<x; Y<y) = P(X<x) \cdot P(Y<y)$$

对于任意的 x 和 y 都成立，则两个随机变量 X 和 Y 的积也有一个简单法则。这里 $P(X<x;\ Y<y)$ 是 X 小于 x 并且 Y 小于 y 的概率。若 μ_x 和 μ_y 是两个独立随机变量 X 和 Y 的均值，则随机变量 $Z=X\cdot Y$ 的均值 μ_z 由 $\mu_z=\mu_x\cdot\mu_y$ 给出。

两个独立随机变量乘积的均值等于两个变量均值的乘积。

$$\boxed{\mu_z=\mu_x\cdot\mu_y}$$

正如多于两个随机变量之和的情况一样，这个法则也能推广到多于两个独立随机变量之积的情况。

【例5】　矩形板的长度(用英寸为单位)和宽度(用英寸为单位)是随机变量(分别用 X 和 Y 表示)。由此得到，面积也是一个随机变量($Z=X\cdot Y$)。设 X 和 Y 的均值分别是 $\mu_x=120$ 英寸和 $\mu_y=80$ 英寸，那末板面积的均值 $\mu_z=120\times80=9600$平方英寸。

方差　在许多情况下，均值不足以表征一个随机变量 X。例如，在螺栓的生产中，直径是一项重要的测量，在概率论意义下是一个随机变量 X。机器调节在最佳状态下，它的均值 μ 等于所要求的值。但在生产过程中，发现许多直径大于还有许多小于所要求的值。对于相同的均值，这种偏差能在一台机器上大些，在另一台机器上小些，但是它们必须在容许界限内。

随机变量 X 的方差 σ^2 是用来描述它们的，其平方根 σ 称为*标准偏差*或*均方根差*。它是偏离均值大小的一种度量。

离散随机变量 X 的方差 σ^2 由其与均值的每一个偏差 $(x_i-\mu)$ 的平方乘以相应的概率，再将所有这些乘积加起来得到。

同一个概率函数象用于 X 那样地应用于量 $(x_i-\mu)^2$，即 $\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{p_1p_2\cdots p_n}$，以及 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$。

离散随机变量的方差	$\sigma^2=\sum_i(x_i-\mu)^2p_i$

【例6】　当掷一个理想骰子时，得点的数值是一个随机变量 X，均值为 $\mu=3.5$，概率函数为

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

因此其方差由下式给出:

$$\sigma^2=(1-3.5)^2\cdot\frac{1}{6}+(2-3.5)^2\cdot\frac{1}{6}+(3-3.5)^2\cdot\frac{1}{6}$$
$$+(4-3.5)^2\cdot\frac{1}{6}+(5-3.5)^2\cdot\frac{1}{6}$$
$$+(6-3.5)^2\cdot\frac{1}{6}=2.92,$$

即有 $$\sigma=\sqrt{2.92}=1.71。$$

连续随机变量 X 的方差 σ^2 由其与均值的偏差 $(x-\mu)$ 的平方乘以密度函数 $f(x)$，然后将此乘积从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分得到。

连续随机变量的方差	$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$

【例 7】 求具有均值 b 和概率密度

$$p(x)=1/(a\sqrt{2\pi})e^{-(x-b)^2/(2a^2)}$$ （高斯分布或正态分布）

的连续随机变量 X 的方差。

方差的定义给出:

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-b)^2/(a\sqrt{2\pi})e^{-(x-b)^2/(2a^2)}dx。$$

利用上面给出的代换，得到结果 $\sigma^2=a^2$。

两个独立随机变量之和的方差 若 X 和 Y 是两个独立随机变量，分别具有方差 σ_x^2 和 σ_y^2，则 $Z=X+Y$ 也是一个随机变量(例如，掷两个骰子得点的数值)，并且随机变量 Z 的方差 σ_z^2 由两个变量 X 和 Y 的方差确定。

两个独立随机变量之和的方差等于它们的方差之和。

$$\boxed{\sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2}$$

【例 8】 掷两个理想骰子得点的数值是一个随机变量 Z。它是两个随机变量 X 与 Y 之和，而 X 和 Y 是在每掷一次两个骰子分别得点的数值。其中每一个的方差是 $\sigma_x^2=\sigma_y^2=2.92$。因此随机变量 Z 的方差 σ_z^2 给出

为 $\sigma_s^2=2.92+2.92=5.84$。

切比晓夫不等式

前一节表明，一个随机变量性态的一般概念能从均值和方差获得。但是，当这些量给定时，仍旧不能回答如下的问题：对与均值 μ 的一个特定偏差其概率是多少。**切比晓夫不等式**对此给出一个简单估计。

一个离散的或连续的随机变量 X，取值 x、均值 μ 和方差 σ^2。不加推导地写出切比晓夫不等式如下：

切比晓夫不等式	$P\{\lvert x-\mu\rvert\geqslant\varepsilon\}\leqslant\sigma^2/\varepsilon^2$

差 $(x-\mu)$ 的绝对值大于或等于任意一个数 $\varepsilon>0$ 的概率小于或等于方差除以 ε^2。

借助于这个不等式，能够估计对均值不同偏差的概率。例如，若测量长度时，设定它的平均长度为 300 码，方差为 36，则出现偏差大于 30 码的概率估计为：

$$P(|x-300|\geqslant 30)\leqslant 36/900=0.04;$$

即此概率至多为 0.04。

大数定律

在日常生活和理论研究中，概率靠近 1 或 0 的事件起着重要的作用。例如人们关心，安全运送旅客的概率不能不是 1，桥梁倒塌的概率实际上应为 0。因此概率论的一项本质任务就是发现概率靠近 1 的情况。在这些定律中，**大数定律**特别重要，下面用两种形式进行说明。

按照切比晓夫的定律。给出的是 n 个两两独立的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，其均值分别为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，方差全部小于 b^2。设 $A=(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)/n$ 记这些均值的算术平均。从切比晓夫不等式得到

$$P\left(\left|(1/n)\sum_{i=1}^{n}X_i-A\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-b^2/(n\varepsilon^2),$$

其中 ε 是任意一个正数。

切比晓夫大数定律。对于充分大的值 n，n 个两两独立随机变量均值的算术平均 A 与这些变量的算术平均之差小于 ε 的概率任意靠近 1。

切比晓夫大数定律证实，n 次测量的均值要比任何单个测量来得可靠。

按照伯努利的定律：事件 E 出现的概率为 p，在 n 次独立试验中事

件 E 出现 n_1 次。于是对任意一个正数 $\varepsilon>0$, 有

$$P(|n_1/n-p|<\varepsilon)\geqslant 1-1/(4\varepsilon^2 n)。$$

伯努利大数定律。对于充分大的值 n, 在 n 次观察中事件 E 出现的相对频率与此事件出现的概率 p 之差小于 ε 的概率任意靠近 1。

伯努利大数定律是切比晓夫定律的一种特殊情况。它建立相对频率,可用于未知概率的估计。

【例】 在掷一枚硬币时区分**正面**和**反面**两个事件。给出掷硬币的一系列结果,以 $\varepsilon=0.1$ 利用大数定律。可以看到,当随着掷币次数的增加,相对频率 n_1/n 与概率 $p=0.5$ 的偏差小于 0.1 的概率趋于 1。

	n	n_1 次正面	n_1/n	$1-1/(4\varepsilon^2 n)$
蒲 丰	4040	2048	0.507	0.9938
支尔逊	12000	6019	0.5016	0.9979
皮尔逊	24000	12012	0.5005	0.9990

某些重要的分布

一个随机变量 X 完全由它的概率函数或密度函数,或者说由它的分布函数表征;简而言之:由它的分布表征。某些类型的分布在实践中获得了很重要的意义。

二项分布 二项分布(有时称为**伯努利分布**)可用于建立在如下试验设计基础上的问题:在一个罐中有黑球和白球,事件 E"摸到黑球"的概率为 p。于是事件 $\bar{E}$"摸到白球"的概率为$(1-p)$。一系列 n 次摸了放回的试验,其中事件 E 出现 k 次,不出现$(n-k)$次,这个试验确定随机变量 X。它的分布是**二项分布**。它的**概率函数** $P_n(k)$ 可以确定如下:因为每一个球摸到后再放回,所以每一次摸球是一个独立事件,按照乘法定律,摸到 k 个黑球和$(n-k)$个白球的概率是 $p^k(1-p)^{n-k}$。可能摸到 k 个黑球和$(n-k)$个白球的不同次序有 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 种排列,而其中每一种都导致相同的结果。因此,$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$。一个一个 k 值的概率就给出概率函数。对所有的 $k<x$ 相加,得到分布函数

$$F_n(x)=\sum_k P_n(k)。$$

【例 1】 从罐中摸出一个球，然后再放回罐中。摸到一个黑球的概率是 $p=\frac{1}{4}$。每摸 10 次形成一组。若试验连续进行，在每一组中黑球的数目会变化：它是一个随机变量。要求找出这个随机变量的概率函数和分布函数。需要知道“在 10 个球中的黑球数”。借助于公式

$$P_{10}(k)=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k},$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, 10$，得到概率函数(见图 14.2-11)：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10}(k)$	0.056	0.188	0.282	0.250	0.146	0.058	0.016	0.03	0.001	0.0	0.0

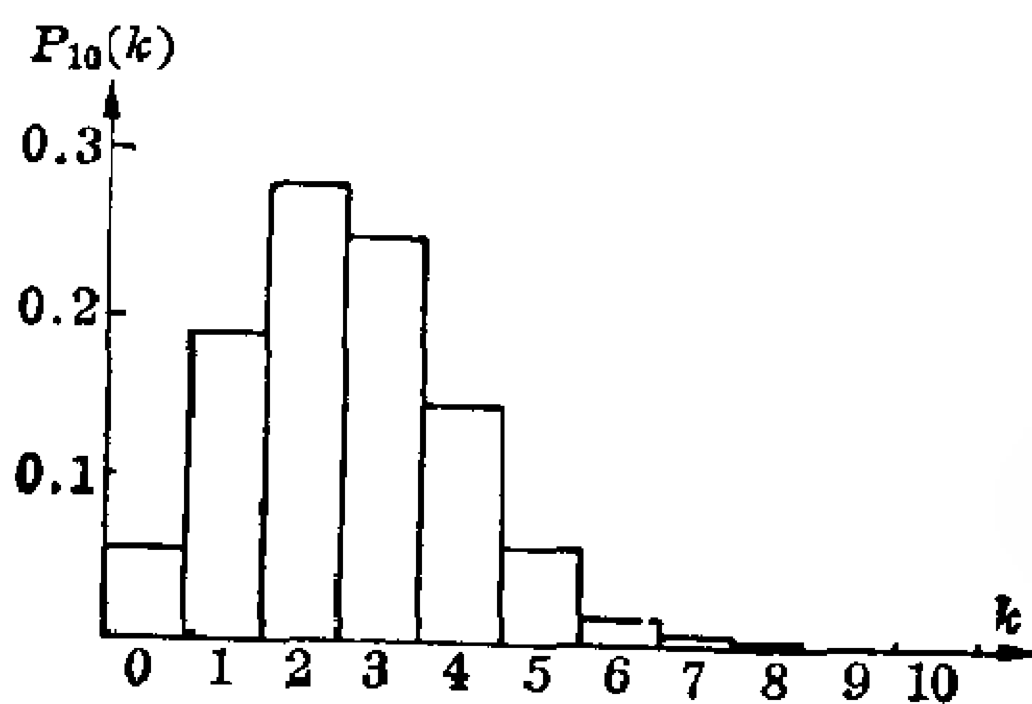


图 14.2-11　二项分布的概率函数 $p_{10}(k)$

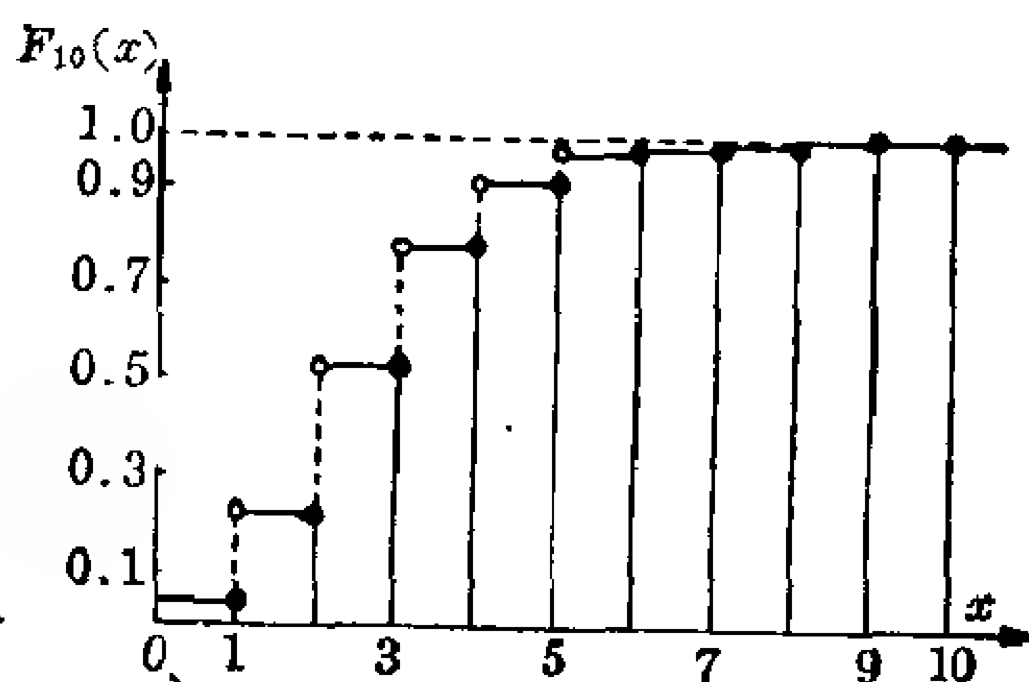


图 14.2-12　分布函数 $F_{10}(x)$ 的表示

再从 $F_{10}(x)=\sum_k P_{10}(k)$，其中求和对所有的 $k<x$ 实施，得分布函数为(见图 14.2-12)：

k	0	1	2	3	4	5
$F_{10}(k)$	0.0	0.056	0.244	0.526	0.776	0.922
k	6	7	8	9	10	>10
$F_{10}(k)$	0.980	0.996	0.999	1.0	1.0	1.0

从图示可以得到概率函数和分布函数的一个印象。其中 k 和 x 取为横

坐标，$P_{10}(k)$和 $F_{10}(k)$分别为纵坐标。

【例 2】 根据生男的概率 $p=0.515$，借助于二项分布可以算出一家6个小孩中包含 0, 1, 2, 3, 4, 5 或 6 个男孩的概率：

男孩	6	5	4	3	2	1	0
概率	0.019	0.105	0.248	0.312	0.220	0.083	0.013

为了简化概率 $P_n(k)$的冗长计算，导出递推公式：

递推公式	$P_n(k+1)=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}P_n(k)$

二项分布的均值和方差。在离散随机变量的均值公式中，代入相应的量可得

$$\mu=\sum_{m=0}^{n} mP_n(m)=\sum_{m=0}^{n} m\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=np\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}p^m(1-p)^{n-1-m}。$$

考虑到二项式定理，由此得到 $\mu=np[p+(1-p)]^{n-1}=np$。按此均值 np，就可给出方差为：

$$\sigma^2=\sum_{m=0}^{n}(m-np)^2P_n(m)$$

$$=\sum_{m=0}^{n}m^2\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}-2np\sum_{m=0}^{n}m\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

$$+n^2p^2\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=\sum_{m=0}^{n}m^2\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}-n^2p^2。$$

用计算均值同样的方式算出第一个和式，最后得到

$$\sigma^2=np[(1-p)-np]+n^2p^2=np(1-p)。$$

对于上面的例 2，它的均值和方差给出如下：

$$\mu=10\cdot\frac{1}{4}=2.5;\ \sigma^2=10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=1.875。$$

对于小的 n 和 k 值，用二项分布很容易。但是对于大的 n 和 k 值，计算就变得十分麻烦。于是可根据问题的性质而用普阿松分布或者正态分布。

布函数

$$F_n(x)=\sum_k \psi_n(k)。$$

【例】 从一个罐中重复摸球，再放回罐中。摸到一个黑球的概率是 $p=0.01$。每摸 60 次形成一组。若进行连续试验，则在每一组中黑球的数目将会变化；它是一个随机变量。要求"在 60 个球中黑球的数目"这个随机变量的概率函数和分布函数。由 $\psi_{60}(k)=(0.6)^k e^{-0.6}/k!$，其中 $a=60\times0.01=0.06$，k 可取值 0, 1, 2, …, 60，得到概率函数：

k	0	1	2	3	4	5	…	60
$\psi_{60}(k)$	0.549	0.329	0.099	0.020	0.003	0.000	…	0.000

再从 $F_{60}(x)=\sum_k \psi_{60}(k)$，这里对于所有的 $k<x$ 求和，得到分布函数：

x	0	1	2	3	4	5	6	…	60	>60
$F_{60}(x)$	0.0	0.549	0.878	0.977	0.997	1.000	1.000	…	1.000	1.000

用象二项分布同样的方式得到图形表示。

在图 14.2-14 中，画出不同 a 值的普阿松分布。它表明，分布的顶峰随着 a 值增加逐步向右移动，并逐渐减少曲线的不对称性。

为了计算各别的概率，使用一个从比率

$$\psi_n(k+1)/\psi_n(k)$$
$$=[k!e^{k+1}e^{-a}]/[(k+1)!a^k e^{-a}]$$
$$=a/(k+1)$$

得到的相当的递推公式：

递推公式	$\psi_n(k+1)=a/(k+1)\psi_n(k)$

普阿松分布的均值和方差 这些量从二项分布的相应量来计算，其中 np 等于 a，而 p 趋于 0。得到 $\mu=np=a$；$\sigma^2=np=a$。

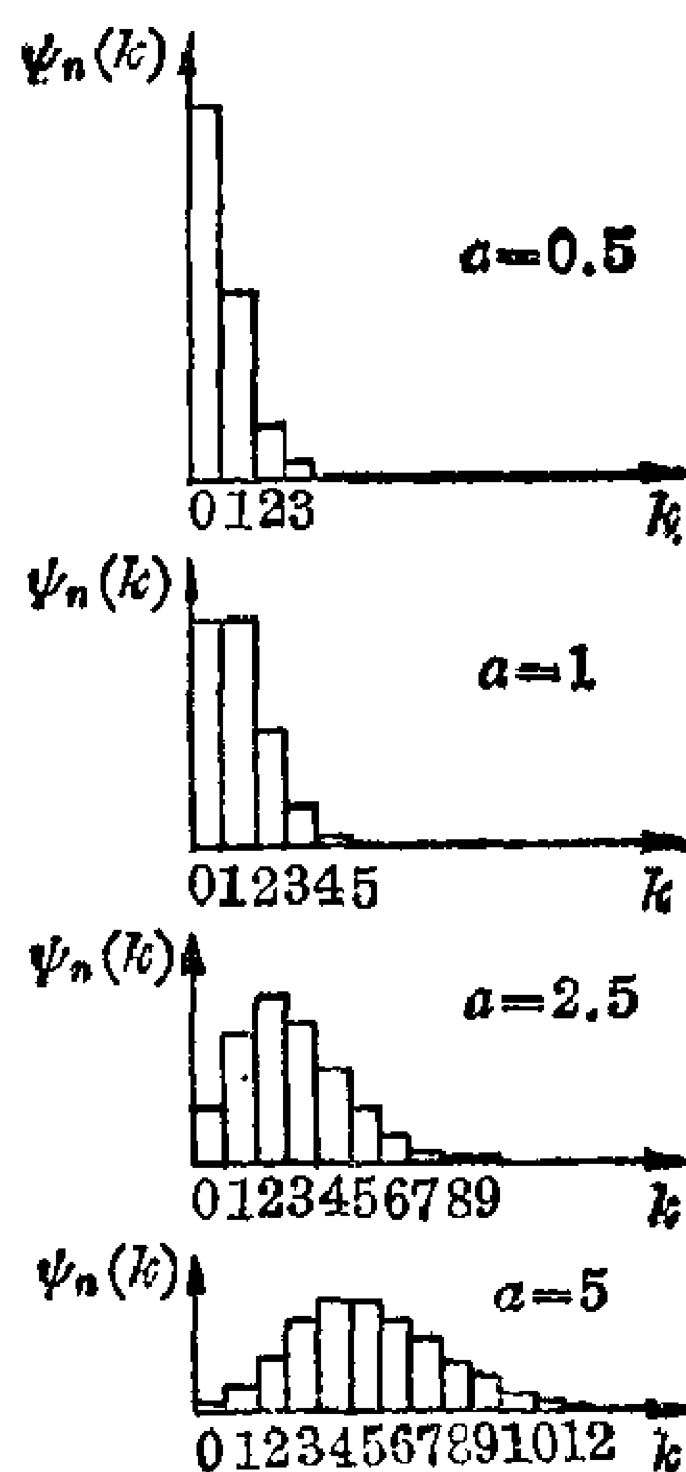


图 14.2-14 不同 a 值的普阿松分布

这样，均值和方差相等。

普　阿　松　分　布	
概率函数	$\psi_n(k)=a^k e^{-a}/k!$
均　值	$\mu=a$
方　差	$\sigma^2=a$

普阿松分布的应用范围一度只限于非常罕见的事件，例如小孩自杀或者在军队中被马踢死。可是近几十年来，它已取得颇大的重要性。今天它在电讯中，在统计的质量控制中，对于描述放射性物质的衰变，在纺织工业中，在生物学中和在气象学中，都起着重要的作用。此外，在许多情况下，普阿松分布用作二项分布的一个逼近，因为实际上对于充分大的 n 值和充分小的 p 值，这两个分布是相当一致的。

正态分布或高斯分布　正态分布是概率论中最重要的一种分布，它是高斯在把最小二乘法应用于测量时发现的。

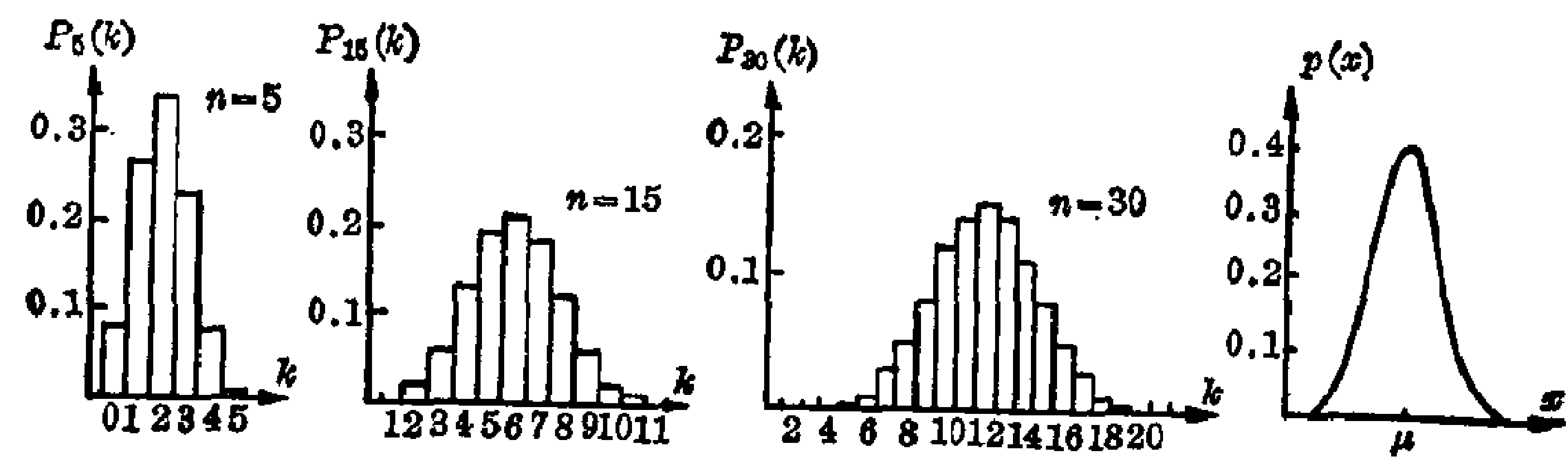


图 14.2-15　摸球次数 n 增大时概率函数的图形表示

对于二项分布，给出概率函数 $P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，其中“摸到一个黑球”事件的概率 p 在 0 和 1 之间有一个定值。当摸球次数 n 增大时(参见二项分布)，概率函数就逐渐失去它的不对称性(图 14.2-15)。对于 $p=0.2$ 以及 $n=5$, 15 和 30 得到:

k	0	1	2	3	4	5
$P_5(k)$	0.08	0.26	0.34	0.23	0.08	0.01

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P_{15}(k)$	0.02	0.06	0.13	0.19	0.21	0.18	0.12	0.06	0.02	0.01

k	6	7	8	9	10	11	12
$P_{30}(k)$	0.01	0.03	0.05	0.08	0.12	0.14	0.15
k	13	14	15	16	17	18	
$P_{30}(k)$	0.14	0.11	0.08	0.05	0.03	0.01	

当摸球次数 n 不断增加超出每一个界限时，即当 $n\to\infty$ 时，就得到**正态分布**。该随机变量 X 的特征值 x 的个数不再是可列的；随机变量 X 是连续的。它的**密度函数** $p(x)$ 通过极限过程而得

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k)=p(x)=1/[a\sqrt{2\pi}]e^{-(x-b)^2/(2a^2)},$$

这是可以详细证明的。数 a 和数 b 是常数。对于均值 μ 和方差 σ^2 得到

$$\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} x/[a\sqrt{2\pi}]e^{-(x-b)^2/(2a^2)}\,dx=b,$$

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-b)^2/[a\sqrt{2\pi}]e^{-(x-b)^2/(2a^2)}\,dx=a^2$$

(参见均值或期望和方差，例 2 和例 7)。均值和方差完全描述了这个分布。

图 14.2-16 表明对于不同值 $a^2=\sigma^2$，频率分布 $p(x)$ 的图形表示。这

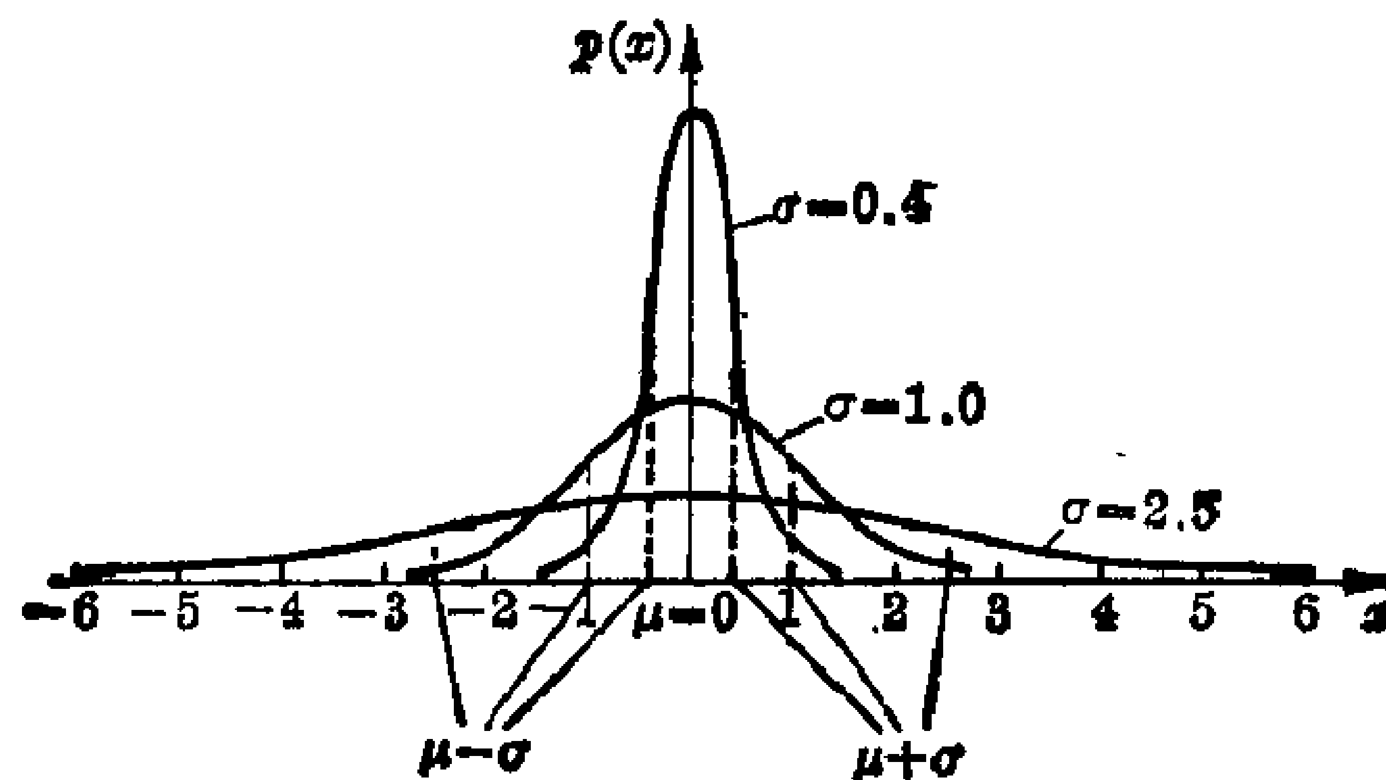


图 14.2-16　对不同的 σ，高斯分布的频率分布

些曲线是钟形曲线。每个分布的峰值位于均值 μ。曲线从此峰值往其两边对称地下降，渐近地趋于 x 轴。曲线在距均值 $\pm\sigma$ 处拐折。从图中容易看出方差大小对于钟形曲线形式的影响。随着 σ 的增大，曲线就变得平坦和宽阔。

高　斯　分　布　或　正　态　分　布
密　度　函　数 $p(x)=1/[a\sqrt{2\pi}]e^{-(x-b)^2/(2a^2)}$
均　值 $\mu=b$
方　差 $\sigma^2=a^2$

正规化高斯分布。一个可以用均值为 μ 和方差为 σ^2 的高斯分布来描述的随机变量 X，计算这个随机变量 X 的密度函数 $p(x)$ 的一个一个值是冗长的。因此将每一个高斯分布与均值 $\mu=0$ 和方差 $\sigma^2=1$ 的高斯分布联系起来，这一个高斯分布的密度函数 $\varphi(\lambda)=1/\sqrt{2\pi}\ e^{-\lambda^2/2}$；它简称为**正规化高斯分布**或称为**正态分布**。密度函数 $\varphi(\lambda)$ 列表，由于曲线的对称性，在表中仅给出对应于正特征值的密度函数值。借助于代换 $\lambda=(x-\mu)/\sigma$，能将均值为 μ 和方差为 σ^2 的高斯分布变换成正规化分布。对于一个算得的值 λ，在表中查出密度函数 $\varphi(\lambda)$ 的对应值，然后由关系 $p(x)=\varphi(\lambda)/\sigma$ 求出对应于特征值 x 的密度函数 $p(x)$ 的值。

【例】　已知一个高斯分布的均值为 $\mu=20$ 和方差为 $\sigma^2=25$。首先计算 $\lambda=(x-20)/5$，然后在表中查出 $\varphi(\lambda)$，最后计算 $p(x)=\varphi(\lambda)/5$。

x	20	21	22	…	25	…	30
λ	0	0.2	0.4	…	1	…	2
$\varphi(\lambda)$	0.3989	0.3910	0.3683	…	0.2420	…	0.054
$p(x)$	0.0798	0.0782	0.0737	…	0.0584	…	0.0108

正态分布 $\varphi(\lambda)=1/\sqrt{2\pi}\ e^{-\lambda^2/2}$ **的纵坐标。**

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	0.3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	0.3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	0.3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	0.3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	0.3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0.6	0.3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	0.3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	0.2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	0.2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	0.2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	0.1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1.3	0.1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1.4	0.1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	0.1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	0.1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0.0941	925	909	893	878	863	848	833	818	804
1.8	0.0790	775	761	748	734	721	707	694	681	669
1.9	0.0656	644	632	620	608	596	584	573	562	551
2.0	0.0540	529	519	508	498	488	478	468	459	449
2.1	0.0440	431	422	413	404	396	387	379	371	363
2.2	0.0355	347	339	332	325	317	310	303	297	290
2.3	0.0283	277	271	264	258	252	246	241	235	229
2.4	0.0224	219	213	208	203	198	194	189	184	180
2.5	0.0175	171	167	163	159	155	151	147	143	139
2.6	0.0136	132	129	126	122	119	116	113	110	107
2.7	0.0104	101	99	96	94	91	89	86	84	81
2.8	0.0079	77	75	73	71	69	67	65	63	61
2.9	0.0060	58	56	55	53	51	50	49	47	46
3.0	0.0044	43	42	41	39	38	37	36	35	34
3.1	0.0033	32	31	30	29	28	27	26	25	25
3.2	0.0024	23	22	22	21	20	20	19	18	18
3.3	0.0017	17	16	16	15	15	14	14	13	13
3.4	0.0012	12	12	11	11	10	10	10	9	9
3.5	0.0009									
4.0	0.0001									

高斯分布的分布函数。高斯分布的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=1/(a\sqrt{2\pi})\times\int_{-\infty}^{x}e^{-(t-b)^2/(2a^2)}dt$$

称为高斯积分或误差积分。

这个分布函数 $F(x)$ 表示在曲线 $p(x)$ 下，$-\infty$ 和 x 之间的面积(见图14.2-17)。函数 $F(x)$ 以 x 轴和直线 $F(x)=1$ 为其渐近线，且在 $x=\mu$ 处有一个拐点。它给出特征值小于 x 的概率。记住钟形曲线的对称性，对于 $\mu=0$ 和 $\sigma^2=1$ 的分布函数 $F(x)$ 按如下形式造表：

$$\Phi(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}\varphi(t)dt=1/\sqrt{2\pi}\times\int_{0}^{\lambda}e^{-t^2/2}dt。$$

图14.2-18表明由这个函数所表示的面积。用 $\lambda=(x-\mu)/\sigma$ 将均值为 μ 和方差为 σ^2 的高斯分布与 $\Phi(\lambda)$ 联系起来。借助于这个关系能计算对应于特征值 x_1 和 x_2 的面积。现考虑几种不同情形：

（i）若 λ_1 和 λ_2 都位于零的右边，且 $\lambda_2>\lambda_1$，则在曲线下这两个值之间的面积是 $\Phi(\lambda_2)-\Phi(\lambda_1)$(见图14.2-19)。若两个值位于零的左边，也有类似的结果。

（ii）若 λ_1 和 λ_2 位于零的两边，则此面积由 $\Phi(\lambda_1)+\Phi(\lambda_2)$ 给

$\Phi(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}\varphi(t)dt$ 的值

λ	$\Phi(\lambda)$
0.0	0.0000
0.1	0.0398
0.2	0.0793
0.3	0.1179
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580
0.8	0.2881
0.9	0.3159
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032
1.4	0.4192
1.5	0.4332
1.6	0.4452
1.7	0.4554
1.8	0.4641
1.9	0.4713
2.0	0.4772
2.1	0.4821
2.2	0.4861
2.3	0.4893
2.4	0.4918
2.5	0.4938
2.6	0.4953
2.7	0.4965
2.8	0.4974
2.9	0.4981
3.0	0.4987
3.1	0.4990
3.2	0.4993
3.3	0.4995
3.4	0.4997

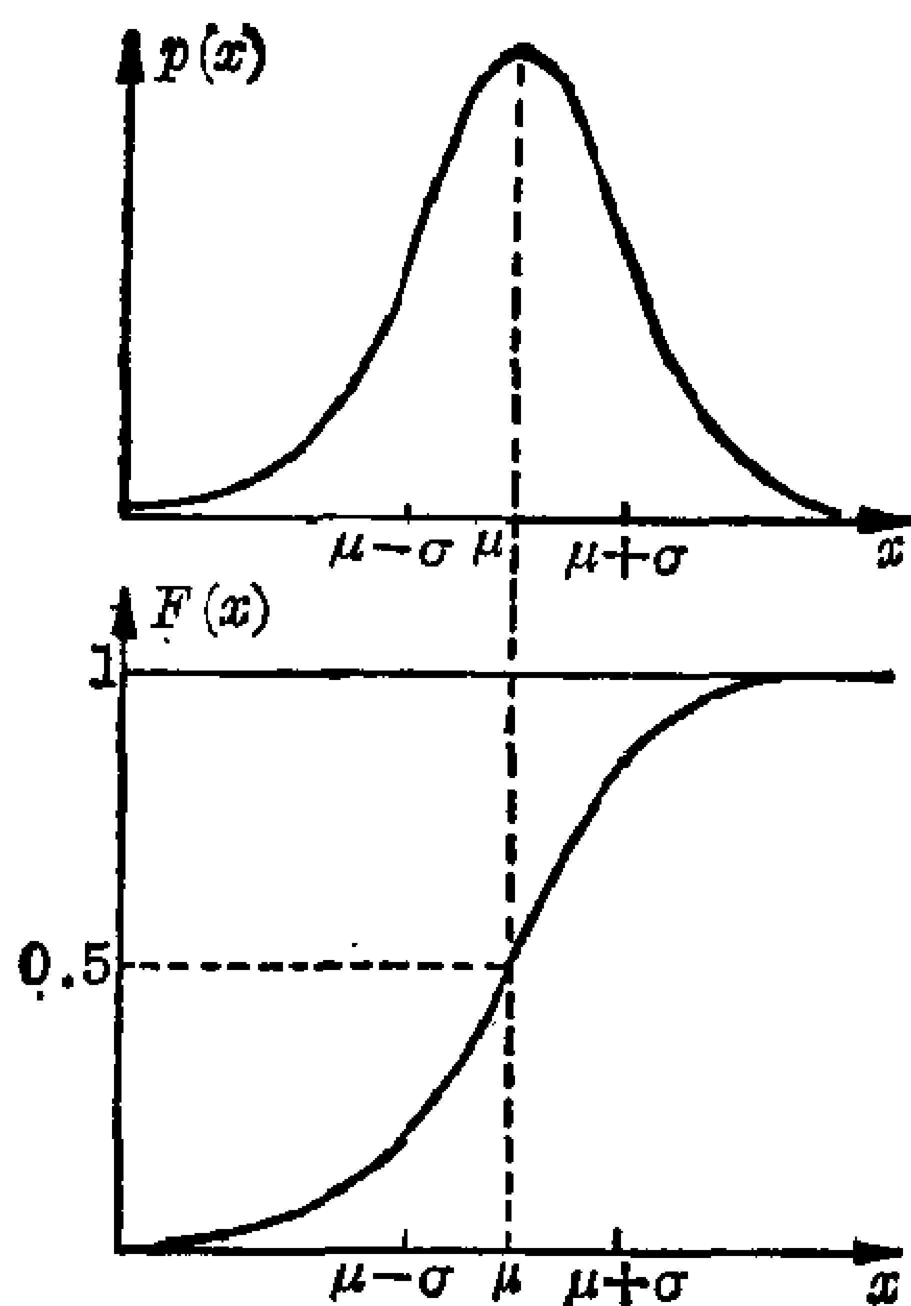


图 14.2-17 高斯分布的密度函数和分布函数的表示

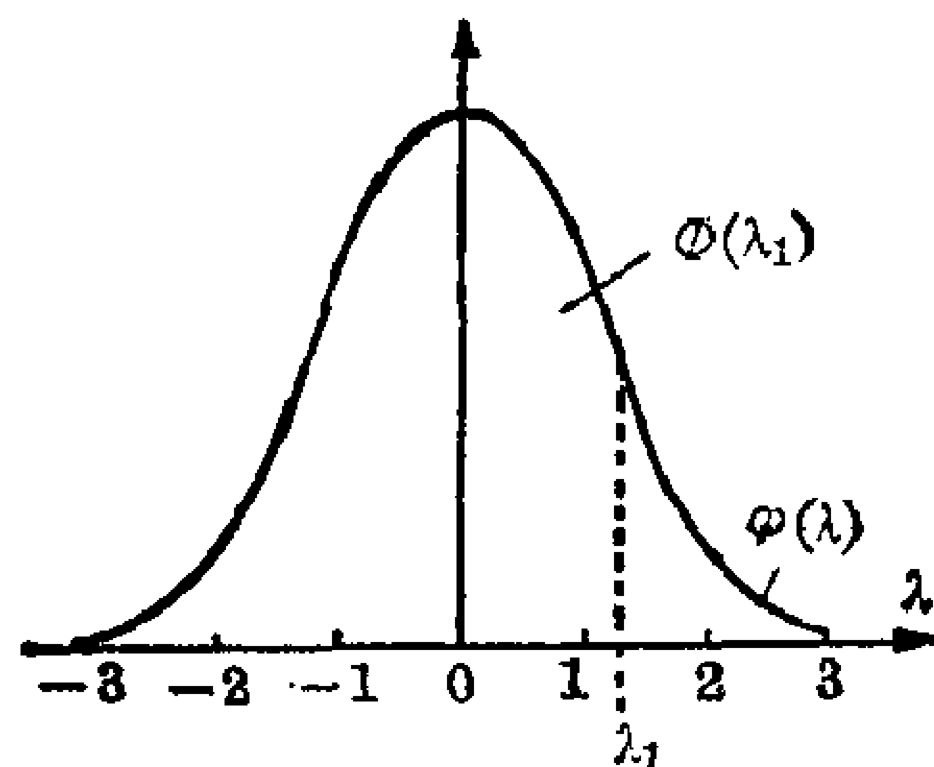


图 14.2-18 函数 $\Phi(\lambda)$ 的几何意义；

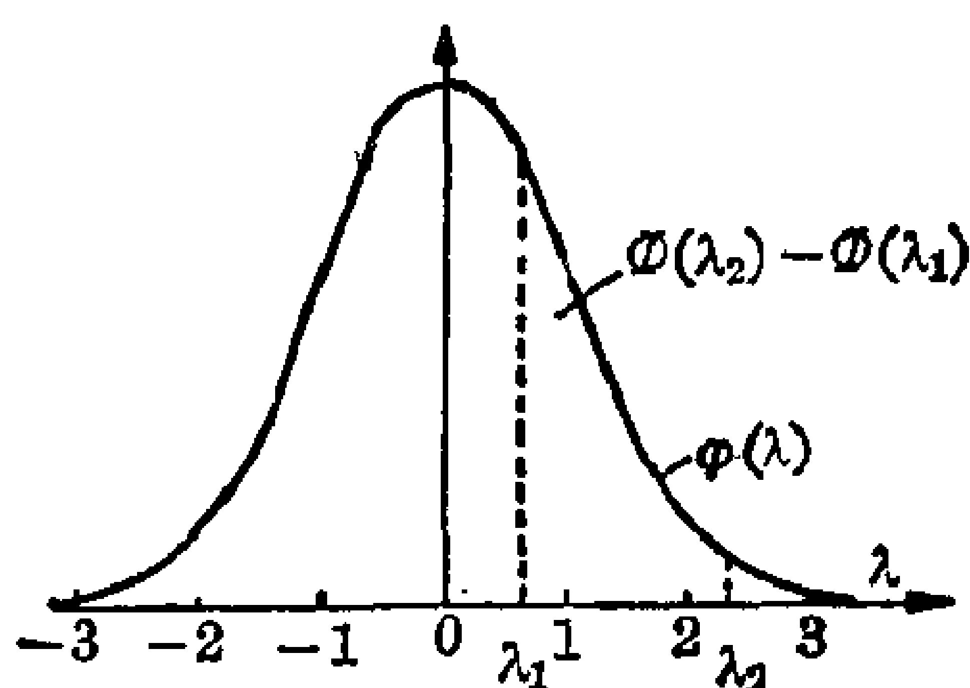


图 14.2-19 由 $\Phi(\lambda_2)-\Phi(\lambda_1)$ 给出的面积

出(见图 14.2-20)。

在两种情况下，算得的面积表示期望的观察值位于 x_1 和 x_2 所界区间内的概率。

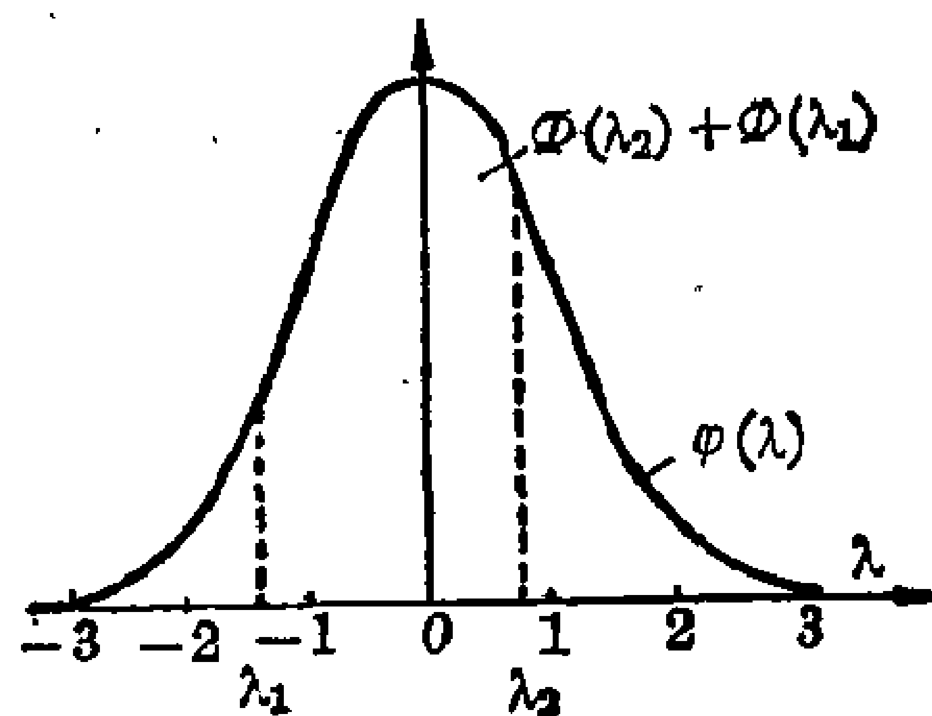


图 14.2-20 由 $\Phi(\lambda_2)+\Phi(\lambda_1)$ 给出的面积

【例】 已知一个高斯分布的均值 $\mu=0$ 和方差 $\sigma^2=25$。要求观察值位于

(i) $x_1=25$ 和 $x_2=35$;

(ii) $x_1=5$ 和 $x_2=35$

之间的概率。

首先算出

(i) $\lambda_1=(25-20)/5=1,\ \lambda_2=(35-20)/5=3,$

(ii) $\lambda_1=(5-20)/5=-3,\ \lambda_2=(35-20)/5=3,$

然后从表中得到

(i) $\Phi(\lambda_1)=0.3413,\ \Phi(\lambda_2)=0.4987,$

(ii) $\Phi(\lambda_1)=0.4987,\ \Phi(\lambda_2)=0.4987$。

在(i)中相减，在(ii)中相加，就得到所要求的概率(i)0.1574，(ii)0.9974。

借助于误差积分，能确定在钟形曲线下，界限 x_1 和 x_2 之间的整块面积的比例。从1减去这个比例就得到相应的剩余面积的比例。在数理统计中有重要意义的一些局部面积收集在附表中。

从误差积分得到的整块面积和剩余面积			
在 x 轴上的界限		整块面积的比例	剩余面积的比例
$\mu-\lambda\sigma$	$\mu+\lambda\sigma$	(%)	(%)
$\mu-1\sigma$	$\mu+1\sigma$	68.26	31.74
$\mu-1.96\sigma$	$\mu+1.96\sigma$	95	5
$\mu-2\sigma$	$\mu+2\sigma$	95.44	4.56
$\mu-2.58\sigma$	$\mu+2.58\sigma$	99	1
$\mu-3\sigma$	$\mu+3\sigma$	99.73	0.27
$\mu-3.29\sigma$	$\mu+3.29\sigma$	99.9	0.1

独立随机变量和的极限定理

在自然科学、工程技术和经济学中所描述的许多过程，都是假定它们受到大量的彼此独立的随机因素的影响，其中每一个因素变更过程的发展只是很少一点。一般地，在研究这些过程时观察到的仅仅是它们影响的总和；例如，测量误差形成这样的一个随机变量，它是许多独立随机变量之和。概率论已经建立起极限值定理，就是控制这些和的性态的规则。

棣美弗-拉普拉斯积分极限定理　若对于 n 次试验中每一次，p 是事件 E 出现的概率，$q=1-p$ 是事件 E 不出现的概率，则能确定一个随机变量 X_k，使得在第 k 次试验中当 E 出现时 $X_k=1$，当 E 不出现时 $X_k=0$。于是，随机变量 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 确定在 n 次连贯的试验中事件 E 出现多少次。由于和式中各项的分布，$\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的概率函数是期望值 $\mu=np$ 和方差 $\sigma^2=np(1-p)=npq$ 的一个二项分布。按照棣美弗-拉普拉斯定理，这个和式 $\sum_{k} X_k$ 的分布函数当 $n\to\infty$ 时并不趋于极限分布函数，

但对随机变量$\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k-np}{\sqrt{npq}}$是趋于的，并且它的极限分布函数是**正规化高斯分布**。这意味着，对于任意数$a<b$，当$n\to\infty$时，成立如下的关系式。

棣美弗-拉普拉斯定理	$p\left\{a\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{m_b-\mu}{\sqrt{npq}}<b\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

棣美弗-拉普拉斯定理引起这样的问题：所得到的关系是否依赖于求和方法的选取，并且如对和式中各项的分布函数加上少许条件，那末这个关系是否仍然成立？**中心极限定理**以它最简单的形式给出部分的回答，它能相当大地推广。

中心极限定理。若两两独立的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$有相同的分布，又若$\mu=E(X_n)$和$\sigma^2=D^2(X_n)>0$存在，则随机变量

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right]\Big/\left[D\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right]$$

以正规化高斯分布为极限分布函数。

在一个长时期内，这个理论的经典方面的主要任务在于找出最一般的条件，使在此条件下当项数增加时，独立随机变量之和的分布函数趋于正态分布。与这个经典方面的结论相平行的，在独立随机变量之和的极限定理的理论中发展另一个方向，它与后面要讲的随机过程有密切关系。在这个方向上问题如下：除了正态分布以外，还有什么样的分布可能是独立随机变量之和的极限分布？研究表明，不仅仅正态分布可作为极限分布。考虑对各被加项找出条件的问题，使对充分大的项数，和式的分布会趋于这个或那个极限分布。最近三十年中，独立随机变量之和的极限定理的这一现代方面有重大的发展，它与柯尔莫哥洛夫、辛钦、格涅坚科等人的名字紧密相连。在数理统计的发展中以及在观测的误差理论中，极限定理具有实际意义。

随机过程

随机过程是用随机变量描述的，这些随机变量依赖于至少一个参数。这样的参数或可取离散的值集，或可连续地变化。例如，汽车轮胎磨损的程度依赖于它所驶过的英里数t，而按照初始条件它是t的随机函数。还有在相当长一段时间内，城镇居民数的发展除了时间t作为参数之外，必

须考虑系统的和随机的影响。

对于一个参数 t 的情形，随机过程记为 $X(t, \omega)$。其中参数 ω 表示随机的本性，$\omega \in \Omega$，这里 Ω 是所有可能出现的事件集合；参数 t 表示该随机变量的一种系统依赖性，通常依赖于时间，但也可能在编号的情况下它依赖于一个序列，或者依赖于距离。对于固定的 t，例如在时刻 $t=t_0$ 作"快速摄影"，$X(t, \omega)$ 就是一个随机变量。对于固定的 ω，$X(t, \omega)$ 是 t 的函数，称为**过程的实现**。例如，$X(t, \omega)$ 能给出依赖于时间的个体或部分的数目，温度或者速度向量。

随机过程的重要类型有马尔可夫过程和平稳过程。

马尔可夫过程和马尔可夫链 **马尔可夫过程或无后效过程**是一个随机过程，其中未来发展的认识完全由当前的状态确定。也就是说，若已知不同时刻 $t_0<t_1<\cdots<t_m$ 随机变量 $X(t_0, \omega)$, $X(t_1, \omega)$, $\cdots$, $X(t_m, \omega)$ 的分布函数，则随机变量 $X(t, \omega)$ 在时刻 $t>t_m$ 的分布函数能单独从时刻 t_m 的分布函数算出。例如，假设水库在时间区间 $(t_m, t_m+\Delta t)$ 开始时 t_m 含有水量 $X(t_m, \omega)$，在此时间区间内流进的水量为 $Z(t_m, \omega)$，而流出常量 M。于是在时刻 $t=t_m+\Delta t$，水库总水量是 $X(t_m+\Delta t,\omega)=X(t_m,\omega)+Z(t_m,\omega)-M$，从而能给出总水量不超过水库限定容量 y 的概率。流进水量 $Z(t, \omega)$ 是随机的，但对于不同的时刻 t 它们是彼此独立的。

在一个**马尔可夫链**中，参数 t 仅取遍离散的值集 $t_i(i=\cdots, -1, 0, 1, \cdots)$。

遍历性定理是讲参数增加超过一切界限时，马尔可夫过程的极限的性质。

普阿松过程作为马尔可夫过程的一种特殊情况，对于描述放射性元素衰减或在服务过程中，例如在电话交换工作中对于计算呼贼的等候时间或修理机器的等候时间，它都起着重要的作用。

平稳过程 一个随机过程，在其过程中变化的原因与时间无关，就称之为**平稳的**。例如，若选择现察的时间区间如此之小，使得与一天时间有关的变化可以忽略不计，则在一间房子里某一点的局部气温在固定的均值上下不规则地变化(见图 14.2-21)。从纺织机筒口引出的纱线直径的变化也有一个与时间无关的均值。若用函数 $X(t, \omega)$ 来描述这些过程，其中变量 t 理解为时间，则对于每一个 t 存在均值 m 和方差 σ^2。

实际重要的是这样一些随机过程，它们是在辛钦的意义下平稳的。这



图 14.2-21　局部气温变化曲线

就要假定均值 $m=E(X(t,\ \omega))$和方差 $\sigma^2=D^2(X(t,\ \omega))$取不变的有限值，并且相关函数 $R(t-s)=E([X(t,\ \omega)-m]\cdot[X(s,\ \omega)-m])$仅依赖于差 $t-s$，这里 t 和 s 是任意两个时刻且 $t>s$。这些平稳过程，例如在电工学中，在信息技术中，在大气湍流的研究中，在某些经济问题的处理中以及在医学中都有用。

14.3　统计

统计的早期开端大约是在公元一世纪初的人口普查计算中。不过只有到 18 世纪才开始发展成一门独立的学科，用于描述表征一个状态的条件的一些特征。**统计** (statistics) 这个概念是从拉丁字 status 一词派生的，意思是条件。在一个长时期内，就限于这个领域内工作。只是在最近几十年才脱离这个独一无二的特征，开始借助于概率论提出分析统计数据和证明统计假设的方法。这种**数理统计**的方法或简称统计方法已成为在自然科学和工程技术中揭示新规律的有力工具。

总体和样本　一个统计研究的**总体**，作为它的**元素**具有在相同条件下的观测或试验。每一个元素可以关于不同的特征来考察，而这些特征可看作随机变量 $X,\ Y,\ \cdots$。若所考虑的特征 X 在总体中有分布函数 $F(x)$，则说此总体关于特征 X 有分布函数 $F(x)$。在统计研究中，总是考虑在总体中元素的有限子集。它就为一个**样本**，而包含在这个子集中的元素个数 n 称为**样本大小**。

【例】　若 10 岁男孩的体重是随机变量 X，则这个年龄的所有男孩形成总体。测量若干地方男孩的体重形成一个样本，而每一个男孩是总体的一个元素。重量是该元素的一个特征。还有其他特征，例如身高和胸围。

试验设计

为了用统计方法解决一个问题必须提出一个试验计划，其中包括收

集数据的方法、样本的大小以及求解问题的方法。试验计划越周到，用统计方法所获得的结果就越好。尤其必须保证那些对于结论来说是重要的测量没有遗漏或不完整。然而也应避免用花费很大的试验系列来做那些只需很小代价即可完成的事情。就此而论，下列几点是重要的。

（i）所研究的资料应是同类的；即在研究中，试验的方法必须保持相同。必须做到生产的设备或条件不变，必须不使用精确度不一样的测量仪器。

（ii）*系统误差*或影响必须尽可能排除。例如，若我们希望比较两种材料，就必须在同一台机器上进行加工，否则机器方面的差别也就加入研究的结果。在农业上，在试验不同的肥料时，必须把土地分割成平行的条形，为的是等化土质类型及其位置的影响。

（iii）必须规定一种*控制*。或者对于所考虑的特征存在标准值，它能与试验结果作比较，或者必须进行控制试验。例如，在肥料的试验中，必须评估在相同的环境条件下，植物施这种肥料和不施这种肥料生长的差别。

（iv）*样本*的选择必须是*随机的*或*有代表性的*。*随机选择*就是在选择时每一个元素以相同的概率是或者不是该样本的一个成员。例如，在一批螺钉交货中，检验的样本不得全部从一个地方选择，而必须分布在整个这批货物中。在测量金属丝的粗细时，测量点必须随机地分布在金属丝的整个长度上。元素的随机选择可借助于*随机数表*来做。当所研究的材料能唯一地分成若干部分时，能做到样本的*代表性选择*。例如，有可能将螺钉的一批交货按这样的方式细分，使得每一部分仅包含一台机器的产品。然后可从每一个部分随机地选择与该部分的大小成比例的件数，这些总起来形成样本。用这种方式获得在缩小的规模上货物的一个景象。

（v）至于试验样本的大小，必须考虑到样本越大，那末由此作出的关于总体的推断就越好；但是另一方面，由于时间和人力的原因，样本的大小通常又必须保持小一点，使得必须将结果的随机偏差考虑进去。当用统计方法关于总体作出推断时，要考虑试验样本的大小。

资料的收集和赋值

从试验得到的未加工的数值集合，称为*原始总体*。可以根据样本的大小和每个元素特征的个数将它们列成表，绘成图，打成穿孔卡或数据处理卡。在单一特征或者在小样本的情形下，列一张表就行了；对于若

干个特征和较大的样本,为了减少在赋值过程中分类的工作量,对于每个元素绘成图或制成穿孔卡片。按预先规定的键将记号穿在卡片边上。在有许多特征和大量元素的情况下,最好用数据处理卡来记录所得的结果,因为通过这些准备工作和这种类型的存储,以后赋值过程就减轻了。

资料的准备　为了获得所给资料的初步考察,在原始总体中,按它们的数量大小整理各个特征的数值,确定各个数值出现的频率。用这种方式得出**频率分布**。在概率论一节中说明的连续随机变量和离散随机变量都出现为离散变量,因为这些值根据给定的或者所要求的精确度已作舍入。

分类。在大样本的情形下,特征的数值范围分成相同大小的几类;用这种方式,几个数值并在一起形成一个类。而各别类的大小选择依赖于样本的大小还依赖于**散布** R,即样本中最大值和最小值之差。为了使分布的特征不至于模糊不清,类的数目不能太小。另一方面,如果类的数目太大,那末非正态值会被夸大,从而难于识别所给的分布。每一个类或由它的界限或由它的均值来表征。一个类的宽度 d 就是它的上限和下限之差;在用**离散随机变量描述**的特征情形下,类的平均值 x_{M_i} 就是在此特定类中特征的数值的算术平均,而在用**连续随机变量**描述的特征情形下,均值就是该类上限和下限的算术平均。

【例 1】　对于一个用连续随机变量描述的特征,样本大小为 $n=80$ 的频率分布;x_i 是特征的数值,h_i 是频率。

(i) 未分成类

x_i	h_i	x_i	h_i	x_i	h_i	x_i	h_i
31.1	1	39.7	1	42.5	2	44.7	1
35.2	1	40.1	2	42.6	2	44.9	1
36.6	1	40.3	1	42.8	2	45.2	2
37.2	1	40.7	1	42.9	2	45.3	1
37.6	2	40.9	3	43.0	1	45.5	2
37.9	1	41.1	2	43.2	1	45.6	2
38.2	2	41.3	2	43.5	2	45.7	3
38.8	2	41.4	1	43.6	1	45.8	2
39.0	1	41.7	3	43.8	2	45.9	1
39.2	1	41.9	3	43.9	3	47.4	1
39.3	2	42.1	4	44.2	2	47.8	1
39.4	1	42.2	2	44.3	2		

（ii）分成类：x_{M_i} 是类平均

类	x_{M_i}	h_i	
从33到35(包括35)	34	|	1
从35到37(包括37)	36	||	2
从37到39(包括39)	38	卌 |||	8
从39到41(包括41)	40	卌 |||	13
从41到43(包括43)	42	卌 卌 卌 卌 卌	25
从43到45(包括45)	44	卌 卌 卌 |	16
从45到47(包括47)	46	卌 卌 |||	13
从47到49(包括49)	48	||	2

频率分布的图形表示　在材料准备以后，就能给出经验的频率分布的图形表示(见图14.3-1, 14.3-2)。根据研究的目的和所考虑的特征，能用不同的方式作图，如同在例子中所看到的那样。

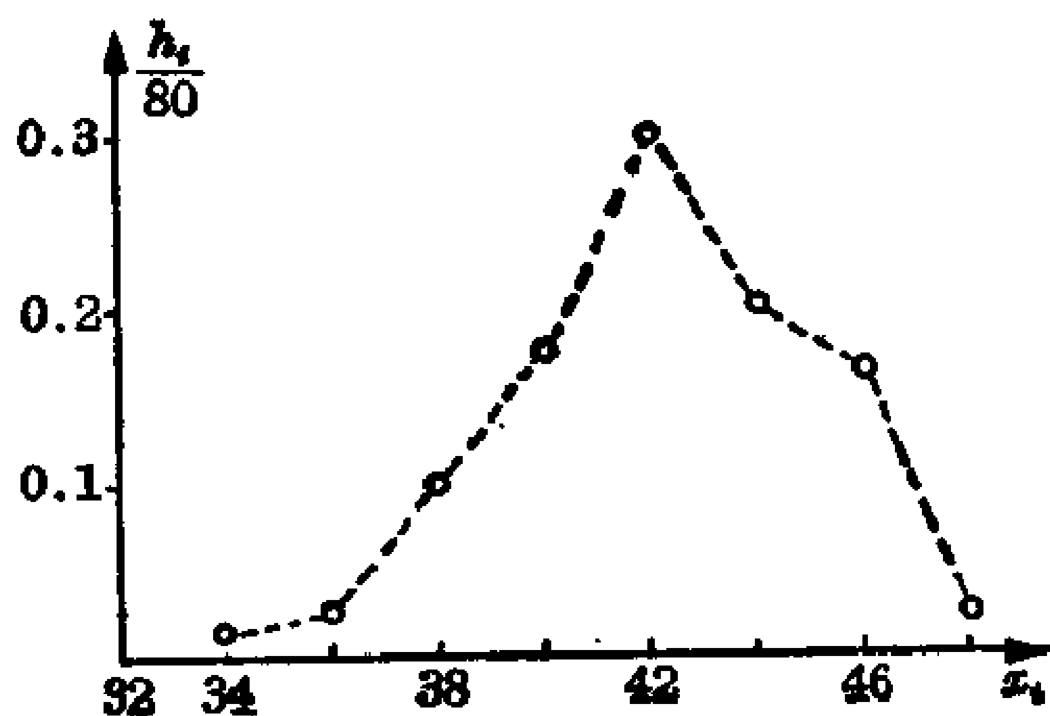


图14.3-1　用线形图表示分布

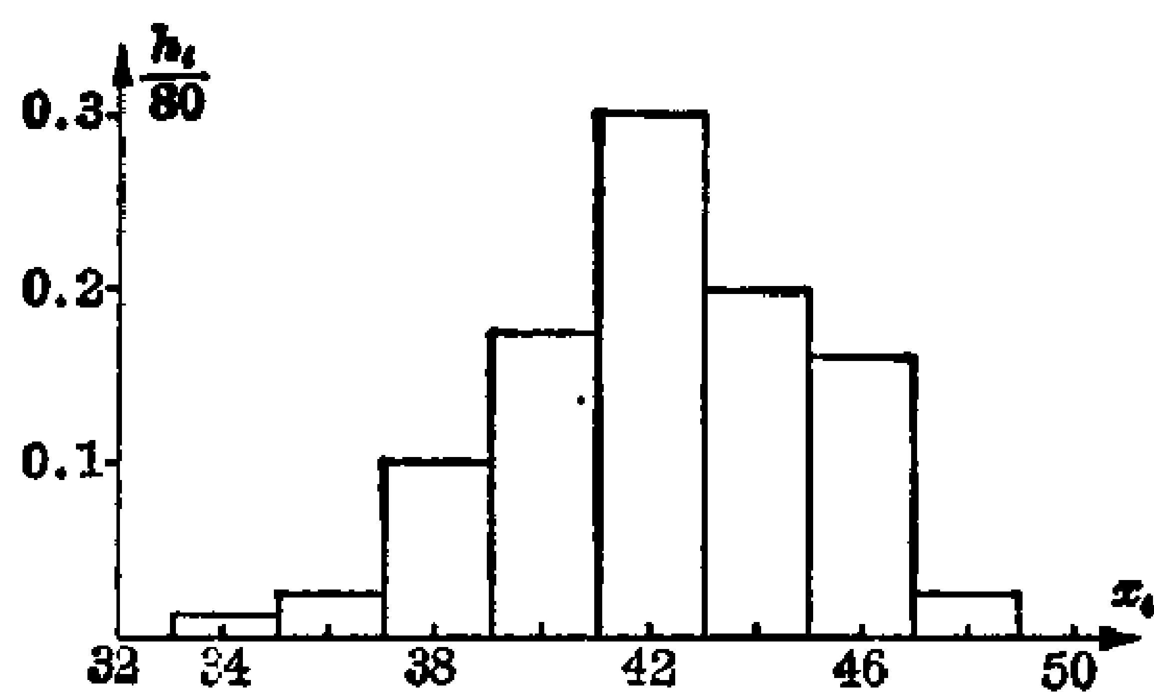


图14.3-2　用块形图表示分布

样本的均值和方差　一个大小为 n 的样本，可由均值 $\bar{x}$ 和方差 s^2 来表征，它们当作总体的相应值 μ 和 σ^2 的估计值。

均值。均值，算术平均值 $\bar{x}$ 是由 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 给出，这里 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是各别测量到的特征的数值。在频率分布中，均值由

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}h_i x_i$$

算得，这里 h_i 是频率，x_i 是特征的数值(或 x_{M_i} 是类平均)，k 是特征的数值的数目(或类的数目)。除了算术平均 $\bar{x}$ 以外，在实践中还用中央值 $\tilde{x}$

作为均值。当 n 是奇数时，它是按大小次序排列的数值系列中第 $\frac{1}{2}(n+1)$ 位置上的该特征的数值。当 n 是偶数时，中央值 $\tilde{x}$ 就是在第 $\frac{n}{2}$ 和第 $\frac{n}{2}+1$ 位置上特征的数值的算术平均。

方差。对于样本的 n 个各别值 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，方差 s^2 给出为

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right];$$

s 称为**均方差**或称为**标准偏差**。对于给定的有 k 个特征的数值 x_i（或有类平均 x_{M_i} 的 k 个类）和频率 h_i 的频率分布，它的方差 s^2 计算如下：

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}h_i\cdot(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k}h_ix_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}h_ix_i\right)^2\right]。$$

大小为 n 的样本	均　值	方　　差	变化范围
	$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$	$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$	$R=x_{最大值}-x_{最小值}$

除了方差 s^2 以外，还用另一个量来刻划特征的数值延伸的范围，这就是**散布或变化范围** R，也是特征的数值的最大值 $x_{\max}$ 和最小值 $x_{\min}$ 之差：$R=x_{\max}-x_{\min}$。

【例 2】　对于上述大小为 $n=80$ 的频率分布：

分　类	均　　值	方　　差	中央值	变化范围
未	$\bar{x}=42.14$	$s^2=6.84$	$\tilde{x}=42.2$	$R=16.7$
有	$\bar{x}=42.23$	$s^2=8.30$		

均值以及方差的不符是由于把比较小的样本分类的缘故。当 n 增大时，它们就越来越接近于相等。

正态分布　奎特莱 (Lambert Quetelet, 1796～1874 年) 的人类学测量引出了一个假设，只要涉及频率，所有的生物学测量都遵循**高斯分布**。由于这个原因，它就称为**正态分布**，并且统计方法建立在这个假设之上。正态分布的基本特性在概率论一节里已作介绍。为了完全起见，下面再介绍几个在统计实践中重要的例子。

由于正态分布只是由它的均值和方差来确定的，它可由样本的均值 $\bar{x}$ 和方差 s^2 来计算。用这种方式，就有可能判定一个特定的特征是否基于这样的一个分布。

（i）若样本由 n 个特征的数值组成，这些数值分成 k 个类，宽度为 d 均值为 x_{M_i}，那末为了能用正态分布，对于每个类计算数 $\lambda_i=(x_{M_i}-\bar{x})/s$。借助于表中查到的值 $\varphi(\lambda_i)$，得到第 i 类的相对频率 $q_i=(d/s)\varphi(\lambda_i)$ 和绝对频率 $k_i=nq_i(i=1, 2, \cdots, k)$。

【例 3】　对于上述样本(参见例 1)计算正态分布：

x_{M_i}	h_i	λ_i	$\varphi(\lambda_i)$	q_i	k_i
34	1	−2.86	0.0067	0.0046	0.4
36	2	−2.16	0.0387	0.0267	2.1
38	8	−1.47	0.1354	0.0934	7.5
40	13	−0.77	0.2966	0.2047	16.4
42	25	−0.08	0.3977	0.2744	22.0
44	16	0.61	0.3312	0.2285	18.3
46	13	1.31	0.1692	0.1167	9.3
48	2	2.00	0.0540	0.0373	3.0
	80			0.9863	79.0

（ii）若满足于正态分布的图形表示，则用下面的经验法则：借助于在(i)中给出的公式 $q=(d/s)\varphi(\lambda)$，对于 $y=0$ 算出正态分布的峰值 $y_{\max}$ (见图 14.3-3)。按如下列规则可以得到另外一些纵坐标：

x	$\bar{x}$	$\bar{x}\pm 0.5s$	$\bar{x}\pm s$	$\bar{x}\pm 2s$	$\bar{x}\pm 3s$
y	$y_{\max}$	$7y_{\max}/8$	$5y_{\max}/8$	$y_{\max}/8$	$y_{\max}/80$

若需要有绝对频率的表示，则每一个值乘以 n。在图中说明上面例子的频率分布，以及按此法则算出的正态分布。

(iii) 借助于**概率坐标纸**，还能检验所研究的特征其分布是否拟合一个正态分布，进而均值 $\bar{x}$ 和标准偏差 s 是什么。概率网格是这样的坐标纸，其纵坐标刻度构造得使正态分布的累积百分数曲线为一条直线(见

图 14.3-4)。

回归和相关

在统计中一个很大并且很重要的领域是回归分析和相关分析。它们用以揭示和描述两个或更多个特征(随机变量)的依赖性。回归分析涉及特征之间对应的本性，相关分析的任务则是确定这种依赖性的程度。这里只能描述两个特征(随机变量 X 和 Y) 的线性相关情况的基本概念。

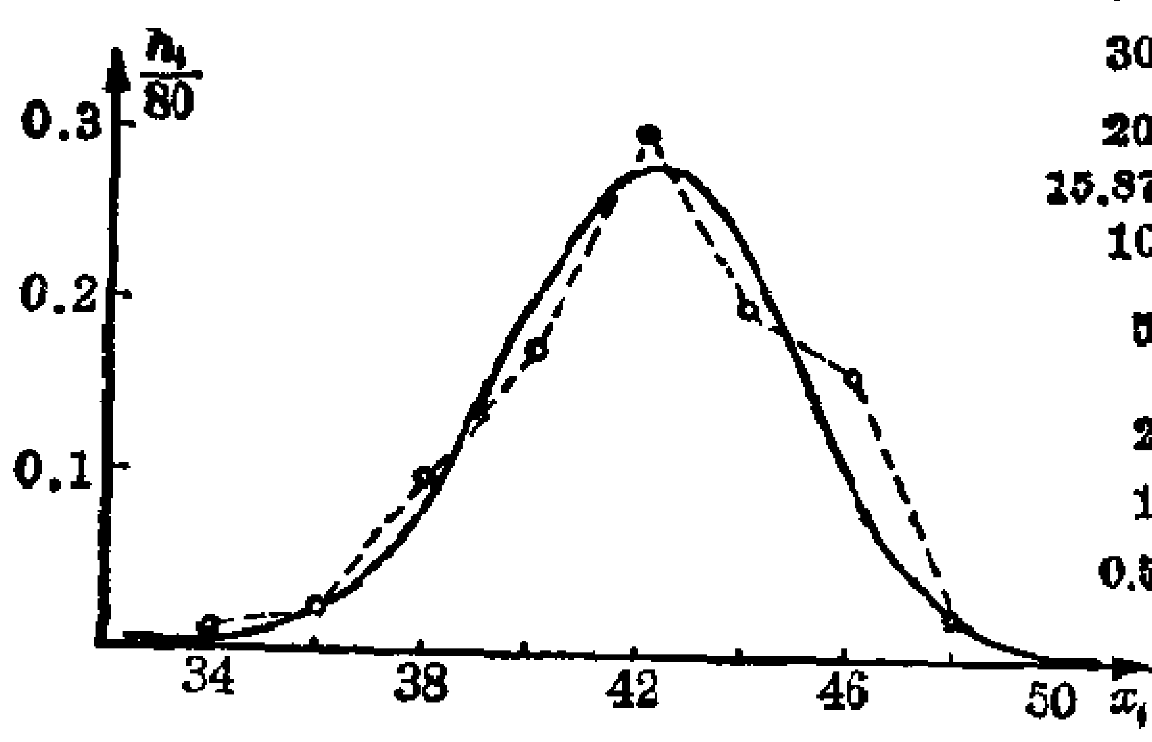


图 14.3-3　频率分布及引出的正态分布例子

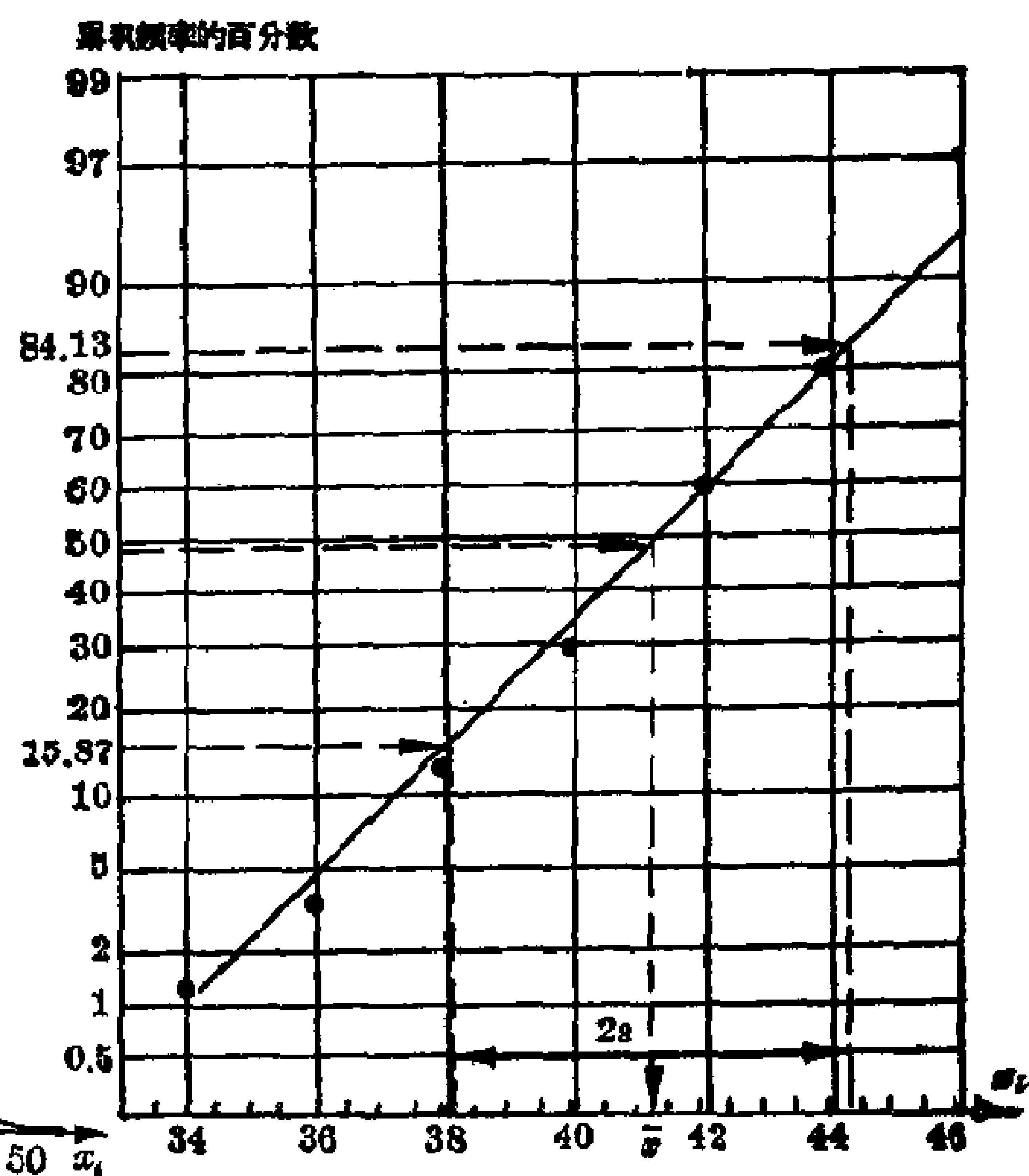


图 14.3-4　频率分布的累积百分数曲线

回归　在一个学校中量得孩子的身高(随机变量 X)和体重(随机变量 Y)。要求确定按平均是否较大的体重对应于较大的身高，这种对应是否线性以及什么样的平均体重对应于一个给定的身高。在这种情况下测量表明，第一个问题的回答是肯定的。但是不作深入研究就不可能回答其他两个问题。

单独一对值(x, y)，这里(x)是孩子的身高，(y)是孩子的体重，作为相对于一对直角轴坐标为(x, y)的点能画出。用这种方式画出的点形成一个点集，它要末没有特别形式，要末或多或少地拟合一条曲线。若点集近似于一条直线(我们仅仅考虑这种情况)，则随机变量 X 和 Y 之间的关系用两条直线描述，这就是回归线。就体重(y)对于身高(x)的依赖性，存在一条回归线 $Y=a_x+b_x x$，这里未知系数 a_x 和 b_x 利用高斯的**最小二乘法**算得。对于 n 对值$(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$的一个样本，要求

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-Y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a_x+b_x x_i)]^2$$

为极小。这就导出

$$b_x=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right]}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},$$

$$a_x=\bar{y}-b_x\bar{x}。$$

在这些公式中，$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别是数 x_i 和 y_i 的平均值。数 b_x 称为回归系数，指出了孩子的体重(y)对于他的身高(x)的依赖性。这说明当身高增加一个单位时，体重按平均数改变 b_x。可以用这种方式引进给出孩子的体重对于他的身高的依赖性的回归线(参见例题及图 14.3-5)。

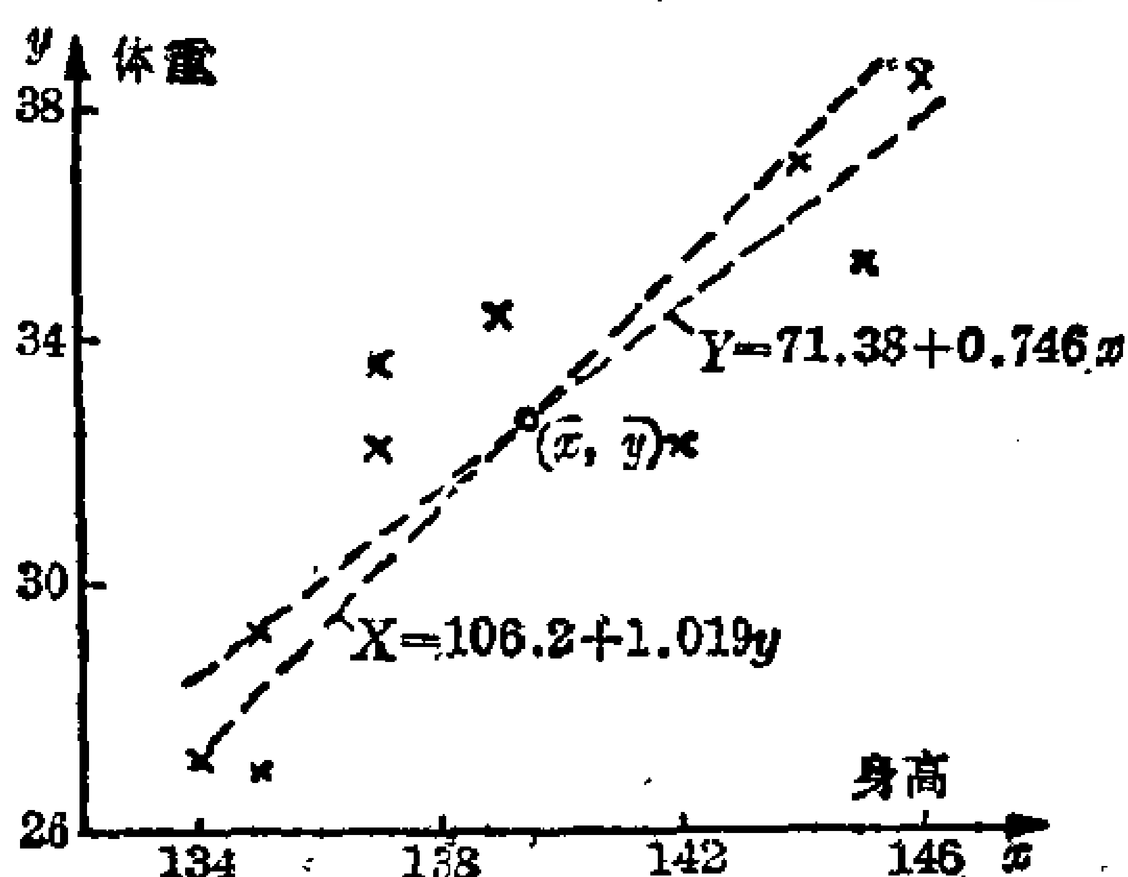


图 14.3-5 例中的点集和回归线(这里两根轴的交点不是坐标系的零点)

若现在问什么样的平均身高对应于一个特定的体重的问题(在此特例中意义不大)，则不能利用上面给出的方程，而必须求另一条回归线 $X=a_y+b_y y$，重新用最小二乘法计算未知系数 a_y 和 b_y。这就给出 $a_y=\bar{x}-b_y\bar{y}$，这里

$$b_y=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right]}{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2},$$

b_y 也称为回归系数并且指出孩子的身高(x)对于他的体重(y)的依赖性。这个系数说明当体重增加一个单位时，高度按平均数变化 b_y。若同样地引进这条回归线，则看到两条直线交于点集的重心$(\bar{x}, \bar{y})$，而呈剪刀形。剪刀形靠得越紧，随机变量 X 和 Y 之间的随机相关就越密切。若严格线性，则剪刀就完全关闭，因而存在一个函数关系。

【例】 量得10个学生的身高(x)(用厘米为单位)和体重(y)(用公斤为单位)。图 14.3-5 表明点集以及两条回归线；所有必要的计算包含在表中：

x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
135	29.30	−4.4	−3.31	19.36	10.9561	14.5640
145	35.20	5.6	2.59	31.36	6.7081	14.5040
139	34.50	−0.4	1.89	0.16	3.5721	−0.7560
142	32.10	2.6	−0.51	6.76	0.2601	−1.3260
137	33.60	−2.4	0.99	5.76	0.9801	−2.3760
137	32.30	−2.4	−0.31	5.76	0.0961	0.7440
134	27.20	−5.4	−5.41	29.16	29.2681	29.2140
144	36.70	4.6	4.09	21.16	16.7281	18.8140
135	26.90	−4.4	−5.71	19.36	32.6041	25.1240
146	38.20	6.6	5.69	43.56	32.3761	37.5540
1394	326.1			182.40	133.5490	136.0600

$\bar{x}=139.4$,　　$\bar{y}=32.61$,

$b_x=0.746$,　　$b_y=1.019$,

$a_x=-71.38$,　　$a_y=106.2$,

$Y=-71.38+0.746x$,　　$X=106.2+1.019y$。

相关　用相关系数 γ_{xy} 定量地测定依赖性的程度，通过回归线给出它的一个印象。

相　　关　　系　　数
$$\gamma_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}$$

这个相关系数与特征的单位无关，它能取 −1 和 +1 之间的一切值。若 γ_{xy} 分别地等于 +1 或 −1，则此关系是直接或间接线性的。若 $\gamma_{xy}=0$，则没有关系。在上述例子中，$\gamma_{xy}=+0.87$。

相关系数 γ_{xy} 与回归系数 b_x 和 b_y 之间的联系是下面的关系:

$$\gamma_{xy}^2=b_x\cdot b_y。$$

统计估计的方法

从样本的数值常常能引出关于总体的一个或几个特征的结论。这用一个随机变量来刻划。若已知相应的分布函数的解析形式，则须估计包含在其中的参数值。对于这样的一种估计，有许多的可能性足以利用，例如，对于随机变量的期望就可用中央值或算术平均。因此费歇尔(R. A. Fisher)在1930年提出了估计量优度的准则；他要求估计量应是**无偏的**、**相容的**和**有效的**。

对于未知参数 Θ 的**无偏估计量** $\hat{\Theta}$, $\hat{\Theta}$ 的期望应与 Θ 的期望相符；例如，样本的算术平均 $\bar{x}$ 或方差 s^2 分别是表征总体的随机变量的期望 μ 或方差 σ^2 的无偏估计量。未知参数 Θ 的**相容**估计量 $\hat{\Theta}$ 应使它与 Θ 之差，当样本的大小增加时以增大的概率其差为一个小量；即对于任意的 $\varepsilon>0$，当样本充分大时，有 $P(|\hat{\Theta}-\Theta|<\varepsilon)\to 1$。例如，样本的算术平均 $\bar{x}$ 就是表征总体的随机变量的期望 μ 的相容估计量。对于参数 Θ 的**有效估计量** $\hat{\Theta}$，这个随机变量 $\hat{\Theta}$ 的方差应比其他可能估计量的方差要小；例如，算术平均 $\bar{x}$ 比起中央值 $\tilde{x}$ 来是一个有效估计量，因为随机变量 x 的方差要小于随机变量 $\tilde{x}$ 的方差。

参数的估计可以是一点估计也可以是一个区间估计。在**点估计**中，随机变量的真正参数值取为等于从样本所得值的估计量。不过它仅以小概率相符于真值；这样，关于估计量的精确度就知道得很少。因此用如此的方式寻求由**区间估计**来确定包含估计量 $\hat{\Theta}$ 的一个区间 $(\hat{\Theta}-\delta, \hat{\Theta}+\delta)$，使这个区间以概率 $(1-\alpha)$ 包含该未知参数。数 $(1-\alpha)$ 称为**置信系数**，α 是一个数 $0<\alpha<1$，由此能算出宽度为 2δ 的区间。

对于一参数最有用的点估计方法是**极大似然方法**。对于正态分布高斯早就发展了这种方法。然而，这种方法的名称、论证以及进一步的发展则要追溯到费歇尔。它的原理在于用如此之方式选择参数 Θ 的估计量 $\hat{\Theta}$，使得给定样本的**似然函数**具有极大。这个似然函数将由连续随机变量 X 以及已知的概率密度 $f(x;\Theta)$ 给出，这里参数 Θ 是要从 n 个独立值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的试验样本估计出来的。

将似然函数 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \Theta)=f(x_1; \Theta)\cdots f(x_n; \Theta)$ 考虑作为未知参数 Θ 的函数，再选择 Θ 的估计量 $\hat{\Theta}$，使函数 L 取极大。于是确定 $\hat{\Theta}$

作为方程 $\frac{dL}{d\Theta}=0$ 的解。在实际计算中，方程代之以 $\frac{d(\ln L)}{d\Theta}=\frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{d\Theta}=0$。若连续随机变量 X 的密度 $f(x;\Theta_1,\ \Theta_2)$ 依赖于两个参数 Θ_1 和 Θ_2，则它们的估计量 $\hat{\Theta}_1$ 和 $\hat{\Theta}_2$ 作为方程组 $\frac{\partial(\ln L)}{\partial\Theta_i}=\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial L}{\partial\Theta_i}=0(i=1,\ 2)$ 的解给出。

【例】 正态分布的随机变量 X 的参数 $\Theta_1=\mu$ 和 $\Theta_2=\sigma^2$ 能从具有值 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 的样本估计出来。由似然函数

$$L(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\mu,\ \sigma^2)$$
$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right]^n\cdot\exp\left[-1/(2\sigma^2)\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2\right]$$

得到
$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\left(\frac{n}{2}\right)\ln\sigma^2-\frac{1}{(2\sigma^2)}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2,$$

因此有
$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)=0$$

和
$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial\sigma^2}=\frac{-n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2=0。$$

由此得到估计量

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\bar{x}$$

和
$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2。$$

最后，对于一个简单情况给出区间估计的过程，其中 X 是一个正态分布的随机变量，在它的参数 μ 和 σ^2 当中仅知 σ^2。对于 μ，由具有值 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 的样本要给出一个置信估计。选取算术平均 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 作为估计量。这已知以参数 μ 和 $\frac{\sigma^2}{n}$ 正态分布的。对于每一个 $\alpha(0<\alpha<1)$，可从正态分布表这样地确定 λ_α: $P(|\bar{x}-\mu|<\lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n})=1-\alpha$ 或 $P(|\bar{x}-\lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n}<\mu<\bar{x}+\lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n})=1-\alpha$。置信区间 $(\bar{x}-\lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x}+\lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n})$ 是 μ 的一个置信估计量，置信系数为 $(1-\alpha)$。

【例】 若 X 是正态分布的随机变量，则在正态分布表中，对于 $\alpha=0.05$ 以及置信系数 $1-\alpha=0.95$ 查出值 $\lambda_\alpha=1.96$。对于大小为 $n=16$ 和标准偏差为 $\sigma=1.5$ 的样本，得到参数 μ 的置信区间 $P(\bar{x}-1.96\cdot1.5/4<\mu<\bar{x}+1.96\cdot1.5/4)=0.95$; $\bar{x}$ 是从样本得到的估计量。参数 μ 位于

区间$(\bar{x}-0.74,\ \bar{x}+0.74)$的概率是0.95。

统计检验过程

在许多统计问题中，由频率分布或由数值不足以描述可供利用的材料，例如，要回答下面的问题时：

（i）在邻居中要找一些10岁儿童，它们具有比通常值为大的平均体重。这个偏差是不是随机的，或者说这个差异可归于其他原因？

（ii）在饲养实验中，若干鼠给以标准饲料而其他鼠喂以试验的食物。若在一系列试验的末了，发现两组鼠的平均体重存在差别，则要求确定哪一种试验的食物引起体重的较大增加。

在这些问题中，需要知道表面的偏差是随机的还是具有其他意义的。这由检验过程所决定，它完全依赖于比较；例如，要末对于两个样本互相比较相应的测量值，要末一个样本的数值与总体相应的已知量相比较。在检验过程中，从假定或*假设*出发：在第一种情况下，假设两个被考查的样本属于同一个总体；在第二种情况下，假设该样本属于所考虑的特定总体，也就是说在两种情况下差异只是随机的。这个假设称为*零假设*(H_0)。相应地，其他可能性就称为*择一假设*(H_1)。

借助于检验过程决定是接受还是拒绝零假设。这样做时，必须记住采纳零假设无非是它比择一假设没更可取。并不要求在每一种情况下这个决定都是正确的，因为它可能依靠着大小为n的一个样本，还有一个*误差*。相应地，以*误差概率*α作决定，一般地，α选取为0.05，0.01或0.001。一个误差，称为*第一类误差*，意味着出现这个误差就拒绝零假设，虽然实际上它是正确的。其他可能的错误决定，即接受零假设虽然它是错误的这种决定，称为*第二类误差*。例如，若作为比较的结果，得出新药比旧药好的结论，虽然实际上它们两者有同样的价值，则产生了一个第一类误差。不过，若得出两者同样好的结论，虽然实际上新的较好，则产生了一个第二类误差。

检验分布 为了检验零假设利用检验变量，它们是随机变量，因而可用一个分布来描述。对于下述检验，检验变量或者是正态分布的或者基于其他的分布：t分布、F分布以及χ^2分布。这些分布表在例子中给出。

正态分布。若检验变量建立在一个正态分布之上，则误差概率α有一个直观的意义，为此只要考虑由误差积分所给出的累积面积和剩余面

积表。在这些表中，相应于误差概率的剩余面积 α 是以百分数给出的。对于一个误差概率对应有一个值 $\lambda=|(x-\mu)/\sigma|$；一般地，μ 和 σ 能假定为已知，只是对于大样本要用 $\bar{x}$ 和 s 来估计。例如，$\alpha=0.05$ 或 5% 的误差概率，对应于 $\lambda_\alpha=1.96$；于是，由样本算得的 λ 值若满足 $\lambda>\lambda_\alpha=1.96$，则零假设被拒绝，若 $\lambda<\lambda_\alpha=1.96$，零假设就接受。

t 分布。 若 μ 和 σ 未知，且要对 n 为小的样本从 $\bar{x}$ 和 s 进行估计，则当作正态分布描述的过程就不再可能。在这种情况下，s 能相当地偏离 σ，从而不是一个好的估计。只是当属于 λ 的误差概率相应增大时，它才能使用。这出现在"学生" t 分布中，它考虑到样本的大小和误差概率 α。当增加 n 的值时，它就接近正态分布，并且在 $n\to\infty$ 的极限下转化为正态分布。t 分布对于误差概率的不同数值和代替样本大小的自由度 f 的不同数值制成表。自由度定义为样本大小 n 和用于计算的特征测量的数 m 之间的差；$f=n-m$。在下面的每个检验中，自由度是给定的。在图 14.3-6 中说明自由度 $f=5$ 和误差概率 $\alpha=0.05$ 的正态分布和 t 分布。

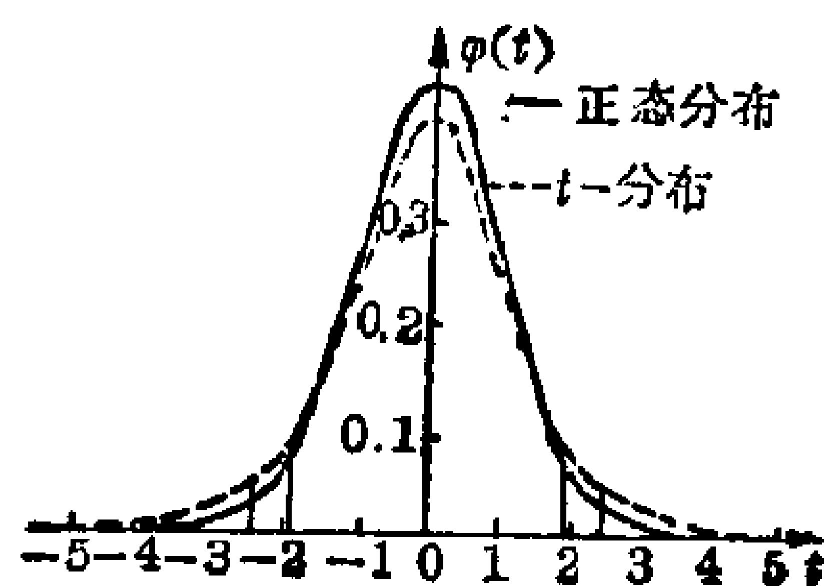


图 14.3-6 具有误差概率 $\alpha=0.05$ 范围的正态分布和 t 分布($f=5$)

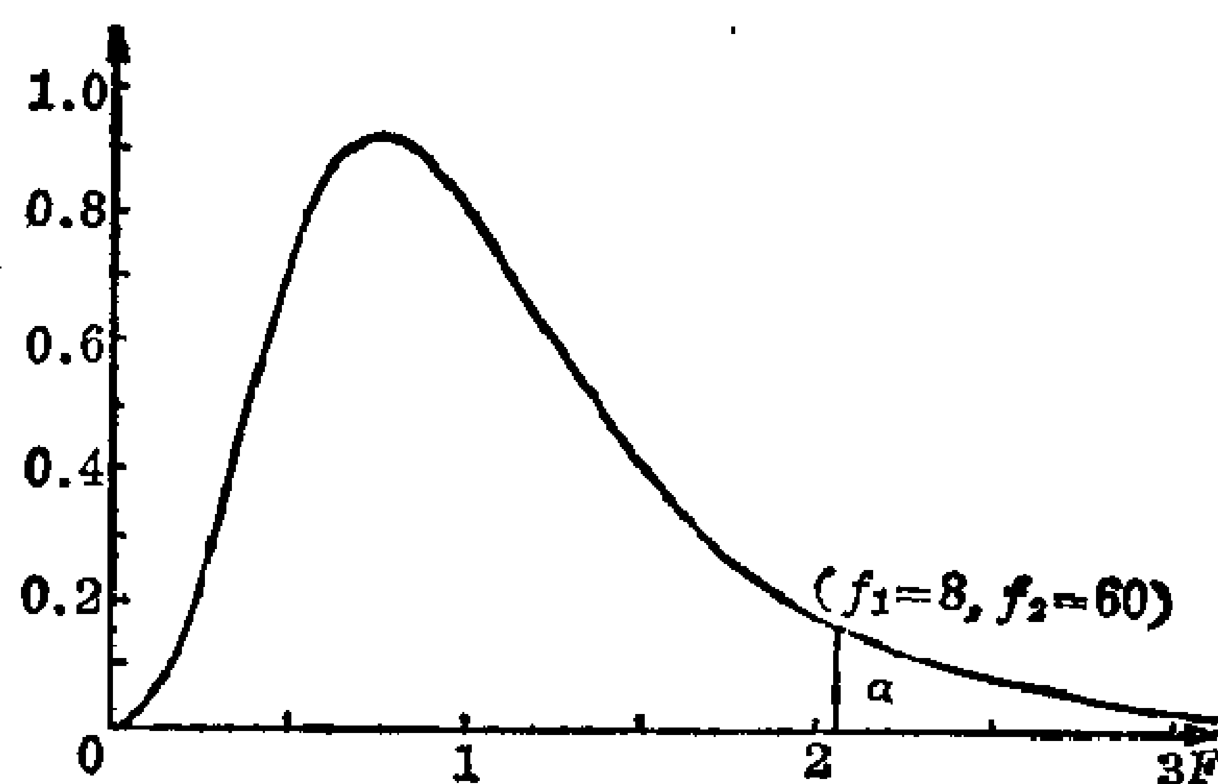


图 14.3-7 F 分布和误差概率 α

F 分布。 若从正态分布的总体中选取两个大小为 n_1 和 n_2 的样本，计算两个方差 s_1^2 和 s_2^2，再形成比率 $F=s_1^2/s_2^2$，则所得的这些值的频率分布是费歇尔研究过的一种分布，称为 F 分布。它依赖于误差概率 α 以及自由度 $f_1=n_1-1$ 和 $f_2=n_2-1$，并且对于不同的误差概率和自由度制成表。作为两个平方数的比率，F 只取正值。图 14.3-7 表明一个 F 分布，从中能看出误差概率的意义。

χ^2 分布。 与高斯的误差理论有关，赫尔梅(Helmert, 1843～1917 年)研究正态分布的变量平方和。用这种方式得到的分布，后来被皮尔逊

(1857～1936 年)称为 χ^2 分布。这基于如下的假定：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个随机变量，它们互相独立且建立在参数为 μ 和 s^2 的同一个正态分布之上。平方和的分布 $\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2$，称为 χ^2 分布，这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的数值。χ^2 分布依赖于误差概率 α 和自由度 f，并且对于这些数值制成表。图 14.3-8 显示一个 χ^2 分布以及误差概率的意义。

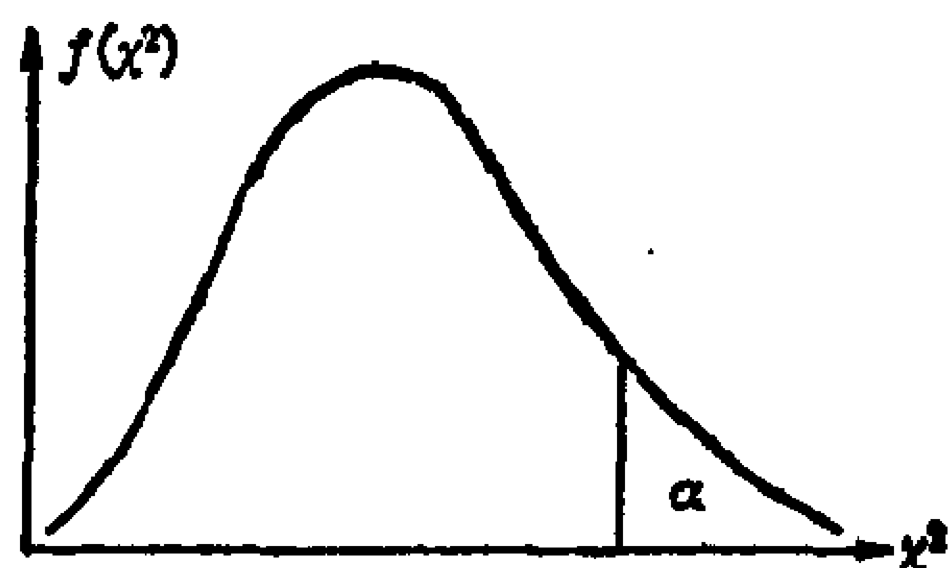


图 14.3-8　对于 $f=3$ 的 χ^2 分布和误差概率 α

假设检验的过程　下面汇集对于经常出现的问题的一些检验过程。误差概率的选取依赖于问题的性质而相应地确定。一般地，在工业和农业上，0.05 的误差概率是惯例，在医学上则取 0.01 或 0.001 的误差概率。

1. **均值 $\bar{x}$ 和 μ 的比较。**大小为 n 的以及取自正态分布的总体的方差 s^2 的样本的均值 $\bar{x}$，与正态分布的总体的均值比较。若检验变量 $t=\left(\frac{1}{s}\right)|\bar{x}-\mu|\sqrt{n}$ 的计算值 t_c 小于 t 分布表中对 α 和自由度 $f=n-1$ 的值 t_T，则以误差概率 α 接受零假设，即假设两者之间的差是随机的。

【例】　从考查一种材料 $n=49$ 的样本中，以平均 $\bar{x}=2.4\%$ 和方差 $s^2=0.4$ 确定一种化学元素的比例。μ 的值假定为 3%，所出现的偏差是不是以误差概率 $\alpha=0.05$ 为随机的？

检验变量的值为 $t_c=\frac{|2.4-3|\cdot\sqrt{49}}{\sqrt{0.4}}=6.7$。对误差概率 $\alpha=0.05$ 和自由度 $f=n-1=48$ 的 t 分布的表值为 $t_T=2.01$。由于 $t_c<t_T$，零假设必须拒绝。因此实在均值和假定值之间存在着重要的(本质的)差别。

t 分布表

自由度 f	误差概率		自由度 f	误差概率		自由度 f	误差概率	
	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$		$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$		$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
1	12.71	63.66	17	2.11	2.90	45	2.01	2.69
2	4.30	9.92	18	2.10	2.88	50	2.01	2.68
3	3.18	5.84	19	2.09	2.86	60	2.00	2.66
4	2.78	4.60	20	2.09	2.85	70	1.99	2.65
5	2.57	4.03	21	2.08	2.83	80	1.99	2.64
6	2.45	3.71	22	2.07	2.82	90	1.99	2.63
7	2.37	3.50	23	2.07	2.81	100	1.98	2.63
8	2.31	3.36	24	2.06	2.80	120	1.98	2.62
9	2.26	3.25	25	2.06	2.79	140	1.98	2.61
10	2.23	3.17	26	2.06	2.78	160	1.98	2.61
11	2.20	3.11	27	2.05	2.77	180	1.97	2.60
12	2.18	3.06	28	2.05	2.76	200	1.97	2.60
13	2.16	3.01	29	2.05	2.76	300	1.97	2.59
14	2.15	2.98	30	2.04	2.75	400	1.97	2.59
15	2.13	2.95	35	2.03	2.72	500	1.97	2.59
16	2.12	2.92	40	2.02	2.70	1000	1.96	2.58
						∞	1.96	2.58

2. ***两个均值 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 的比较。*** 大小分别为 n_1 和 n_2 的两个样本互相独立，且假定来自正态分布的总体；此外假定它们的方差 S_1^2 和 S_2^2 的偏差是随机的。若对于检验变量

$$t=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{s_d}\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\quad 其中\quad s_d^2=\frac{s_1^2(n_1-1)+s_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}$$

的计算值 t_c 小于对 α 和自由度 $f=n_1+n_2-2$ 的表值 t_T，则以误差概率 α 接受零假设，即假设它们的均值 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 仅仅随机地相差。

【例】 对于两种材料，分别进行 $n_1=20$ 和 $n_2=32$ 的试验，以方差 $s_1^2=4\cdot10^{14}$ 和 $s_2^2=6\cdot10^{14}$ 确定平均抗张强度 $\bar{x}_1=18\cdot10^7\,\mathrm{N/m^2}$ 和 $\bar{x}_2=24\cdot10^7\,\mathrm{N/m^2}$。关于 $\alpha=0.05$ 的误差概率，这两种材料关于断裂强度是否实质地不同？

对于检验变量算得：

$$t_b=\frac{|18\cdot10^7-24\cdot10^7|}{\sqrt{5.24\cdot10^7}}\sqrt{\frac{20\cdot32}{20+32}}=9.20,$$

其中
$$s_d^2=\frac{4\cdot10^{14}\cdot19+6\cdot10^{14}\cdot31}{20+32-2}=5.24\cdot10^{14}。$$

对 $\alpha=0.05$ 的误差概率和自由度 $f=n_1+n_2-2=50$，t 分布的表值是 $t_T=2.01$。由于 $t_b>t_T$，零假设必须拒绝；这意味着两个均值之间存在着重要差别。

3．两个方差 s_1^2 和 s_2^2 的比较。 假定大小分别为 n_1 和 n_2 的两个样本互相独立，并且取自一个正态分布的总体。若对于检验变量 $F=s_1^2/s_2^2$，$s_1^2>s_2^2$ 的计算值 F_o 小于对 α 以及自由度 $f_1=n_1-1$ 和 $f_2=n_2-1$ 的表值 F_T，则以误差概率 α 采取零假设，即假设它们的方差 s_1^2 和 s_2^2 仅仅随机地彼此不同。

【例】 两部机器在给定的加工过程中，比较它们保持的公差，以确定关于误差概率 $\alpha=0.05$ 它们是否实质地不同。为此目的，分别在第一台和第二台机器上进行 $n_1=25$ 和 $n_2=31$ 的试验，并对所得的结果算出方差 $s_1^2=17.9$ 和 $s_2^2=17.5$。对于检验变量得到 $F_o=17.9/17.5=1.023$。对 $\alpha=0.05$ 的误差概率和自由度 $f_1=24$，$f_2=30$，F 分布的表值是 $F_T=1.89$。由于 $F_o<F_T$，零假设必须接受，即两台机器公差之间的差别只是随机的。

对于 $\alpha=0.05$ 的 F 分布（f_1＝较大散布的自由度）

f_2	$f_1=1$	$f_1=2$	$f_1=3$	$f_1=4$	$f_1=5$	$f_1=6$	$f_1=8$	$f_1=12$	$f_1=24$	$f_1=\infty$	f_2
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	249.0	254.3	1
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50	2
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53	3
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63	4
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36	5
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54	10
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.08	1.84	20
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62	30
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51	40
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39	60
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25	120
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	1.94	1.75	1.52	1.00	∞

4. **频率的比较。** 在大小为 n，其元素互相独立的样本中，若一个事件出现 z 次，但它在总体中出现的概率为 p，则只要检验变量

$$t=\frac{|z-np|}{\sqrt{np(1-p)}} \quad 或 \quad t=\frac{|z/n-p|}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$$

的计算值 t_c 小于对 α 和自由度 $f=n-1$ 的表值 t_T，那末相对频率 z/n 与 p 的偏差就以误差概率 α 为随机的。

【例】 在长时期观察的基础上，某种动物病的死亡率是 $p=0.4$。在 $n=71$ 只患此病的动物身上试验一种新药，它们中的 $z=20$ 只死亡。关于 $\alpha=0.01$ 的误差概率，此药是不是一种适当的处方？

按照零假设，相对频率 $z/n=\frac{20}{71}$ 与 $p=0.4$ 的偏差只是随机的，算得 $t_c=\frac{|20-71\cdot0.4|}{\sqrt{71\cdot0.4\cdot0.6}}=2.035$。对 $\alpha=0.01$ 的误差概率和自由度 $f=n-1=70$，t 分布的表值是 $t_T=2.65$。因为 $t_c<t_T$，所以零假设能接受。

5. **分布的检验。** 若检验变量 $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}[(h_i-k_i)^2/k_i]$ 的计算值 χ_c^2 小于对 α 和自由度 $f=k-m-1$ 的表值 χ_T^2，其中 m 是根据样本估计的未知参数的个数，则一个经验分布以误差概率 α 只是随机地偏离理论分布。这里把所研究的材料分成 k 类，h_i 是观察值，k_i 是在第 i 类 $(i=1, 2, \cdots, k)$ 中理论上的绝对频率。在每一类中理论上的绝对频率要求至少为 5。如必要的话，组合几个类能达到这个要求。

【例】 对一台机器制造的 80 件产品测量某个特征。把所得的测量分类，给出表中的频率 h_i。要求检验：关于 $\alpha=0.05$ 的误差概率测量值是否对应于一个正态分布。为此目的，借助于高斯分布算出属于每一类的理论频率 k_i，并检验零假设，即经验分布偏离理论分布只是随机的。借助于下表算出检验变量，此表包含计算中的各步。

h_i	k_i	h_i-k_i	$(h_i-k_i)^2$	$(h_i-k_i)^2/k_i$
1, 2, 8 } 11	0.4, 2.1, 7.5 } 10.0	1.0	1.0	0.10
13	16.4	−3.4	11.56	0.70
25	22.0	−3.0	9.00	0.41
16	18.3	−2.3	5.29	
13, 2 } 15	9.3, 3.0 } 12.3	2.7	7.29	0.59
80	79.0			2.09

相应于计算值 $\chi_c^2=2.09$，对误差概率 $\alpha=0.05$ 和2自由度(因为2个参数被估计)查出 χ^2 的表值为 $\chi_T^2=5.99$。因为 $\chi_c^2<\chi_T^2$，所以接受零假设。

χ^2 分布表

自由度	误差概率	
f	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
1	3.84	6.64
2	5.99	9.21
3	7.82	11.35
4	9.49	13.28
5	11.07	15.09
6	12.59	16.81
7	14.07	18.48
8	15.51	20.09
9	16.92	21.67
10	18.31	23.21
20	31.41	37.57
30	43.77	50.89
40	55.76	63.69
60	79.08	88.38
120	146.57	158.95

统计的应用领域

这里将从许多应用领域中，选择**技术统计**和**生物测量**。

技术统计　统计处理技术问题的开端要追溯到十九世纪二十年代初。那时，戴维斯(Karl Daeves, 1893年生)认识到现代工业的大生产随之带来遵循某些正则性的测量问题。他在**大数研究**的概念下，汇集了他的考察过程。只是在最近的25到30年间，统计才应用于相当范围的工业问题，例如检验样本的赋值、一系列测量的估计或者生产的现行控制。在这个发展的过程中，引伸出**技术统计**这一专门名词。所谓**技术统计**就是能应用于技术且特别简洁的所有统计方法的总称。

这些方法可分成两类:

1. 自包含观察材料的统计考察和赋值的方法。这实质上涉及统计估计和检验过程，涉及揭示和描述关系的回归和相关分析。下列的问题对这一类是典型的: 电灯泡的寿命; 在高精度机械仪器的情形下测量不精确性的影响; 天然羊毛纤维的屈服强度; 某种纺织品的撕裂强度; 钢的抗张强度对各种因素依赖性的确定; 两种工料的性能比较。

2. 生产过程的初始和终了控制以及流动控制的方法，简称为**统计质量控制**。这些方法基于用统计方法控制生产过程的想法，当废品一出现立刻就被发现并且出废品的原因能被排除。

对于这种控制有两个可能性:

(i) 利用控制图这样地调节生产，使废品减少和工时缩短;

(ii) 利用抽样检验过程来考查成品和半成品，是否满足一定的质量要求。在这种情形下，已经不能影响成品; 而只能对下一步生产作出推断。

控制图。利用控制图以这样的方式控制正在完成的过程，能鉴定产品的特征并能判定与所要求数值的偏差是随机的还是系统的。根据鉴定的种类区分为:

(i) 对于可测特征的控制图，

(ii) 对于不可测特征的控制图。

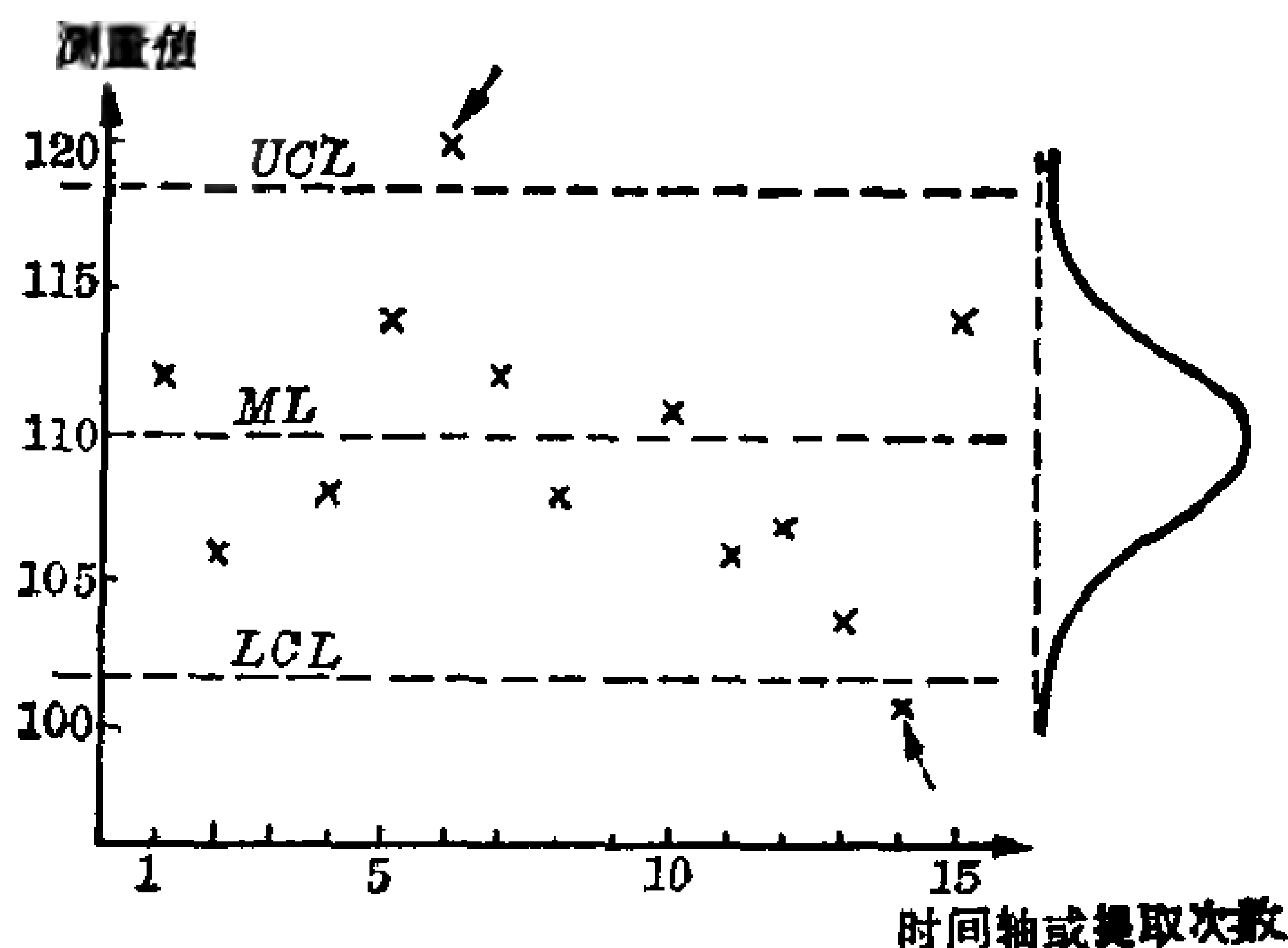


图 14.3-9　单值图

用单值图说明控制图的设计和使用(见图 14.3-9); 相应的过程对于其他的控制图也成立。在特定的生产过程中，为了控制一个特征，随机地选取在某些时节末了完成的物件，再测量所考察的特征的数值。这个数值不是记录在本子里而是标点在控制图的时标上方。若把这组数据设想为频率分布，则在许多情况下所得的分布是正态分布，至少近似于正态分布。若以它的均值 $\bar{x}$ 作一条平均线(ML)，以值 $\bar{x}+3s$，$\bar{x}-3s$ 分别作控制上限

(UCL)和控制下限(LCL)，则所有测量值的99.73%必须落在由这两条控制线所围的区域内。若这三条线已由初步检验确定下来，则生产过程就可用以这种方式准备的图表来控制。若测量值落在区域里面，则与均值的偏差可看作随机的。若一个表值落在控制线外边(图中用箭头指出)，则此偏差是系统的。在这种情况下，在继续生产以前就得找出干扰的原因。控制图的图形往往比表格提供更好的通盘考察。它表明在生产进程中所考虑的特征的发展，并指出什么时候需要排除故障以及对机器作新的调节。由于这些性质，控制图在操作中十分有效，联系到故障起因的探索它指出经常反复出现的故障，因而导致技术上的改革。

抽样方案。当正在完成的过程中实行流动统计控制时，使用控制图。不过要是供应未知其质量的材料或者正在完成的过程之前作控制而要求在这个过程之后进行质量考查，那末这些方法一般就会失效。在这两种情况下，在初始和终了控制中能实行100%的控制。不过，这是很昂贵的。而且如经验证实，即使用100%控制也不能保证发现所有的缺陷。因此就满足于样本检验，一批货接受还是拒绝根据从这批货提取的样本质量来决定。例如，这里按照*抽样方案*进行好坏检验。从N件的一批货中取出大小为n的样本进行检验。若它包含多于z个坏件，则拒绝这批货；若至多有z个坏件，则接受它。于是，*抽样方案*由数对(z, n)表征。它基于假定：在样本中次品的百分数与整批货中次品的百分数相符。这仅以一定的概率出现，所以生产者和消费者在接受抽样方案时都承担风险，这可以从运行特征中看出(图14.3-10)。它表示对于货物的接受概率$L(p)$依赖于它的拒绝百分率p，它的形式依赖于抽样方案。一般地，它利用二项分布或普阿松分布计算。从图中能看出生产者或消费者的风险，即能读出具有拒绝百分率p的一批货物被拒绝或接受的概率。重要的是根据协议选定抽样方案并借助于运行特征确定许可的拒绝百分率p。实际上，通常以这样的方式选择方案，具有p_1%拒绝率的货物将以95%的概率被接受而具有p_2%拒绝率$(p_1<p_2)$的将以90%的概率被拒绝。

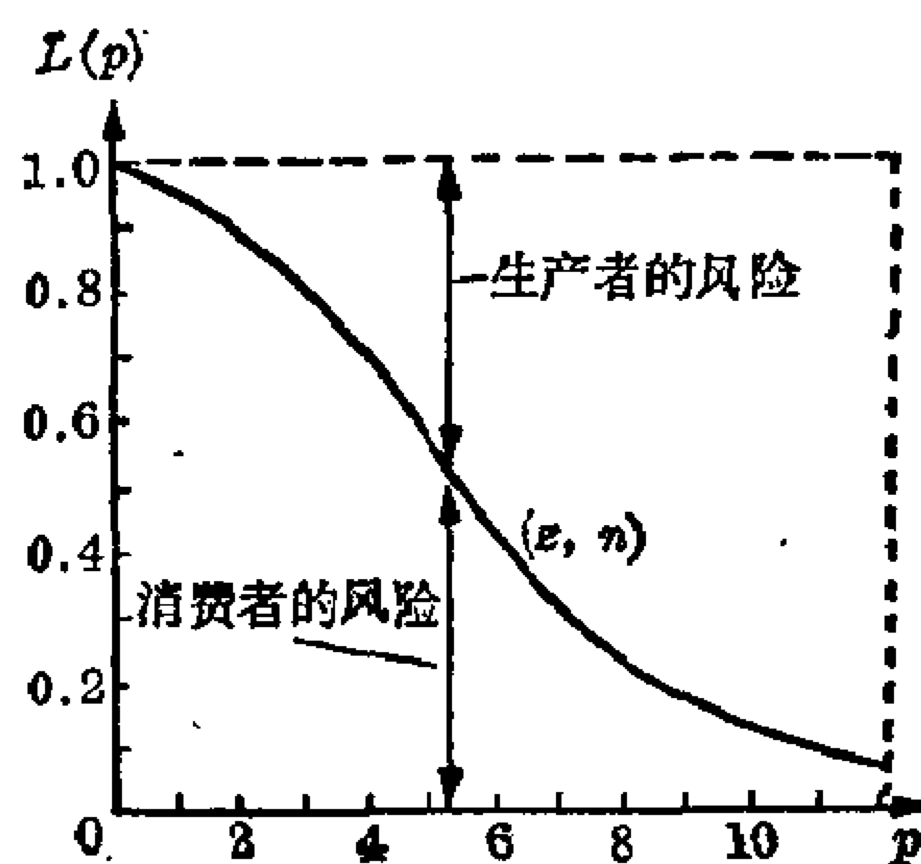


图14.3-10　运行特性

生物测量 皮尔逊将生物测量定义为应用数学的(统计的)方法考察生命相重性的研究。在探讨生物的现象和规律时遇到比起譬如说物理的现象和规律来不可比拟的困难情况。在物理学中能制定可再生的实验。为了发现所要求的规律,可使试验条件保持不变,而只让所研究的变量变化。但是在生物学中,许多因素在起作用,它们不受研究者的影响(例如气候对植物栽培的作用)。在医学上,这些方法更成问题,因为实验通常被排斥在外(例如,出于道德禁止在人身上作实验),往往只能停留在纯粹的观察。对此必须添加生物学测量及数值的相重性,称为生物变异性。由于这些原因,一定要对试验的安排、实施和赋值有一个考虑周密的试验方案。在生物测量的发展过程中,已经引出一些计划试验或观察的特殊方法。对于试验或观察的赋值,创造了一些特殊方法,它们特别考虑到:

(i) 通常是小的样本,这是由满足同性质要求的困难所制约的。

(ii) 频率分布不能归结为正态分布。

这些困难同时也是生物测量吸引人的地方,就在于找出最适合于给定的现实问题的统计方法。

第15章 误差计算，数据调节，逼近理论

15.1 误差计算

误差计算关系到数据及计算结果的准确性。由于不正确的数学推理所造成的误差，由于忽视运算规则所造成的误差，由于草率计算所造成的误差，它们都不是误差计算的讨论对象。当然这决不意味着计算者就可以粗心大意了。从三角形的两条边长 $a=7.49$，$b=5.32$ 及其夹角 $\gamma=30°$，中学生会按照公式

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$$

来计算第三边的长度 c（见右列的计算过程）。教师发现这个结果太不准确了：本来期望的解 $c=3.92$，学生在查考 $\cos\gamma$ 时显然取的小数位太少了。

$$a^2=56.1001$$
$$b^2=28.3024$$
$$a^2+b^2=84.4025$$
$$\cos\gamma=0.87$$
$$2ab\cos\gamma=69.3334$$
$$c^2=15.0691$$
$$c=3.88$$

由此引起这样一个问题，忽略小数位数的结果会出现怎样的误差，而为了给出所要求的准确度 $\cos\gamma$ 应当保持多少个小数位（见近似值计算结果的准确度中例4）。

近似值 在实际应用中测量所得的数值只能近似地知道。有一个人要开车到伦敦去，路标指出距离为75英里，他的汽车每加仑汽油平均可

驶 30 英里，因此他算出这次旅行的燃料需要量是(75/30＝)2.5 加仑。然而，路标并没有指出这一旅程的“真值”，它仅仅是一个近似值。对于这项计算来说，更加准确的距离表示不会有什么特殊价值，因为他的汽车平均耗油量也只是一个近似值而已(见图 15.1-1)。



图 15.1-1 这个路标舍入到英里整数

即使是纯粹的数在计算中也常常只能用它们的近似值。因为大量的数在十进小数系统内仅能表示为无限小数，例如 $\sqrt{2}$, π, $\lg 3$。

如要指出 a 是量 x 的一个近似值，通常写为 $x\approx a$; x 是精确值，a 是近似值。例如，$\sqrt{2}\approx 1.41$; $\pi\approx 3.14$; $\lg 3\approx 0.4771$。

绝对误差和相对误差

绝对误差 近似值 a 的优劣由它与精确值 x 的偏差来评定，差值 $a-x$ 叫做**绝对误差** $\varepsilon=a-x$。绝对误差越小，则近似值 a 越准确。例如 $x=2/3$ 的近似值 $a_1=0.66667$ 要比近似值 $a_2=0.667$ 准确一百倍。

近似值	精确值	绝对误差	相对误差
a	x	$\varepsilon=a-x$	$\lvert\varepsilon/x\rvert$

校正 如果要从近似值 a 获得该量的精确值 x，就必须对 a 加上校正值 c: $c=x-a=-\varepsilon$。

相对误差 常常不是给出近似值 a 的绝对误差 ε，而是给出它的**相对误差** $|\varepsilon/x|$。相对误差通常用百分数来表示。对于不是同一个量的若干近似值，可以用这种方式进行相互比较。

【例】 对于精确值 $x=2/3, y=1/15$ 分别地取近似值 $a_1=0.67, a_2=0.07$，其绝对误差 $\varepsilon_1=a_1-x=0.67-2/3=1/300$ 以及 $\varepsilon_2=a_2-x=0.07-1/15=1/300$; 而对于相对误差则得到

$$|\varepsilon_1/x|=\frac{1/300}{2/3}=1/200=0.005=0.5\%$$

以及

$$|\varepsilon_2/y|=\frac{1/300}{1/15}=1/20=0.05=5\%。$$

虽然绝对误差相等，a_1 近似于 x 要比 a_2 近似于 y 准确十倍。

绝对误差界限 有关某个近似值的绝对误差或相对误差大小的每一

个命题都是表达这个逼近*准确度*的命题。不过,精确值通常是不知道的,例如从测量所得的近似值就是这种情况。因此既不能计算此逼近的绝对误差,也不能计算出它的相对误差。在这种情况下,应当给出这一逼近的绝对误差或相对误差的界限。所谓某个近似值 a 的绝对误差界限,理解为绝对误差的绝对值决不会超出的一个正数 Δa。不等式

$$-\Delta a\leqslant\varepsilon\leqslant\Delta a \quad 或 \quad a-\Delta a\leqslant x\leqslant a+\Delta a$$

总是成立。如果指出了一个 Δa,则同时就给出了 x 的一个下界和一个上界。这可简写为 $x\approx a(\pm\Delta a)$,或 $x=a\pm\Delta a$; Δa 给出了关于 a 的准确度信息。Δa 越小,近似值 a 越准确。

a 是 x 的近似值, Δa 是 a 的绝对误差界限	$x\approx a(\pm\Delta a)$ 或 $x=a\pm\Delta a$

另一方面,若对于量 x 已知两个界限 x_1 和 x_2,且 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$,则 $a=(x_1+x_2)/2$ 是 x 的一个近似值,而 $\Delta a=(x_2-x_1)/2$。

相对误差界限　在技术资料中准确度常常写成 $x\approx a(\pm\delta\cdot100\%)$ 或 $x=a\pm\delta\cdot100\%$。量 $\delta=|\Delta a/a|$ 是 a 的相对误差的一个界限。

$x\approx a(\pm\delta\cdot100\%)$ 或 $x=a\pm\delta\cdot100\%$	a 是 x 的近似值; $\delta=\|\Delta a/a\|$ 是 a 的相对误差界限; Δa 是绝对误差界限

【例】　一个电容器的电容量为 250 pF±10%, 近似值 $a=250$ pF 的相对误差是 $\delta=0.1$, 由此得出 $\Delta a=a\cdot\delta=25$ pF 是绝对误差的一个界限。因此电容量的精确值在 225 pF 和 275 pF 之间。

若给出诸如 π, $\sqrt{2}$, lg 3 等数的近似值,则通常省去准确度的专门说明。这种近似值的表示遵守一定的规则,它允许立刻推出所给表格的准确度。

截尾　数 π 只能表示成无限小数展开。例如在表中会发现此数给出 $\pi=3.141592653589\cdots$ 这个表就以这种方式给出一个在其 12 位后截尾的小数作为 π 的近似值。在*截尾*一个无限小数时,它的数字序列于某个特定位置上完全被切掉了。末尾的三个点就是指出应该还有数字跟在后面。以此方式给出的所有数字都是*真确数字*,就是说截尾了的小数数字序列与未截尾的小数数字序列直到开始切掉的那一位之前是完全相符的。

因此在第 4 个小数位后截尾的数 π 为 $\pi=3.1415\cdots$。在截尾了的小数最后一个数字之后可以跟从 0 到 9 的任何一个数字。由此得出,若用

在 k 位数字之后截尾的数作为一个近似值，则这一逼近的绝对误差是负的并且其绝对值小于该数最后一个数字所在的幂次单位。因此在第 k 个小数位后截尾的一个数具有小于 10^{-k} 的误差；例如，对于 $\pi\approx3.1415$，它的绝对误差小于 $10^{-4}=1/10000$。

舍入 缩短小数位的一个普通方法是运用舍入。按照这种方法，如果后面跟着的是 0, 1, 2, 3, 4 中某一个数字（舍出），则留下来的最后一位数字象在截尾法中一样保持不变。如果后面跟着的是 5, 6, 7, 8, 9 中某一个数字（舍进），则留下来的最后一位数字要增加 1。因此，π 舍入到四位小数的一个近似值为 $\pi\approx3.1416$；它的绝对误差小于 $10^{-4}/2$。如果遵照这个规则，那末就能保证舍入数的绝对误差具有小于给出的最后一个数字所在幂次单位的一半的绝对值。不过这时的绝对值可正可负。只有当被略去的第一个数字为 5 并且跟在它后面的都是零的时候，舍入误差才正好等于所留下的最后一个数字所在幂次单位的一半。在这种情况下通常按这样的方式舍入（舍出或舍进）：使留下来的最后一位数字为偶数。例如，$1/8=0.12500$ 应舍入为 0.12，而 $7/40=0.17500$ 就应舍入为 0.18。

可靠数字 一个舍入数的数字并非全都是真确数字，因为它们可以是舍进的结果。正确舍入的数只有*可靠数字*。如果某个近似值的绝对误差至多为留下的最后一位数字位幂次单位的一半，则这个近似值的所有数字都称为可靠的。

【例】 在五位平方根表中对于 $\sqrt{39}$ 给出的值为 6.24500。这个值全是可靠数字，因为它的绝对误差小于 $5\cdot10^{-6}$。但它的最后三位数字不是真确数字，因为 $\sqrt{39}=6.2449979\cdots$。这样一来，只要一个近似值只含可靠数字，此时就不一定有一个准确度的叙述。另一方面，如果不给出逼近准确度，就必须假定其所有数字都是可靠的。特别地，在数学表中给出的一切数都属这种情况。

如果没有引起误解的危险，那末只要 a 是对于 x 由舍入而造成的一个近似值，常常就不写 $x\approx a$ 而写成 $x=a$。

有效数字和无效数字 在舍入一个大数的时候会发生困难。例如，将数 1778 舍入到最近的百位，得出 1800。这个数字是正确地舍入的，但并非只含可靠数字，因为其绝对误差大于 0.5。在略去了数字 7 和 8 的位置上引进了 0，它们用来固定舍入数的数量级。它们是所谓*无效数字*。引进非实质性的数字（零）在考虑准确度时会引起误解。因此借助于十的

幂次使用另一种记法。在刚才讨论的这种情况下，对于舍入数写为 $18\cdot10^2$。不过若要舍入的数为 1799.7，则在 1800 中的两个零是*有效数字*，它们要包括在内，例如应写成形式 $1.800\cdot10^3$。

舍入数的舍入　如果已经舍入过了的数还要进行舍入的话，就碰到更大的困难。例如，若数 0.4747 舍入成二位小数，就给出 0.47；然而若此数第一次舍入成三位，再将这个舍入数舍入成二位，则首先得到 0.475 而最后为 0.48，此时最后的那位数字就不再可靠了。当最后一位数字不得不舍入成 5 时，总是出现这种由于反复舍入所造成的不确定性。因而通常为着可能进一步舍入就注出一个舍入数最后一位的 5 是不是真实的，或说它是舍进的结果还是舍出的结果。有时，相应于它是舍进的结果或它是略去了其后面数字的结果，分别地在 5 的上面加一横或加一点来表示（见图 15.1-2）：

31	8.87594	
32	8.87695	10
33	8.87795	10
34	8.87895	10
		10
35	8.87995	
		9

图 15.1-2　对数表中最后一位 5 的表示

$$2.6146\approx2.61\bar{5}\approx2.61;\quad 2.6153\approx2.61\dot{5}\approx2.62。$$

近似值计算结果的准确度

初始误差和计算误差　如果用近似值来进行一项计算，那末一般地说，其结果同样也只是近似地正确的。首先，结果的不准确度取决于参与计算的逼近误差。在结果中以这种方式所造成的误差称为*初始误差*。其次，有些误差是在计算过程本身出现的，例如经受了舍进或舍出而出现的，这叫做*计算误差*。计算误差总是要比初始误差小，否则初始数据的准确度就没有完全被利用。计算误差大约应是初始误差的 1/10 数量级。要做到这一点可以在计算中增加小数位，然后将结果舍入到与初始误差相适应的准确度。一般地说，为了达到这个目的，有一到二位数就足够了。

边界值方法　*边界值方法*能最精密地确定出计算结果的准确度。这个方法从初始数据的下界和上界找出结果的下界和上界。对于基本的计算方法可以给出一些简单的规则。设 $L(x)$ 和 $U(x)$ 分别是 x 值的下界和上界，$L(y)$ 和 $U(y)$ 是 y 值的下界和上界，则

$$L(-x)=-U(x),\quad L(x+y)=L(x)+L(y),\quad L(x-y)=L(x)-U(y),$$
$$U(-x)=-L(x),\quad U(x+y)=U(x)+U(y),\quad U(x-y)=U(x)-L(y)。$$

这些关系可以从不等式 $L(x)\leqslant x\leqslant U(x)$，$L(y)\leqslant y\leqslant U(y)$ 推导出来；例如，从不等式 $L(x)\leqslant x\leqslant U(x)$ 乘以 -1 就得出 $-U(x)\leqslant -x\leqslant -L(x)$，

所以 $-U(x)$ 是 $-x$ 的下界而 $-L(x)$ 是 $-x$ 的上界。

从			
$x\leqslant U(x)$	$L(x)\leqslant x$	$L(x)\leqslant x$	$x\leqslant U(x)$
得出			
$x+y\leqslant U(x)+y$;	$L(x)+y\leqslant x+y$;	$L(x)-y\leqslant x-y$;	$x-y\leqslant U(x)-y$;
又因			
$y\leqslant U(y)$	$L(y)\leqslant y$	$y\leqslant U(y)$	$L(y)\leqslant y$
得到			
$x+y\leqslant U(x)+U(y)$	$L(x)+L(y)\leqslant x+y$	$L(x)-U(y)\leqslant x-y$	$x-y\leqslant U(x)-L(y)$

在确定 xy 和 x/y 的界限时，界限的符号在起作用。如果 x 和 y 都有正的界限，那末

$$L(xy)=L(x)L(y),\quad U(xy)=U(x)U(y),$$
$$L(x/y)=L(x)/U(y),\ U(x/y)=U(x)/L(y)。$$

计算过程中进行舍入时，必须注意作为舍入的结果，下界只能减少，上界只能增加。

【例 1】 正圆锥截头体的高度 h 是从它的上半径 $r_2\approx61(\pm0.5)$ 英寸，它的下半径 $r_1\approx74(\pm0.5)$ 英寸，以及它的斜高 $s\approx82(\pm0.5)$ 英寸计算出来的。公式是 $h=\sqrt{s^2-(r_1-r_2)^2}$。右边的计算结果给出 80.28 英寸作为下界，81.63 英寸作为上界。这个结果可以更简明地表示成 $h\approx80.955(\pm0.675)$ 英寸或稍为粗糙一点的逼近 $h\approx81.0(\pm0.8)$英寸。

	下　界	上　界
s	81.5	82.5
r_1	73.5	74.5
r_2	60.5	61.5
r_1-r_2	12.0	14.0
$(r_1-r_2)^2$	144.0	196.0
s^2	6642.25	6806.25
h^2	6446.25	6662.25
h	80.28	81.63

极限误差方法　边界值方法把初始误差和计算误差都考虑进去了。不过使用它是很费时间的，因为每一步计算都要进行两次。

如果只是对初始误差感兴趣，那末**极限误差法**能更快地达到目标。它虽然不那么严格，但它提供了一种方便，能直接从初始数据的准确度找出结果误差的近似界限。极限误差方法依据下面的原理。

设要计算 k 个变量的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$。对于计算所需的值 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，只能利用它们的近似值 $a_1, a_2, \cdots, a_k$。现在要求估计基于近似值 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 计算出的结果中所具有的误差。假设逼近具有绝对误差 $\varepsilon_1=a_1-x_1, \varepsilon_2=a_2-x_2, \cdots, \varepsilon_k=a_k-x_k$，它们与值 a_i 相比是非常小的。精确的结果应是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k)=f(a_1-\varepsilon_1, a_2-\varepsilon_2, \cdots, a_k-\varepsilon_k)。$$

如果这个等式的右端应用微分演算中已知的方法展开为级数，再略去绝对误差 ε_i 的高次项，就得到

$$f(x_1, \cdots, x_k)=f(a_1, \cdots, a_k)-\varepsilon_1\frac{\partial f}{\partial x_1}-\varepsilon_2\frac{\partial f}{\partial x_2}-\cdots-\varepsilon_k\frac{\partial f}{\partial x_k}。$$

这里 $f(x_1, \cdots, x_k)$ 的偏导数在点 $x_1=a_1, x_2=a_2, \cdots, x_k=a_k$ 取值。对于结果的绝对误差，到 ε_i 的高次项为止，这个等式给出了表达式

$$\begin{aligned}\varepsilon_f&=f(a_1, \cdots, a_k)-f(x_1, \cdots, x_k)\\&=\varepsilon_1 f_{x_1}(a_1, \cdots, a_k)+\varepsilon_2 f_{x_2}(a_1, \cdots, a_k)\\&\quad+\cdots+\varepsilon_k f_{x_k}(a_1, \cdots, a_k)。\end{aligned}$$

这样，绝对误差的绝对值可以估计如下：

$$\begin{aligned}|\varepsilon_f|\leqslant&|\varepsilon_1||f_{x_1}(a_1, \cdots, a_k)|+|\varepsilon_2||f_{x_2}(a_1, \cdots, a_k)|\\&+\cdots+|\varepsilon_k||f_{x_k}(a_1, \cdots, a_k)|。\end{aligned}$$

若已知绝对误差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$ 的界限 $\Delta a_1, \Delta a_2, \cdots, \Delta a_k$，则此不等式可以加强为

$$\begin{aligned}|\varepsilon_f|\leqslant&\Delta a_1|f_{x_1}(a_1, \cdots, a_k)|+\Delta a_2|f_{x_2}(a_1, \cdots, a_k)|\\&+\cdots+\Delta a_k|f_{x_k}(a_1, \cdots, a_k)|=\Delta f。\end{aligned}$$

就一个良好的逼近来说，值 Δf 给出了结果的绝对误差的一个界限。

估计计算结果准确度的基本等式
$\Delta f=\Delta a_1\vert f_{x_1}(a_1, \cdots, a_k)\vert+\Delta a_2\vert f_{x_2}(a_1, \cdots, a_k)\vert+\cdots+\Delta a_k\vert f_{x_k}(a_1, \cdots, a_k)\vert$

由这个等式就有可能从参与计算的近似值的极限误差计算出结果的极限误差。在其推导中略去绝对误差 $\varepsilon_i(i=1, \cdots, k)$ 的高次项实际上相差无几。

极限误差方法应用于初等计算规则 若 a 和 b 分别是量 x 和 y 的逼近，极限误差为 Δa 和 Δb，则基本等式采取如下形式：

加法：$f(x, y)=x+y$; $|f_x|=1$; $|f_y|=1$; $\Delta f=\Delta a+\Delta b$。

减法：$f(x, y)=x-y$; $|f_x|=1$; $|f_y|=1$; $\Delta f=\Delta a+\Delta b$。

两个近似值的极限误差之和表示这两个近似值的和以及差的绝对误差的一个界限。

乘法：$f(x, y)=xy$; $|f_x|=|y|$; $|f_y|=|x|$; $\Delta f=|a|\Delta b+|b|\Delta a$; 除以 $|f(a, b)|=|ab|$ 给出 $\Delta f/|f|=\Delta a/|a|+\Delta b/|b|$。

除法：$f(x, y)=x/y$; $|f_x|=1/|y|$; $|f_y|=|x|/y^2$; $\Delta f=\Delta a(1/|b|)+\Delta b|a|/b^2$; 除以 $|f(a, b)|=|a/b|$，给出 $\Delta f/|f|=\Delta a/|a|+\Delta b/|b|$。

两个近似值的相对误差界限之和表示这两个近似值的积以及商的相对误差的一个近似界限。

自乘方幂：$f(x)=x^n$; $|f_x|=|nx^{n-1}|$; $\Delta f=\Delta a|na^{n-1}|$; 除以 $|f(a)|=|a^n|$ 给出 $\Delta f/|f|=|n|\cdot\Delta a/|a|$。

一个近似值的相对误差界限的 n 倍为这个近似值 n 次幂的相对误差的一个近似界限。

极限误差方法也可应用于由和、差、积、商合成的更加复杂的计算。

极限误差公式

x 和 y 是精确值，a 和 b 是它们的逼近，Δa 和 Δb 为它们的极限误差

计算类型	$f(x, y)$	绝对误差 Δf 界限	相对误差 $\Delta f/\lvert f\rvert$ 界限
加	$x+y$	$\Delta a+\Delta b$	$(\Delta a+\Delta b)/\lvert a+b\rvert$
减	$x-y$	$\Delta a+\Delta b$	$(\Delta a+\Delta b)/\lvert a-b\rvert$
乘	xy	$\Delta a\lvert b\rvert+\Delta b\lvert a\rvert$	$\Delta a/\lvert a\rvert+\Delta b/\lvert b\rvert$
除	x/y	$(\Delta a\lvert b\rvert+\Delta b\lvert a\rvert)/b^2$	$\Delta a/\lvert a\rvert+\Delta b/\lvert b\rvert$
自乘方幂	x^n	$\Delta a\lvert na^{n-1}\rvert$	$\lvert n\rvert(\Delta a/\lvert a\rvert)$
一般	$f(x, y)$	$\Delta a\lvert f_x(a, b)\rvert+\Delta b\lvert f_y(a, b)\rvert$	$\dfrac{\Delta a\lvert f_x(a,b)\rvert+\Delta b\lvert f_y(a,b)\rvert}{\lvert f(a, b)\rvert}$

【例2】 表达式 $f=ab/c$ 对于 $a=2\pm0.1$, $b=4\pm0.2$, $c=2.5\pm0.1$ 的计算给出

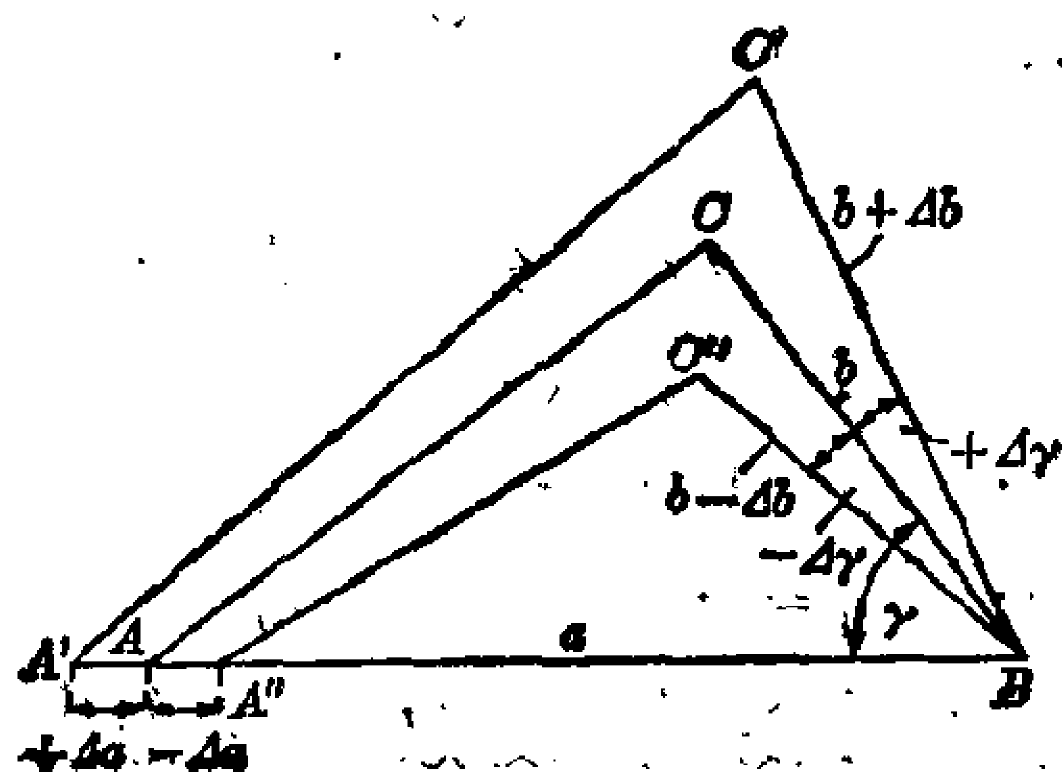


图 15.1-3 计算位于三角形 $A''BC''$ 和 $A'BC'$ 之间的精确三角形

$$f=(2\cdot4)/2.5=3.2,$$

具有相对误差：

$$\Delta f/|f|=\Delta a/|a|+\Delta b/|b|+\Delta c/|c|=0.1/2+0.2/4+0.1/2.5=0.14\triangleq14\%$$

和绝对误差为 $\Delta f=3.2\cdot0.14=0.448$。结果是 $f=3.2\pm0.448$。

【例3】 给出两边及夹角 $a\approx5.2(\pm0.05)$, $b\approx3.4(\pm0.05)$ 以及 $\gamma=35^\circ(\pm10')$ 的三角形面积(见图 15.1-3) 是

$$A=1/2ab\sin\gamma\approx5.070。$$

误差估计为

$$\Delta A=1/2\ \Delta a|b||\sin\gamma|+1/2|a|\Delta b|\sin\gamma|+1/2\ |a||b||\cos\gamma|\Delta\gamma,$$

$$\begin{aligned}\Delta A/|A|&=\Delta a/|a|+\Delta b/|b|+|\cos\gamma/\sin\gamma|\Delta\gamma\\&=0.05/5.2+0.05/3.4+1.428\cdot0.0029\\&=0.0096+0.0147\cdot0.0042\\&=0.0285\triangleq2.85\%。\end{aligned}$$

因此 $\Delta A=5.070\cdot0.0285=0.144$ 或 $A\approx5.070(\pm0.144)$，亦即

$$A\approx5.070(\pm2.85\%)。$$

极限误差方法的基本等式将初始值误差的界限同计算结果误差的界限联系了起来。如果只有单个近似值参加计算，那末从这个基本等式，可以算出为了保证结果达到要求的准确度对这个近似值所必须选取的准确度。在这种情况下，基本等式形式为 $\Delta f=|f'(a)|\Delta a$，其中 a 和 Δa 标记这个近似值及其极限误差。若结果的误差不得超过 Δ_0，则必须有 $\Delta f<\Delta_0$ 或 $\Delta a<\Delta_0/|f'(a)|$。

【例4】 由两条边长 $a=7.49$ 和 $b=5.32$ 以及夹角 $\gamma=30^\circ$ 计算三角形第三条边的长度 c，为了使其绝对误差小于 0.005，问 $\cos\gamma$ 必须取多少位小数？

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma};$$

因此
$$\frac{\partial c}{\partial(\cos\gamma)}=-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}=-\frac{ab}{c}$$

且
$$\Delta c=\Delta(\cos\gamma)(ab/c)=\Delta(\cos\gamma)\cdot 10.2。$$

因为 $\Delta c<0.005$ 必须成立，所以 $\Delta(\cos\gamma)<0.005/10.2=4.9\cdot 10^{-4}$。由此得出 $\cos\gamma$ 的值至少准确到三位小数。

如果计算的结果依赖于几个初始值，那末为了保证结果具有给定准确度而从极限误差的基本方程来确定初始数据所必须的准确度问题当然是一个不定问题。对于多个变量的计算只有一个线性方程可以利用。不过，借助于基本方程可以估计出各个误差对于结果的影响大小，从而可以认识到某一些初始值必须选取得具有特定的准确度。

【例5】 要确定正圆锥的体积。测得底圆的直径 $d\approx 16$ 及高度 $h\approx 32$。为了使结果的相对误差不超过1%，问测量必须有怎样的准确度，在计算中 π 应取多少位小数？

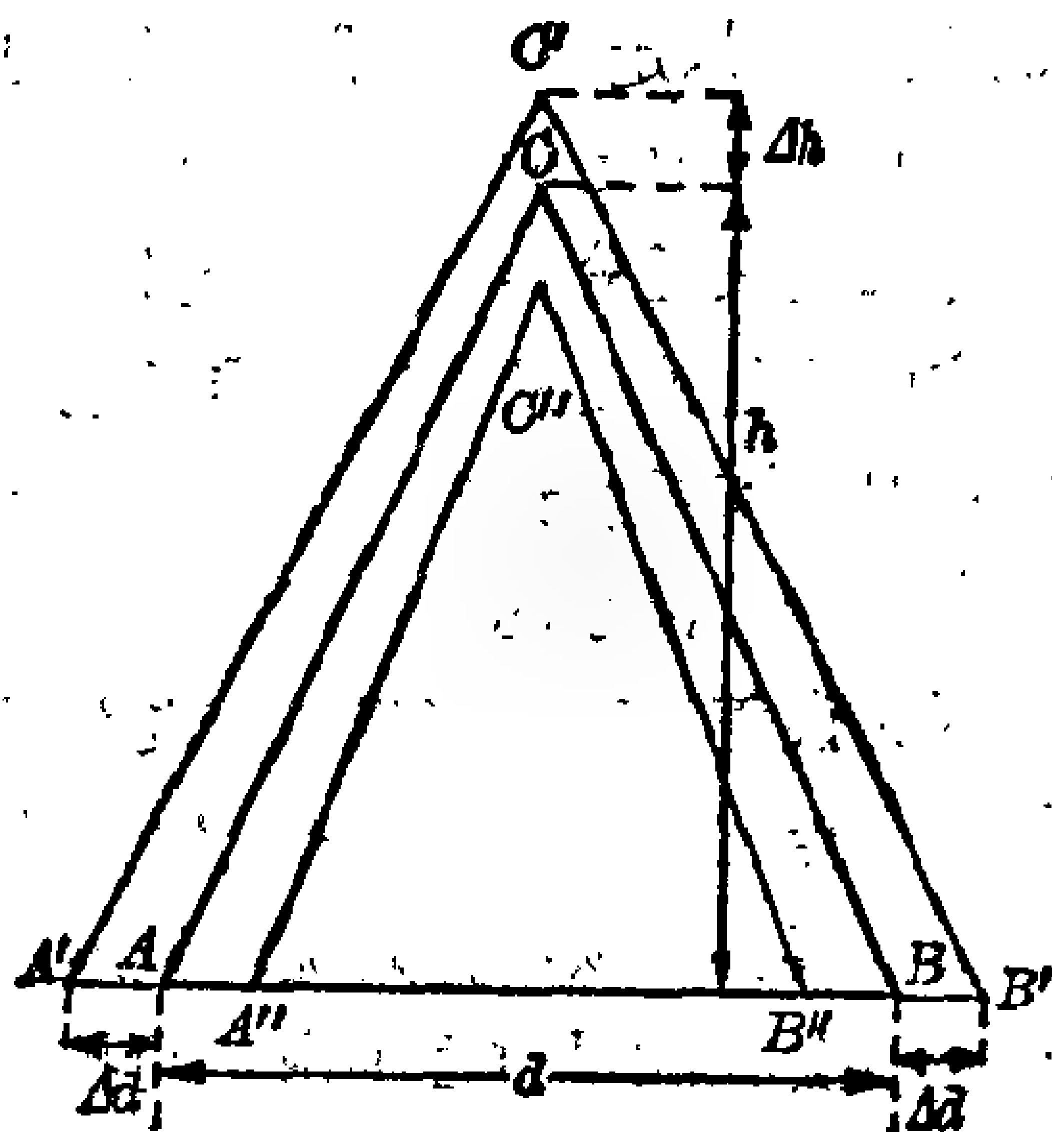


图15.1-4 位于图形 $A'B'C'$ 和 $A''B''C''$ 之间的正圆锥截面

锥的体积 $V=(\pi/12)hd^2$。如果 $\Delta\pi$, Δh, Δd 分别为 π, h, d 绝对误差的界限，那末体积相对误差的界限给出如 $\Delta V/V=\Delta\pi/\pi+\Delta h/h+2\Delta d/d$。由条件 $\Delta V/V<0.01$ 得到不等式

$$0.31831\Delta\pi+0.03125\Delta h+0.125\Delta d<0.01。$$

单独利用这个关系，不可能给出 $\Delta\pi$, Δh 和 Δd 的唯一估计。不过可以看出，在确定直径时产生的一个误差对于结果的影响要比测量高度时一个误差的影响大四倍。测量直径时 $\Delta d=0.1$ 的准确度是不够的。单单由这项误差所造成的结果相对误差可达1.25%。若直径测量具有准确度0.05，则 $\Delta d=0.05$ 而其他两个误差的界限必须满足条件

$$0.31831\Delta\pi+0.03125\Delta h<0.00375。$$

高度测量中的误差最多为0.12，此时 π 必须没有误差。如果高度测量的准确度提高到 $\Delta h=0.1$，那末 π 的误差界限必须满足 $0.31831\Delta\pi<$

0.000625或$\Delta\pi<0.002$。这样，π舍入到两位小数取值3.14就能满足条件。由此得出，若测量直径具有$\Delta d=0.05$的准确度，高度具有准确度$\Delta h=0.1$并且取$\pi=3.14$，则计算圆锥的体积至少具有1%的准确度(见图15.1-4)。

测量误差和观测误差

测量误差　如果对于一个量x的近似值是通过测量获得的，那末绝对误差$\varepsilon=a-x$称为*测量误差*或*正当误差*。我们说测量误差不可避免时，当然不考虑*过失误差*，例如由于疏忽或者没有调节好测量仪器所造成的这类过失误差。测量误差，一方面来源于测量仪器的准确性(仪器误差)，另一方面来源于进行测量的人在判断和读数时造成的无意误差(个人误差)。仪器误差往往表现为*常规误差*，它们或者是*恒定的*或者是*系统的*。例如，若从一只走时绝对准确但指针拨错了的钟面上读出时间，则这个时间测量就具有恒定的误差，它正好是指针拨错的时差总量。而如果已知一只钟每天快五分钟，那末在这只钟上的时间读数就具有系统的误差，其数量依赖于此钟自从上次校准后已走了多长时间。在测量中必须考虑许多恒定误差和系统误差。不过由于它们的规则性，所以它们总是可以确定出来并予以消除的。

观测误差　就*非常规的*或*随机的测量误差*来说，情况就不同了。它们虽然同样也是不可避免的，但并非总是可以消除它们的。大部分观测者的个人误差必须看作是随机误差，于是将它们叫做*观测误差*。不过随机误差也会在测量过程中由不可控制的、随机的影响所产生。

单独一次测量足以提供量x的一个近似值a，但是从此单独一次测量关于随机的测量误差$\varepsilon=a-x$则什么也说不上。它在某一次可能大些在另一次可能小些，还可正可负。当然，由测量仪器的知识以及观测者的细心和经验，可以给出一个对于测量误差来说肯定不会超过的界限Δa，然而往往粗糙了一点。由于这个原因，测量不只进行一次，而是进行若干次，并且如果可能的话各个测量由不同的观测者来做。若已经作出量x的n次测量，通常n个结果$a_1, a_2, \cdots, a_n$并不完全相符，尤其当对于读数的准确度提出了严格要求而测量标尺上刻度之间的数值又必须作估计时更是如此。这种估计总是包含有观测者的个人因素。况且，判断的准确度总是一次测量跟另一次测量有所不同。发生误差的纯粹心理学上的根源还出于这样一个事实：用肉眼来确定重合不可能没有模糊之处。n

次测量 a_i 对于 n 个测量的正当误差 ε_i 以及未知的精确值 x，即对于 $(n+1)$ 个未知数给出了 n 个方程

$$\varepsilon_1=a_1-x,\ \varepsilon_2=a_2-x,\ \cdots,\ \varepsilon_n=a_n-x。$$

在数据调节这一节将发展几个方法以找出对 x 尽可能最佳的逼近 a 并算出它的准确度。解决这个问题的可能性依赖于如下的事实：虽然在各个情况下观测误差 ε_i 会不可控制地或大或小、或正或负，但是整体上看它们遵守一条严格的规律。

高斯误差分布律　高斯是最早注意到控制观测误差的规律的一个人。连续随机变量的**正规分布密度函数**给出为

$$p(x)=1/[a\sqrt{2\pi}]\cdot\exp[-(x-b)^2/(2a^2)],$$

其中 $a^2=\sigma^2$ 是它的**方差**而 $\mu=b$ 是它的期望值(见 **II**. 第 14 章)。如果**观测误差** $\varepsilon=x-b$ 选作横坐标而**相对频率**作纵坐标，那末作为密度分布 $\varphi(\varepsilon)$ 就由此得出高斯误差律。

高斯误差律	$\varphi(\varepsilon)=1/[\sigma\sqrt{2\pi}]\cdot\exp[-\varepsilon^2/(2\sigma^2)]$

这个函数的图象是喇叭状的，它延伸到整个横轴上 $(-\infty<\varepsilon<\infty)$，并在点 $\varepsilon=0$ 处具有极大值而 $\varepsilon=-\sigma$ 和 $\varepsilon=+\sigma$ 为变曲点。当 σ 值大时曲线 $\varphi(\varepsilon)$ 平坦宽阔，当值 σ 小时曲线就陡峭狭窄。借助于高斯误差律可以算出观测误差的数量落在界限 $-\varDelta$ 和 $+\varDelta$ 之间的概率。这个概率是

$$P(-\varDelta\leqslant\varepsilon\leqslant+\varDelta)=\int_{-\varDelta}^{+\varDelta}\varphi(\varepsilon)d\varepsilon。$$

误差的界限 $\varDelta$ 通常以 σ 为单位来表示，写成 $\varDelta=\lambda\sigma(\lambda>0,\ \sigma>0)$。**误差积分**的赋值表明，观测误差 ε 的绝对值以概率 P 不超出界限 $\varDelta=\lambda\sigma$，右边的表格中给出其概率。

误差界限 $\varDelta=\lambda\sigma$	概　率 P
0.67σ	0.500
1.00σ	0.683
1.96σ	0.950
2.00σ	0.954
2.58σ	0.990
3.00σ	0.997

如果对于一个测量过程已知其误差分布的标准偏差 σ，那末可以给出观测误差以某一概率所不会超出的那个界限 $\varDelta=\lambda\sigma$。可惜的是，实际上 σ 通常是不知道的。

数据调节过程表明，如何从量 x 的若干次测量中可以估计出 σ 值来，并且如何借助于高斯误差律可以得出有关观测误差的结论。

15.2 数据调节

调节过程本来是由高斯发展起来的，并应用于彗星轨道的计算以及三角测量，高斯本人就曾经进行过这种测量。即使在今天这些方法对于处理天文测量和大地测量来说仍是不可或缺的，此外它们有效地应用于所有那些用观测结果作精确计算的领域。借助于调节可以从包含有误差的一些测量中确定出被测数量的估计值(近似值)，并指出其准确度。

最小二乘法

似然函数 若作n个独立的测量a_1, a_2, …, a_n来确定n个量y_1, y_2, …, y_n,则高斯误差律适用于每一个观测误差$\varepsilon_1=a_1-y_1$, $\varepsilon_2=a_2-y_2$, …, $\varepsilon_n=a_n-y_n$。由于$d\varepsilon_i=da_i$,

$\varphi(a_i-y_i)da_i=1/[\sigma_i\sqrt{2\pi}]\cdot\exp[-(a_i-y_i)^2/(2\sigma_i^2)]da_i \quad (i=1,\cdots,n)$

给出了被观测的值位于微分区间(a_i, a_i+da_i)内的概率，或者简称被测量的y_i值是a_i的概率。每一个标准偏差$\sigma_i(i=1, \cdots, n)$依赖于相应测量的准确性。如要计算被测量的y_1值为a_1,同时被测量的y_2值为a_2, …以及被测量的y_n值为a_n的概率,由概率计算的乘法规则,则可给出

$$P=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\frac{1}{\sigma_1}\frac{1}{\sigma_2}\cdots\frac{1}{\sigma_n}\cdot e^{-(1/2)\left[\left(\frac{a_1-y_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{a_2-y_2}{\sigma_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_n-y_n}{\sigma_n}\right)^2\right]}$$
$$\cdot da_1 da_2\cdots da_n。$$

这个等式可以写成更加简单的形式$P=L da_1 da_2\cdots da_n$，这里用L标记似然函数:

$$L=[1/\sqrt{2\pi}]^n(1/\sigma_1)(1/\sigma_2)\cdots(1/\sigma_n)\exp[-S/2],$$

其中的表达式S通常叫做误差平方和,或简称平方和:

$$S=\sum_{i=1}^{n}[(a_i-y_i)/\sigma_i]^2=\sum_{i=1}^{n}[\varepsilon_i/\sigma_i]^2。$$

$$\boxed{S=\sum_{i=1}^{n}[(a_i-y_i)/\sigma_i]^2\to\text{极小}}$$

高斯的最小二乘原理，极大似然原理 如果量y_1, …, y_n是要测量的,而其测量值a_1, …, a_n是已知的,量y_1, …, y_n的精确值仍然未知，按照高斯的说法，假如对于它们来说测量a_1, …, a_n以最大的概率出现，那末对y_1, …, y_n的值作估计是似乎可能的。因此以这样的方式来确定

$y_1, \cdots, y_n$，使当用所得的测量值来替代 $a_1, \cdots, a_n$ 时其概率 P 取到极大。这样得出的 $y_1, \cdots, y_n$ 值也就叫做对于被测数量的最大可能估计。如果概率 P 取得极大，那末似然函数 L 也一定为极大。因此这一估计原理也称为极大似然原理，而由它给出的 $y_1, \cdots, y_n$ 估计值叫做极大似然估计。一旦平方和 S 取极小，则似然函数 L 确实取到极大。这样，由极大似然原理对于被测数量 $y_1, \cdots, y_n$ 的估计值是以如下方式确定：使得误差的平方和成为极小。这就是最小二乘法，它由高斯发展用来从一组包含误差的观测中估计出精确值，更加确切地就应当说这是最小的误差平方和方法。这一方法形成整个数据调节(或磨光)计算的基础。应用这种方法观测误差或多或少地被磨去了一些。

最小二乘法实施 如果量 $y_1, \cdots, y_n$ 完全不同并且它们之间不存在任何关系，那末最小二乘法将导致解 $y_i=a_i(i=1, \cdots, n)$，就是说每一个量由它的单独一个观测值来估计且平方和 S 严格等于零。这不可能有什么测量值的调节。这种情况实际上是几乎不出现的。通常，或者量 $y_1, \cdots, y_n$ 具有相同的值，不过这个值被反复测量而已；或者它们之间存在某种关系。在后一情况下(它包括前者)只有较少的未知量 $t_1, t_2, \cdots, t_k(k<n)$，量 $y_1, \cdots, y_n$ 可用它们来表达，$y_i=f_i(t_1, \cdots, t_k)$，例如 $y_i=c_{i1}t_1+\cdots+c_{ik}t_k(i=1, \cdots, n)$。通常有可能用线性方程的形式来表示，其中的系数 $c_{i\rho}(\rho=1, \cdots, k)$ 为已知的；例如一个量被测量 n 次，而只有单独一个未知量 t，于是方程变为 $y_1=t, y_2=t, \cdots, y_n=t$。

正规方程 如果未知量的个数比测量的次数 n 少，那末就有多余的测量。在误差平方和 S 中，量 $y_i(i=1, \cdots, n)$ 也用未知量 $t_1, \cdots, t_k$ 来表示，进而形成 S 关于这些未知量的偏导数。为了确定 S 的极小，令这些导数等于零，这就产生了对于 $t_1, \cdots, t_k$ 的一个方程组，即所谓的正规方程，从而解出未知量 $t_1, \cdots, t_k$。用这些解再算出被测数量 $y_1, \cdots, y_n$ 的估计。通常将被测数量的最大似然估计写为 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_n$，以区别于未知值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$。类似地，由正规方程给出的 $t_1, \cdots, t_k$ 值记为 $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \cdots, \hat{t}_k$。对于特殊问题未知量 $t_1, \cdots, t_k$ 往往选取别的更加适当的字母。如果函数 $f_i(t_1, \cdots, t_k)$ 是线性的，那末正规方程也形成对于 $t_1, \cdots, t_k$ 的一个线性方程组。不过，若函数 $f_i(t_1, \cdots, t_k)$ 非线性，则正规方程的解可能相当困难。于是须将此问题线性化。首先对于 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 取初步的近似值 $N_{t_1}, N_{t_2}, \cdots, N_{t_k}$。设 $t_1=N_{t_1}+\delta t_1$，$t_2=N_{t_2}+\delta t_2$，$\cdots$，$t_k=N_{t_k}+\delta t_k$。

将函数 $f_i(t_1, \cdots, t_k)$ 展开成泰勒级数再将线性项以后的统统截去：

$$f_i(t_1, \cdots, t_k)=f_i(N_{t_1}, \cdots, N_{t_k})+\frac{\partial f_i}{\partial t_1}\delta t_1+\frac{\partial f_i}{\partial t_2}\delta t_2+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial t_k}\delta t_k,\quad 这里\ i=1, \cdots, n。$$

现在只要用最小二乘法来确定未知的校正量 $\delta t_1, \cdots, \delta t_k$。

平均误差和误差传播律

个别测量　测量的准确性是由出现在误差分布律中的标准偏差 σ 来说明的。常常不用 σ 而引进量 $h=1/(\sigma\sqrt{2})$ 作为一种*准确性测度*。从高斯误差律可以发现观测误差的数量在误差界限 0.674σ 范围内的概率是 50%，而小于 $1\cdot\sigma$ 的概率是 68.3%。在数据调节中 σ 叫做*平均误差*，而 0.67σ 或更确切地 0.674σ 叫做*概然误差*。

平均误差	σ
概然误差	0.674σ

若干测量　如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的测量值，$h_i=1/(\sigma_i\sqrt{2})$ 是每一个测量的准确性测度，那末对于误差平方和就有

$$S=\sum_{i=1}^{n}[(a_i-y_i)/\sigma_i]^2=2\sum_{i=1}^{n}h_i^2(a_i-y_i)^2=2\sum_{i=1}^{n}h_i^2\varepsilon_i^2。$$

加权测量　个别误差 ε_i 对于形成和并不是作出同等贡献的。在形成 S 的时候，如果一个测量具有较大的准确性 h_i，则对它的误差平方就要乘上一个比具有较小准确性的测量相应的误差平方为大的权。可以直接对每一个个别测量附上一个权 p_i，它说明观测误差 ε_i 相对于别的测量在多大程度上进入误差平方和的计算。这些权一定与它们相应的准确性测度的平方成比例，即 $p_1:p_2:\cdots:p_n=h_1^2:h_2^2:\cdots:h_n^2$。作为比值，它们是一些纯数，并且由准确性测度 h_i 来确定时可以相差一个任意的常数因子。若选此因子使对准确性 h 附上的权 $p=1$，则 $p_i:1=h_i^2:h^2$，或者说 $h_i^2=p_ih^2$，$i=1, \cdots, n$。对于具有相同准确性的测量通常对每一个测量附上权 $p_i=1(i=1, \cdots, n)$。因为一个测量的平均误差 σ_i 可以从准确性 h_i 用公式 $\sigma_i=1/(h_i\sqrt{2})$ 算出来，$\sigma=1/(h\sqrt{2})$ 给出了权 $p=1$ 的个别测量的平均误差。写出 $h_i=h\sqrt{p_i}$ 就得到 $\sigma_i=\sigma/\sqrt{p_i}$，$i=1, \cdots, n$，因此从权为 1 的个别测量的平均误差 σ 可以算出带有任意权 p_i 的个别测量的平

均误差。利用权 p_i 及权 $p=1$ 的个别测量的平均误差 σ，误差平方和 S 就取上面的形式。

平均误差	$\sigma_i=\dfrac{\sigma}{\sqrt{p_i}}$
误差平方和	$S=(1/\sigma^2)\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(a_i-y_i)^2$

绝对误差线性组合的标准偏差　对于高斯误差律

$$\varphi(\varepsilon)=1/(\sigma\sqrt{2\pi})\cdot\exp[-(1/2)(\varepsilon/\sigma)^2],$$

有下面的三个积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=1$；　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=0$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=\sigma^2$。

(1)和(3)与概率论有关，(2)是因被积函数为奇函数的缘故。若观测误差 ε 是两个独立的个别误差 ε_1 和 ε_2 的线性组合 $\varepsilon=c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2$，其中 c_1 和 c_2 是常数，则利用这三个积分可以证明在 ε 的标准偏差 σ 与 ε_1 和 ε_2 相应的标准偏差 σ_1 和 σ_2 之间成立下边列出的关系。

$\sigma^2=c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2$

应用概率论的乘法定律，第一个观测误差落在微分区间 $(\varepsilon_1,\varepsilon_1+d\varepsilon_1)$ 内，同时第二个误差落在区间 $(\varepsilon_2,\ \varepsilon_2+d\varepsilon_2)$ 内的概率是 $\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2$。因此利用积分(3)和(2)，$\varepsilon$ 的标准偏差 σ 给出为

$$\begin{aligned}\sigma^2&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2\varphi(\varepsilon)d\varepsilon=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2)^2\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\\&=c_1^2\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon_1^2\varphi_1(\varepsilon_1)d\varepsilon_1+c_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon_2^2\varphi_2(\varepsilon_2)d\varepsilon_2\\&\quad+2c_1c_2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon_1\varphi_1(\varepsilon_1)d\varepsilon_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon_2\varphi_2(\varepsilon_2)d\varepsilon_2\right)\\&=c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2。\end{aligned}$$

这个结果可以推广为：

如果观测误差 ε 可以表示为 n 个独立的个别误差 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_n$（它们的标准偏差分别是 $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n$）的线性组合 $\varepsilon=c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\cdots+$

$c_n\varepsilon_n$ (其中 c_i 是常数)；那末 ε 的标准偏差 σ 给出为

$$\sigma^2=c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+\cdots+c_n^2\sigma_n^2。$$

误差传播律　若要计算量 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 $y=f(x_1, \cdots, x_n)$，又若对于 $x_1, \cdots, x_n$ 只有测量值 $a_1, \cdots, a_n$ 可以利用，它们的正当误差为 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$，则（参见误差计算）$y$ 的正当误差 ε 不计 ε_i 的高次幂给出为表达式

$$\varepsilon=\frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n。$$

结果的正当误差 ε 可以表示为 ε_i 的线性形式。通过上面的讨论可以得出 ε 的标准偏差 σ 可以从正当误差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的标准偏差 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 用高斯误差传播律来计算。因为 ε 的标准偏差 σ 相应于结果的平均误差，而标准偏差 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 是测量值 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的平均误差，所以高斯误差传播律是借助于初始数据的平均误差来给出结果的平均误差。

高斯误差传播律	$\sigma=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_n^2}$

平均值的平均误差　当函数是量 $x_1, \cdots, x_n$ 的平均值，$y=\bar{x}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ 时，误差传播律采取特别简单的形式。因为 $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{1}{n}$，所以得到 $\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{n^2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2)$。又若量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的测量值 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 具有相同的准确性，则 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_n^2=\sigma_x^2$ 从而得出

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\sigma_x^2/n,\ \sigma_{\bar{x}}=\sigma_x/\sqrt{n}。$$

具有相等准确性的 n 次测量平均值的平均误差等于单个测量平均误差除以 $\sqrt{n}$。

观测的平均误差估计　一般地说，个别测量的平均误差 σ_i 在测量过程中是不知道的，只是将权 p_i 归于量 $y_1, \cdots, y_n$ 的测量 $a_1, \cdots, a_n$ 而已。于是就面临一个从可以利用的观测值 $a_1, \cdots, a_n$ 估计个别测量的平均误差问题。因为从具有权 $p=1$ 的一个测量的平均误差 σ 借助于公式 $\sigma_i=\sigma/\sqrt{p_i}$ 可确定具有权 p_i 的个别测量的平均误差 σ_i，所以只要估计平均误差 σ 就够了。用 m 来表示这一估计。

如果被测数量 $y_1, \cdots, y_n$ 可以用 $k<n$ 个未知量 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 严格地

表述，那末用数学统计的方法能得出对于σ的一个估计m。量$\hat{y}_i(i=1,\cdots,n)$是被测数量$y_1,\cdots,y_n$的极大似然估计。

对权 $p=1$ 的个别测量估计的平均误差	
$m=\sqrt{\frac{1}{n-k}\left[\sum_i^n p_i(a_i-\hat{y}_i)^2\right]}$	p_i 为测量的权，a_i 为测量值，$\hat{y}_i$ 为调节的测量值，$n-k$ 为多余的测量数

在调节中，通常就用m来记权$p=1$的个别测量的平均误差，并用$0.674m$来记概然误差，虽然m只是对于σ的一个估计，它本身可能受到随机变化。这些变化会相当大，特别当观测的次数n小的时候是如此。因而在用对于平均误差的估计m来替代σ时从高斯误差律造成的有关正当观测误差界限的命题只是大致正确的。数学统计表明了如何借助于m达到对于正当观测误差的严格界限。为了描述测量的准确度，总是要说出权$p=1$的个别观测的(估计)平均误差m。用下边给出的公式，从m可以得到权为p_i的个别测量的平均误差。

权为 p_i 的个别测量的平均误差	$m_i=m/\sqrt{p_i}$

这一公式相应于公式$\sigma_i=\sigma/\sqrt{p_i}$。借助于高斯误差传播律也就能够计算由观测值$a_1,\cdots,a_n$形成的每一个量的平均误差。如果有必要，还可以从这些平均误差得出正当观测误差以指定的概率不会超出的那个界限。

直接测量的调节

一个量y以同样的准确性直接测量n次，设测量值为$a_1,a_2,\cdots,a_n$。在这个测量过程中只有单独一个未知量$y(k=1)$。由此成立方程$y_1=y$，$y_2=y,\cdots,y_n=y$。对于同等准确性的个体测量来说，这些测量具有相同的权$p_1=p_2=\cdots=p_n=1$。误差平方和及其关于未知量y的导数给出为

$$S=(1/\sigma^2)\sum_{i=1}^n(a_i-y)^2;\quad \frac{dS}{dy}=-(2/\sigma^2)\sum_{i=1}^n(a_i-y)。$$

这个导数等于零就得出正规方程$\sum_{i=1}^n(a_i-y)=0$，解出y就给出了估计值$\hat{y}$。

个别测量的平均值用来作为被测量的量的一个估计值。

由同等准确性的直接测量作出的估计值	$\hat{y}=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n=\bar{a}$

被测数量的逼近给出 $y\approx\hat{y}(\pm m_{\hat{y}})$ 或 $y=\hat{y}+m_{\hat{y}}$；对此估计的平均误差 $m_{\hat{y}}$ 是从个别测量的平均误差应用关系 $m_{\hat{y}}=m/\sqrt{n}$ 计算出来的。

对于同等准确性测量，个体测量的平均误差	$m=\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2\right]/(n-1)}$
估计值的平均误差	$m_{\hat{y}}=\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2\right]/[n(n-1)]}$

【例】 五个小学生每人测量一个模型立方体的棱长 y。由测量的结果(见表)得出估计值

测　量　结　果		
$a_1=12.2$英寸	$a_2=12.1$英寸	$a_3=12.5$英寸
$a_4=12.3$英寸	$a_5=12.4$英寸	

$$\hat{y}=[(12.2+12.1+12.5+12.3+12.4)/5]\text{英寸}=12.3\text{ 英寸。}$$

个体测量的平均误差为

$$m=\sqrt{\left\{\begin{matrix}[(12.2-12.3)^2+(12.1-12.3)^2+(12.5-12.3)^2\\+(12.3-12.3)^2+(12.4-12.3)^2]/4\end{matrix}\right\}}\text{英寸}$$

即 $m=0.158$ 英寸。

这就给出了对于 $\hat{y}$ 的平均误差 $m_{\hat{y}}=0.158/\sqrt{5}=0.071$ 英寸，因而立方体棱长的估计值 $y\approx12.3$ 英寸(±0.071 英寸)或 $y\approx(12.3\pm0.071)$ 英寸。

不等准确性直接测量的调节　一个量 y 直接测量 n 次，设测量值为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。因为测量的不等准确性，它们必定取不同的权 $p_1, p_2, \cdots, p_n$。在这个测量过程中只有单独一个未知量 $y(k=1)$ 从而成立关系 $y_1=y, y_2=y, \cdots, y_n=y$。如果形成误差平方和 S，关于 y 微分，再使这个导数等于零 就得到正规方程

$$S=(1/\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-y)^2\to\frac{dS}{dy}=-(2/\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-y)=0$$

$$\to\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-y)=0,$$

由此可以找出估计值 $\hat{y}$。

具有权 p_i 的个体测量的带权平均用来作为被测数量的一个估计值。

权 $p=1$ 的个体测量的平均误差	$m=\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-\hat{y})^2\right]\quad(n-1)}$
由不等准确性的直接测量作出的估计值	$\hat{y}=\left(\sum_{i=1}^{n}p_i a_i\right)\quad\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)$

需要带 $p=1$ 的个体测量的平均误差 m，是为了易于计算其他有关量的平均误差。例如由它可以找出权 p_i 的个体测量 a_i 的平均误差 $m_i=m/\sqrt{p_i}$。再者，它还可用来按照误差传播律计算出对于估计值 $\hat{y}$ 的平均误差 m。因为 $\frac{\partial\hat{y}}{\partial a_i}=\frac{p_i}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$，由此得出

$$m_{\hat{y}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[m_i^2p_i^2\quad\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^2\right]}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[m^2p_i\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^2\right]}。$$

由不等准确性测量作出的估计值的平均误差
$m_{\hat{y}}=m\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_i}$

被测数量的近似值可以给出 $y\approx\hat{y}(\pm m_{\hat{y}})$ 或 $y=\hat{y}\pm m_{\hat{y}}$。

【例】　长度 l 先测量五次，然后以更高的准确性测量三次。因为更加准确的测量过程缘故，第二组的测量值 $a_6,\ a_7,\ a_8$（见表）必须给予第一组权的五倍。所以 $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=1$，而 $p_6=p_7=p_8=5$。对于 l 的估计 $\hat{l}$ 给出为

$$\hat{l}=12.34\text{ 英寸}=1/20[1\cdot(12.35+12.40+12.25+12.30+12.35)+5(12.37+12.32+12.34)]\text{英寸。}$$

$a_1=12.35$ 英寸
$a_2=12.40$ 英寸
$a_3=12.25$ 英寸
$a_4=12.30$ 英寸
$a_5=12.35$ 英寸
$a_6=12.37$ 英寸
$a_7=12.32$ 英寸
$a_8=12.34$ 英寸

由于

$$[0.01^2+0.06^2+0.09^2+0.04^2+0.01^2+5(0.03^2+0.02^2+0^2)]=0.0200$$

以及　$\sqrt{0.0200/7}=0.0535$，

个体测量的平均误差 m 就具有计算值 $m=0.0535$ 英寸。因为 $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=1$，所以第一组测量的平均误差同时为 $m_1=0.0535$ 英寸，第二组测量的平均误差给出为 $m_2=m/\sqrt{5}$ 时 $=0.0239$ 英寸。

估计值的平均误差为 $m_l=m/\sqrt{20}$ 英寸$=0.0120$ 英寸。因此从所求长度 l 的近似值测量算得 $l\approx 12.34$ 英寸(± 0.012 英寸)。

如果测量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的平均误差 σ_i 本身为已知的，而它们的权 p_i 未知，那末通过比率

$$p_1:p_2:\cdots:p_n=(1/\sigma_1^2):(1/\sigma_2^2):\cdots:(1/\sigma_n^2),$$

可以将 p_i 确定到上下一个常数因子的程度。这个因子可以这样选取：或者 $p_1, \cdots, p_n$ 是易于处理的数，或者 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$。用 λ^2 记此任意因子，则 $p_i=\lambda^2/\sigma_i^2$，权 $p=1$ 的观测的平均误差为 $\sigma=\sigma_i\sqrt{p_i}=\lambda$。所以若从观测值及其规定的权算出了 m，这个结果必定近似等于 λ，因为 m 是 σ 的一个估计值。而如果 m 和 λ 相差很大，那末可以得出这样的结论：在某些测量中出现了系统误差。

观测的调节

条件观测　通过测量来确定三角形的角 α, β, γ，每一个角要反复测量。角 α 的测量值为 $a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}$ (n_1 次测量)；角 β 的测量值为 $b_1, b_2\cdots, b_{n_2}$ (n_2 次测量)，角 γ 的测量值为 $c_1, c_2, \cdots, c_{n_3}$ (n_3 次测量)，总起来进行了 $n=n_1+n_2+n_3$ 次测量。个体测量是按同等准确性做的。再用 $y_1, y_2, \cdots, y_{n_1}$ (α 的测量)，$y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \cdots, y_{n_1+n_2}$ (β 的测量)，$y_{n_1+n_2+1}, y_{n_1+n_2+2}, \cdots, y_{n_1+n_2+n_3}$ (γ 的测量)来记要由测量确定的量的精确值，于是借助于未知量 α, β, γ 可以将这些量表达为

$$y_1=y_2=\cdots=y_{n_1}=\alpha,$$
$$y_{n_1+1}=y_{n_1+2}=\cdots=y_{n_1+n_2}=\beta,$$
$$y_{n_1+n_2+1}=y_{n_1+n_2+2}=\cdots=y_{n_1+n_2+n_3}=\gamma。$$

误差平方和为

$$S=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(a_i-\alpha)^2+\sum_{j=1}^{n_2}(b_j-\beta)^2+\sum_{k=1}^{n_3}(c_k-\gamma)^2\right]。$$

然而最小二乘法不能立刻应用，因为未知量 α, β, γ 要服从某个条件。三角形内角之和为 $180°$，由此 α, β, γ 必须满足条件方程

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=\alpha+\beta+\gamma-180°=0。$$

在完成观测的调节时，要考虑这个条件。这种情况称为条件观测的调节。严格地说，这里出现的不是三个未知量，而仅是两个未知量。因为若 α 和 β 已经确定下来，γ 的值能从条件方程得出。可以有两种方式处理这种情况；或者利用条件方程 $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=0$，借助于其中的两个角来表示另外一只角，譬如 γ，将 γ 的表达式代入和式 S 中然后再应用最小二乘法；

或者直接确定在附加条件 $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=0$ 之下 S 的极小值。在这样做的时候，利用拉格朗日乘数法(参见 II. 第 6 章第 4 节-多元函数的极值)；就是说，要确定 α, β, γ 和 λ 使得表达式

$$T=S+\lambda\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(a_i-\alpha)^2+\sum_{j=1}^{n_2}(b_j-\beta)^2+\sum_{k=1}^{n_3}(c_k-\gamma)^2\right]+\lambda(\alpha+\beta+\gamma-180°)$$

取极小值。量 λ 是属于边条件的拉格朗日乘数。于是正规方程为

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha}=\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(a_i-\alpha)+\lambda=0; \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma}=\frac{2}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n_3}(c_k-\gamma)+\lambda=0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta}=\frac{2}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_2}(b_j-\beta)+\lambda=0; \quad \frac{\partial T}{\partial \lambda}=\alpha+\beta+\gamma-180°=0。$$

这些正规方程的解为

$$\hat{\alpha}=\bar{a}-K/n_1; \quad \hat{\beta}=\bar{b}-K/n_2; \quad \hat{\gamma}=\bar{c}-K/n_3; \quad \hat{\lambda}=2K/\sigma^2;$$

其中校正量 $K=(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-180°)/(1/n_1+1/n_2+1/n_3)$。象通常那样，个体测量的平均误差得自

$$m^2=\left[\sum_{i=1}^{n_1}(a_i-\hat{\alpha})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(b_j-\hat{\beta})^2+\sum_{k=1}^{n_3}(c_k-\hat{\gamma})^2\right]\Big/(n-2)。$$

对于估计值 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ 的平均误差按误差传播律给出为

$$m_{\hat{\alpha}}=(m/n_1)\sqrt{n_1-1/(1/n_1+1/n_2+1/n_3)};$$

$$m_{\hat{\beta}}=(m/n_2)\sqrt{n_2-1/(1/n_1+1/n_2+1/n_3)};$$

$$m_{\hat{\gamma}}=(m/n_3)\sqrt{n_3-1/(1/n_1+1/n_2+1/n_3)}。$$

【例】 角 α, β, γ 分别测量 4, 3, 4 次即 $n_1=4$, $n_2=3$, $n_3=4$ (见表)，并且平均值 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ 已算出。因为 $1/(1/n_1+1/n_2+1/n_3)=1.2$ 以及 $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-180°=3''$，所以校正量 K 给定为 $K=3''\cdot 1.2=3.6''$，由此算

角 α	$a_i-\hat{\alpha}$	角 β	$b_j-\hat{\beta}$	角 γ	$c_k-\hat{\gamma}$
$a_1=62°17'14''$	$+0.9''$	$b_1=73°20'25''$	$+1.2''$	$c_1=44°22'25''$	$+1.9''$
$a_2=62°17'11''$	$-2.1''$	$b_2=73°20'27''$	$+3.2''$	$c_2=44°22'26''$	$+2.9''$
$a_3=62°17'16''$	$+2.9''$	$b_3=73°20'23''$	$-0.8''$	$c_3=44°22'22''$	$-1.1''$
$a_4=62°17'15''$	$+1.9''$			$c_4=44°22'23''$	$-0.1''$
$\bar{a}=62°17'14''$		$\bar{b}=73°20'25''$		$\bar{c}=44°22'24''$	
$\hat{\alpha}=62°17'13.1''$		$\hat{\beta}=73°20'23.8''$		$\hat{\gamma}=44°22'23.1''$	

出估计 $\hat{\alpha}=n-K/4$, $\hat{\beta}=\bar{b}-K/3$ 和 $\hat{\gamma}=\bar{c}-K/4$。

个体测量的平均误差为

$$m=\sqrt{\left\{\begin{matrix}[(0.9^2+2.1^2+2.9^2+1.9^2)+(1.2^2+3.2^2+0.8^2)\\ +(1.9^2+2.9^2+1.1^2+0.1^2)]/9\end{matrix}\right\}}''$$
$$=2.181''。$$

由此得到平均误差

$$m_{\hat{\alpha}}=m\cdot 0.418=0.912''; \quad m_{\hat{\beta}}=m\cdot 0.447=0.975'';$$
$$m_{\hat{\gamma}}=m\cdot 0.418=0.912''。$$

从测量算出这三个角的近似值为

$$\alpha\approx 62°17'13.1''(\pm 0.91''); \quad \beta\approx 73°20'23.8''(\pm 0.97'');$$
$$\gamma\approx 44°22'23.1''(\pm 0.91'')。$$

上面例子中表述的方法广泛适用于条件观测的调节。若要测量的量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 可借助于 k 个未知量 $t_1, \cdots, t_k$ 来表示,又若这些未知量满足 r 个独立的条件方程

$$\varphi_1(t_1, \cdots, t_k)=0; \ \varphi_2(t_1, \cdots, t_k)=0; \cdots; \ \varphi_r(t_1, \cdots, t_k)=0,$$

则确定未知量 $t_1, \cdots, t_k$ 以及拉格朗日乘数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 使表达式

$$T=S+\lambda_1\varphi_1(t_1, \cdots, t_k)+\cdots+\lambda_r\varphi_r(t_1, \cdots, t_k)$$

具有极小值。剩下的计算步骤重又完全使用最小二乘法。因为有 r 个条件方程,所以实际上不存在 k 个未知量,而只需从观测确定 $k-r$ 个未知量。这一有效数目的未知量在计算个体测量的平均误差 m 时取权 $p=1$。

间接观测的调节　往往要确定的量并不为直接测量所能达到,例如,要确定物体的密度,而能测量到的是它的重量 G 和它的容积 V; G 和 V 就是对于确定密度的间接观测。在数据调节的意义下,间接观测的兴趣不在于找出被测数量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的精确值,而在于确定可用 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 来表示的未知量 $t_1, t_2, \cdots, t_k$。最小二乘法再次产生未知量的估计值 $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \cdots, \hat{t}_k$。从个体观测的平均误差 m,利用误差传播律可以算出估计 $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \cdots, \hat{t}_k$ 的平均误差。

【例】 一个金银合金的戒指,为了确定其中金的重量和银的重量,这个戒指用弹簧秤测重若干次,在空气中为 G 以及在水中为 W(见表)。设 g_1 记金的重量,g_2 为银的重量,ρ_1 和 ρ_2 分别为金和银的

重　　量	
在空气 G 中	在水 W 中
$a_1=4.01$ g	$b_1=3.72$ g
$a_2=3.98$ g	$b_2=3.72$ g
$a_3=4.03$ g	$b_3=3.69$ g
$a_4=4.02$ g	

密度:

$$G=g_1+g_2;\quad W=(1-1/\rho_1)g_1+(1-1/\rho_2)g_2。$$

误差平方和为

$$S=(1/\sigma^2)\left\{\sum_{i=1}^{4}(a_i-g_1-g_2)^2+\sum_{j=1}^{3}[b_j-(\rho_1-1)g_1/\rho_1-(\rho_2-1)g_2/\rho_2]^2\right\}。$$

这导致正规方程:

$$\frac{\partial S}{\partial g_1}=-(2/\sigma^2)\left\{\sum_{i=1}^{4}(a_i-g_1-g_2)+\sum_{j=1}^{3}[b_j-(\rho_1-1)g_1/\rho_1-(\rho_2-1)g_2/\rho_2](\rho_1-1)/\rho_1\right\}=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial g_2}=-(2/\sigma^2)\left\{\sum_{i=1}^{4}(a_i-g_1-g_2)+\sum_{j=1}^{3}[b_j-(\rho_1-1)g_1/\rho_1-(\rho_2-1)g_2/\rho_2](\rho_2-1)/\rho_2\right\}=0。$$

由此给出估计值:

$$\hat{g}_1=-\bar{a}\rho_1(\rho_2-1)/(\rho_1-\rho_2)+\bar{b}\rho_1\rho_2/(\rho_1-\rho_2);$$

$$\hat{g}_2=+\bar{a}\rho_2(\rho_1-1)/(\rho_1-\rho_2)-\bar{b}\rho_1\rho_2/(\rho_1-\rho_2);$$

$$\bar{a}=1/4\sum_{i=1}^{4}a_i;\quad \bar{b}=1/3\sum_{j=1}^{3}b_j;$$

$$\hat{G}=\hat{g}_1+\hat{g}_2;$$

$$\hat{W}=(1-1/\rho_1)\hat{g}_1+(1-1/\rho_2)\hat{g}_2。$$

个体测量的平均误差为

$$m=\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{4}(a_i-\bar{a})^2+\sum_{j=1}^{3}(b_j-\bar{b})^2\right]/(7-2)}。$$

因为 $\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial a_i}=-1/4\cdot\rho_1\cdot(\rho_2-1)/(\rho_1-\rho_2)$ 以及 $\frac{\partial\hat{g}_2}{\partial b_j}=1/3\cdot\rho_1\rho_2/(\rho_1-\rho_2)$,

误差传播律给出

$$m_{\hat{g}_1}=m\sqrt{(1/4)\cdot\rho_1^2(\rho_2-1)^2/(\rho_1-\rho_2)^2+(1/3)\rho_1^2\rho_2^2/(\rho_1-\rho_2)^2};$$

$$m_{\hat{g}_2}=m\sqrt{(1/4)\rho_2^2(\rho_1-1)^2/(\rho_1-\rho_2)^2+(1/3)\rho_1^2\rho_2^2/(\rho_1-\rho_2)^2}。$$

用 $\rho_1=19.3\,g/cm^3$ 和 $\rho_2=10.5\,g/cm^3$, 数值计算给出:

$$\bar{a}=4.01\,g;\quad \bar{b}=3.71\,g;\quad \hat{g}_1=1.89\,g;\quad \hat{g}_2=2.12\,g;$$

$$m=0.02\,g;\quad m_{\hat{g}_1}=16.89\,m=0.34\,g;\quad m_{\hat{g}_2}=17.20\,m=0.34\,g。$$

通过测量给出的重量为

$$g_1\approx1.89\,g(\pm0.34\,g)\quad 以及\quad g_2\approx2.12\,g(\pm0.34\,g)。$$

关系的调节

一个量 y 与它所依赖的一个自变量 x 之间的关系常常给定为线性方程的形式 $y=\alpha+\beta x$。取变量 x 的不同值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 来观测量 y，因此要通过个体测量加以确定的量的精确值为

$$y_i=\alpha+\beta x_i \quad (i=1, \cdots, n)。$$

再设测量值为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为它们所具有的权。因为变量 x 的值 $x_1, \cdots, x_n$ 是给定的，α 和 β 在测量过程中还只是未知的。可以用数据的调节来求 α 和 β 的估计值。正如间接观测的情况那样，目的不在于找出精确值 y_i，而在于确定未知的 α 和 β。因为在线性方程中未知量出现作为常量，所以称为*常量估计*。量 β 叫做*回归系数*。

在应用最小二乘法时，仍从误差平方和开始：

$$S=(1/\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-y_i)^2=(1/\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-\alpha-\beta x_i)^2。$$

S 关于未知量 α 和 β 的偏导数等于零，这导出正规方程

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=-(2/\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-\alpha-\beta x_i)=0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta}=-(2/\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-\alpha-\beta x_i)x_i=0。$$

采用高斯的记号，正规方程为

$$\alpha[p]+\beta[px]=[pa],\ \alpha[px]+\beta[px^2]=[pax]。$$

高斯的记号	$\sum_{i=1}^{n}z_i=[z]$
回归方程中 α 和 β 的估计值	$\hat{\alpha}=\frac{[pa]}{[p]}-\hat{\beta}\frac{[px]}{[p]}$; $\hat{\beta}=\frac{[pax][p]-[pa][px]}{[px^2][p]-[px]^2}$

从这些方程可以求出未知量 α 和 β 的估计值 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$。从此又可计算出对于量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 精确值的估计值 $\hat{y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i (i=1, \cdots, n)$。权 $p=1$ 的个体测量的平均误差给出为

$$m=\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-\hat{y}_i)^2\right]/(n-2)},$$

因为两个未知量是从观测来加以确定的。于是 $m_i=m/\sqrt{p_i}$ 是权为 p_i 的

测量的平均误差。借助于误差传布律就算出

$$m_{\hat{\alpha}}=m\frac{1}{[p]}\sqrt{[p]+\frac{[p][px]^2}{[p][px^2]-[px]^2}}\doteq m\sqrt{\frac{[px^2]}{[p][px^2]-[px]^2}},$$

$$m_{\hat{\beta}}=m\sqrt{\frac{[p]}{[p][px^2]-[px]^2}}。$$

【例】 对于十个不同年代的松树种植场确定出树干的平均直径 x 和平均高度 y。根据 x 的数量大小次序列出了测量值(见表)，它们有相同的准确性($p_i=1$; $i=1, 2, \cdots, 10$)。直径和高度之间联系的点图表示了 y 对于 x 的依赖性(见图 15.2-1)。这个关系借助于线性方程 $y=\alpha+\beta x$ 来描述。

测量值，x 以厘米计，y 以米计

i	x_i	y_i
1	10.6	8.6
2	14.0	11.5
3	18.1	12.4
4	23.2	15.6
5	25.0	15.1
6	26.4	17.7
7	30.5	18.9
8	32.5	18.6
9	36.6	21.3
10	40.1	24.3

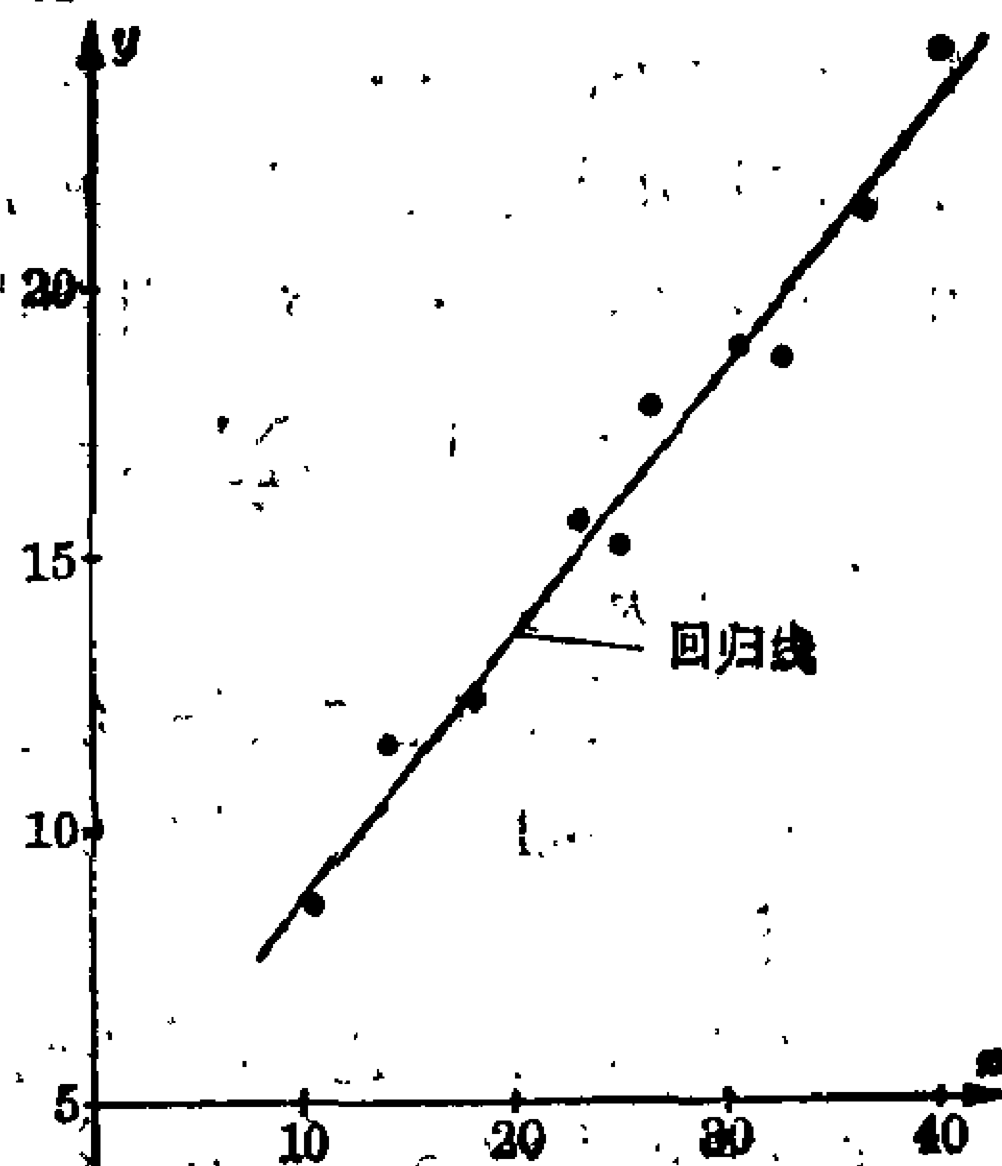


图 15.2-1 十个松树种植场平均高度相对于平均直径的点图；回归线 $\hat{y}=3.837+0.4888x$

从测量值计算出

$$[p]=10;\ [px]=257.0;\ [pa]=164.0;$$
$$[px^2]=7430.24;\ [pxa]=4618.26。$$

由此得出

$$\hat{\beta}=(4618.26\cdot 10-164.0\cdot 257.0)/(7430.24\cdot 10-257.02)$$
$$=0.4888;$$

$$\hat{\alpha}=164.0/10-\hat{\beta}\cdot 257.0/10=3.837。$$

图中画出了回归线 $\hat{y}=3.837+0.4888x$。进一步的计算给出

$$\sum_{i=1}^{10}p_i(a_i-\hat{y}_i)^2=5.1522,$$

且个体测量的平均误差为 $m=0.8025$。由此求出 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 的平均误差为 $m_{\hat{\alpha}}=0.7614$ 和 $m_{\hat{\beta}}=0.0279$。

非线性关系的调节 一个量 y 可以线性地依赖于几个变量 $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_k$。于是 y 的表示为

$$y=\beta_0z_0+\beta_1z_1+\beta_2z_2+\cdots+\beta_kz_k。$$

为了确定回归系数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$，量 y 按它所依赖的不同值 $z_{0i}, z_{1i}, z_{2i}, \cdots, z_{ki}(i=1, \cdots, n)$ 作测量。于是通过个体测量确定之量的精确值为

$$y_i=\beta_0z_{0i}+\beta_1z_{1i}+\beta_2z_{2i}+\cdots+\beta_kz_{ki} \quad (i=1, \cdots, n)。$$

设测量值为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，并设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为它们所具有的权。如果测量的次数 n 大于未知量的个数 $k+1$，那末多余的测量还可加以利用。未知量 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 可用数据调节的方法来确定。从误差平方和

$$S=(1/\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-\beta_0z_{0i}-\beta_1z_{1i}-\cdots-\beta_kz_{ki})^2$$

出发，得出正规方程

$$\begin{aligned}
&\beta_0[pz_0^2]+\beta_1[pz_0z_1]+\beta_2[pz_0z_2]+\cdots+\beta_k[pz_0z_k]=[paz_0]\\
&\beta_0[pz_1z_0]+\beta_1[pz_1^2]+\beta_2[pz_1z_2]+\cdots+\beta_k[pz_1z_k]=[paz_1]\\
&\vdots\\
&\beta_0[pz_kz_0]+\beta_1[pz_kz_1]+\beta_2[pz_kz_2]+\cdots+\beta_k[pz_k^2]=[paz_k]。
\end{aligned}$$

解出这些方程求出 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_k$。用这些值可以算出被测数量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 精确值的估计值 $\hat{y}_i=\hat{\beta}_0z_{0i}+\hat{\beta}_1z_{1i}+\cdots+\hat{\beta}_kz_{ki}(i=1, \cdots, n)$。权 $p=1$ 的个体测量平均误差给出为

$$m=\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}p_i(a_i-\hat{y}_i)^2\right]/(n-k-1)}。$$

借助于 m 可以按通常的方式算出权为 p_i 的个体测量平均误差并应用误差传布律找出估计值 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_k$ 的平均误差。

如果量 y 可以表达为 x 的多项式

$$y=\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots+\beta_kx^k,$$

那末在 y 与它所依赖的变量 x 之间存在一个非线性关系。这是上面讨论的多个变量线性依赖关系的特殊情况。为此只要令

$$z_0=1,\ z_1=x,\ z_2=x^2,\ \cdots,\ z_k=x^k,$$

$$z_{0i}=1,\ z_{1i}=x_i,\ z_{2i}=x_i^2,\ \cdots,\ z_{ki}=x_i^k \quad (i=1, \cdots, n),$$

进而按照已经给出的公式确定 $\hat{\beta}_0, \cdots, \hat{\beta}_k$ 以及平均误差。

【例】 在具有不同平均树干直径 d 的几个松林场里，观测了在地面之上1.30米高的每一种树干平均木材总量 V(见表)。确定木材总量 V_i 的工作是以同等准确性进行的。V 和 d 之间的关系借助于一条三次抛物线来调节。为了简化计算，引进一个新的自变量 $x=(d-30)/5$。量 V 表示为三次方程 $V=\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\beta_3x^3$，它的系数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 通过观测数据的调节来加以确定。误差平方和为

$$S=(1/\sigma^2)\sum_{i=1}^{9}(V_i-\beta_0-\beta_1x_i-\beta_2x_i^2-\beta_3x_i^3)^2。$$

i	观测		计算	
	d_i(cm)	V_i(m^3)	x_i	$\hat{V}_i$(m^3)
1	10	0.030	−4	0.031
2	15	0.094	−3	0.093
3	20	0.213	−2	0.210
4	25	0.388	−1	0.390
5	30	0.643	0	0.645
6	35	0.987	+1	0.986
7	40	1.426	+2	1.424
8	45	1.969	+3	1.969
9	50	2.632	+4	2.632

正规方程具有形式

$$9\cdot\beta_0+[x]\beta_1+[x^2]\beta_2+[x^3]\beta_3=[V],$$

$$[x]\beta_0+[x^2]\beta_1+[x^3]\beta_2+[x^4]\beta_3=[xV],$$

$$[x^2]\beta_0+[x^3]\beta_1+[x^4]\beta_2+[x^5]\beta_3=[x^2V],$$

$$[x^3]\beta_0+[x^4]\beta_1+[x^5]\beta_2+[x^6]\beta_3=[x^3V]。$$

从观测数据计算出

$$[x]=0, \quad [x^2]=60, \quad [x^3]=0,$$

$$[x^4]=708, \quad [x^5]=0, \quad [x^6]=9780,$$

$$[V]=8.382,\quad [xV]=19.058,$$
$$[x^2V]=69.090,\quad [x^3V]=227.456。$$

正规方程的解给出为

$$\hat{\beta}_0=0.64540,\quad \hat{\beta}_1=0.296348,$$
$$\hat{\beta}_2=0.042890,\quad \hat{\beta}_3=0.0018039。$$

因此抛物回归曲线为

$$V=0.64540+0.296348[(d-30)/5]$$
$$+0.042890[(d-30)/5]^2$$
$$+0.0018039[(d-30)/5]^3。$$

调节值 $\hat{V}_i$ 显示在表中。

函数用一些较为简单的函数来表示

最小二乘法在数学中不仅适用于观测的调节。例如，若要对一个复杂函数 $y=f(x)$ 找出用较为简单的函数 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_k(x)$ 的一个逼近，就可借助于最小二乘法确定线性表达式 $y=f(x)=\beta_0\varphi_0(x)+\beta_1\varphi_1(x)+\cdots+\beta_k\varphi_k(x)$ 中的系数 β_0, β_1, …, β_k。

如果函数 $y=f(x)$ 只知道在离散点 $x_i(i=1, 2, \cdots, n;\ n>k)$ 上的值 $y_i=f(x_i)$，那末从偏差的平方和着手:

$$S=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\beta_0\varphi_0(x_i)-\beta_1\varphi_1(x_i)-\cdots-\beta_k\varphi_k(x_i)]^2。$$

另一方面，如果已知在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上函数 $y=f(x)$ 的全过程，那末就从偏差平方的积分着手:

$$S=\int_a^b[f(x)-\beta_0\varphi_0(x)-\beta_1\varphi_1(x)-\cdots-\beta_k\varphi_k(x)]^2\,dx。$$

在两种情况下，系数 β_0, …, β_k 都是以这样的方式来确定的: 即 S 取极小值。将和 $\sum_{i=1}^{n}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$ 或积分 $\int_a^b\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx$ 记为 $[\varphi_j\varphi_k]$，将和 $\sum_{i=1}^{n}y(x_i)\varphi_k(x_i)$ 或积分 $\int_a^b y(x)\varphi_k(x)\,dx$ 记为 $[y\varphi_k]$，就得到正规方程:

$$\beta_0[\varphi_0^2]+\beta_1[\varphi_0\varphi_1]+\beta_2[\varphi_0\varphi_2]+\cdots+\beta_k[\varphi_0\varphi_k]=[y\varphi_0],$$
$$\beta_0[\varphi_1\varphi_0]+\beta_1[\varphi_1^2]+\beta_2[\varphi_1\varphi_2]+\cdots+\beta_k[\varphi_1\varphi_k]=[y\varphi_1],$$
$$\vdots$$
$$\beta_0[\varphi_k\varphi_0]+\beta_1[\varphi_k\varphi_1]+\beta_2[\varphi_k\varphi_2]+\cdots+\beta_k[\varphi_k^2]=[y\varphi_k]。$$

从这个线性方程组算出 $\beta_0, \cdots, \beta_k$。若 $[\varphi_i\varphi_k]$ 当 $i\neq k$ 时值为 0，而当 $i=k$ 时值为 1，则正规方程的解具有特别简单的形式，其解为 $\beta_i=[y\varphi_i]$。当函数 $\varphi_k(x)$ 形成一个直交(标准正交)函数系的时候就出现这种情况。著名的直交函数系是三角函数 $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi(n=0, 1, 2, 3, \cdots)$ 以及勒让德多项式。

15.3 逼近理论

可以这样说，近似值的各种各样计算都属于逼近论。不过在比较严格的意义下，将逼近论理解为一定的数学过程，它能用较为简单的计算来代替复杂计算。必须接受一个事实，就是按这种方式得到的不是精确解，而只是近似解。一方面，这些近似方法用来节省计算工作量。另一方面，对于许多数学问题只有借助于近似方法才能获得数值解；例如一个给定的积分，它不能用闭合形式表达，那末其数值就只能求助于近似方法。已经研究出了许多不同类型数学问题的近似过程。每一个近似过程必须有一个由于应用它而产生的误差的估计值。

计算函数值的近似方法

全部数值计算都是在加、减、乘、除四个基本运算的领域内发生的。如果要计算一个比较复杂的数学函数 $f(x)$，就必须将它表示成只应用这四个基本运算的那种形式。通常借助于幂级数展开来做到这一点(见 **II**. 第 8 章)。

对于大的自变量值的渐近表示 如果要对于大的自变量值计算函数 $F(x)$ 的值，一种可能性是通过将 $z=1/x$ 代入函数进而将 $f(z)=F(1/z)$ 展开为 $z=1/x$ 的泰勒级数，得到一个近似公式。因为 z 非常小，所以一般地说展开可以限于少数几项。另一种可能性是对于 $F(x)$ 定出一个渐近表示或渐近展开。如果 $\lim\limits_{x\to\infty}[F(x)-\varphi(x)]=0$，则函数 $\varphi(x)$ 称为 $F(x)$ 的渐近表示，写为 $F(x)\sim\varphi(x)$。若写成 $F(x)=\varphi(x)+R(x)$，则余项 $R(x)$ 必须满足 $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=0$。如果 $F(x)=\varphi(x)[1+r(x)]$，其中 $\lim\limits_{x\to\infty}r(x)=0$，亦即如果对于大的 x 值而言商 $F(x)/\varphi(x)$ 趋于 1，则常将这样的一个函数 $\varphi(x)$ 也叫做 $F(x)$ 的渐近表示：$F(x)\sim\varphi(x)$。

高斯误差积分的渐近展开 对于高斯误差积分，应用两次分部积分得

$$\Phi(x)=[1/\sqrt{2\pi}]\int_{-\infty}^{x}\exp[-t^2/2]dt=1-[1/\sqrt{2\pi}]\int_{x}^{\infty}\exp[-t^2/2]dt$$

$$=1-[1/\sqrt{2\pi}]\left\{(1/x)\exp[-x^2/2]-\int_{x}^{\infty}(1/t^2)\exp[-t^2/2]dt\right\}$$

$$=1-[1/\sqrt{2\pi}]\left\{(1/x)\exp[-x^2/2]-(1/x^3)\exp[-x^2/2]\right.$$

$$\left.+\int_{x}^{\infty}(3/t^4)\exp[-t^2/2]dt\right\}。$$

用前三项就已找到一个好的渐近表示

$$\Phi(x)\sim 1-[1/\sqrt{2\pi}]\{(1/x)\exp[-x^2/2]-(1/x^3)\exp[-x^2/2]\}。$$

余项　　$R_3(x)=-[1/\sqrt{2\pi}]\int_{x}^{\infty}(3/t^4)\exp[-t^2/2]dt$

可以估计为

$$|R_3(x)|\leqslant[1/\sqrt{2\pi}](3/x^5)\int_{x}^{\infty}t\exp[-t^2/2]dt$$

$$=[1/\sqrt{2\pi}](3/x^5)\exp[-x^2/2]。$$

当 $x\to\infty$ 时它趋于零，即使对于 $x=2$，渐近表示的误差亦已小于 $5\cdot10^{-3}$。

欧拉求和公式　如果要求作出渐近表示的函数 $F(x)$ 可以表示成和式 $F(x)=f(1)+f(2)+\cdots+f(x-1)+f(x)$，其中 $f(z)$ 为一个给定的函数而 x 是一个正整数，那末从欧拉求和公式可以获得它的一个渐近表示。

欧拉求和公式	$F(x)=\int_1^x f(t)dt+\frac{1}{2}[f(x)+f(1)]$ $+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(x)-f^{(2k-1)}(1)]+R_n(x)$

在这个公式中 B_{2k} 是伯努利数，开头 n 个为 $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, $B_8=-1/30$, $B_{10}=5/66$, $B_{12}=-691/2730$（见 II. 第8章）。余项可以估计为 $|R_n(x)|\leqslant[4/(2\pi)^{2n}]\int_1^x|f^{(2n)}(t)|dt$。如果当 $x\to\infty$ 时 $R_n(x)$ 趋于零，那末在欧拉求和公式中略去余项就得到 $F(x)$ 的渐近表示。而如果当 $x\to\infty$ 时 $R_n(x)$ 趋于某个极限 c_n，那末在欧拉求和公式中用极限 c_n 代替 $R_n(x)$ 就得到一个渐近展开。

阶乘函数 $x!$ 的渐近表示　取 $x!$ 的自然对数，就有

$$F(x)=\ln x!=\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln x。$$

在欧拉求和公式中只保留到一阶导数项($n=1$)，就得到

$$F(x)=\int_1^x \ln t\,dt+(1/2)(\ln x+\ln 1)+(1/6)(1/2)(1/x-1)+R_1(x)$$
$$=x\ln x-x+\ln x/2+1/(12x)+1-1/12+R_1(x)。$$

余项 $R_1(x)$ 可以估计为 $|R_1(x)|\leqslant(1/\pi^2)(1-1/x^2)$。更为精确的研究给出 $\lim\limits_{x\to\infty} R_1(x)=c_1=1/12-1+\ln\sqrt{2\pi}$。在欧拉求和公式中用这个极限来替代 $R_1(x)$，就获得渐近表示

$$F(x)\approx(x+1/2)\ln x-x+1/(12x)+\ln\sqrt{2\pi}。$$

由此得出
$$x!=e^{F(x)}\approx\sqrt{2\pi x}\,x^x\exp[-x+1/(12x)]。$$

对于非常大的 x 值，指数中的项 $1/(12x)$ 可以略去，于是得到斯特林(Stirling)公式。

斯特林公式	$x!\approx\sqrt{2\pi x}\,x^x e^{-x}$

函数用多项式逼近

如果对于函数 $y=f(x)$ 已知在自变量 $x=x_0$, $x=x_1$, …, $x=x_n$ 处的函数值，那末这些点称为*基础点*，而相应的函数值 $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, …, $y_n=f(x_n)$ 称为*基础值*。问题是对位于相邻两个基础点之间的任意 x 值计算其函数值 $y=f(x)$。若精确地定出 $y=f(x)$ 包含着大量的计算，那就试图用所谓的内插法从已知的函数值 y_0, y_1, …, y_n 来近似地计算出所要求的函数值 y。

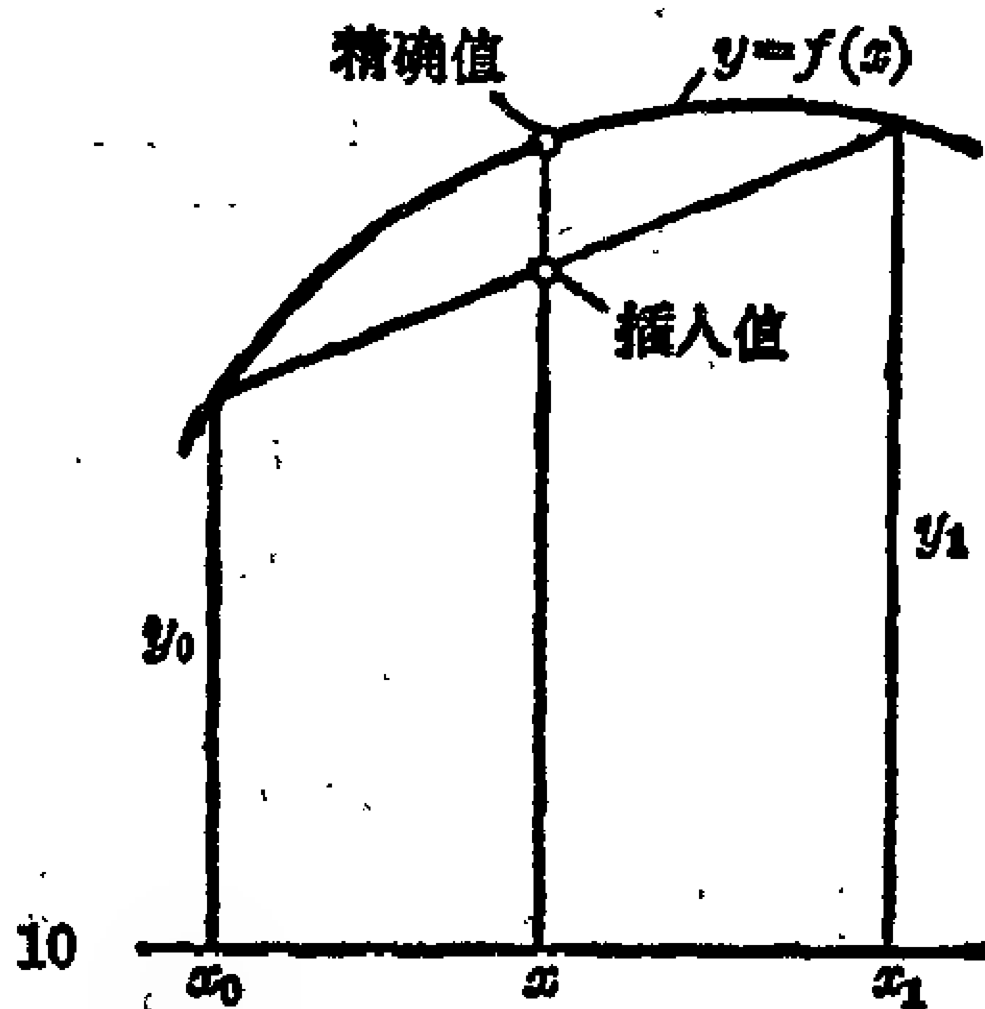


图 15.3-1 两个基础点之间的线性内插

线性内插 对于角函数或对数，当确定位于表中给出的数值之间的函数值时，我们就熟悉了最简单的内插过程。表中给出的数值是基础值，而所要求的值通常用*线性内插*来找到。为此只需要两个基础点 x_0 和 x_1 及其基础值 $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$。值 $y=f(x)$ 是要求的，这里 $x_0<x<x_1$。用线性内插从比率 $(y-y_0)/(x-x_0)=(y_1-y_0)/(x_1-x_0)$ 找出值 $y=y_0+(x-x_0)(y_1-y_0)/(x_1-x_0)$。这样，在区间 (x_0, x_1) 内函数 $y=f(x)$ 的曲线段就替代为通过点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1)

的直线逼近(见图 15.3-1)。

广泛意义下的内插 一般地说，所有的内插法都在于将基础点 x_0, x_1, …, x_n 邻域内的函数 $y=f(x)$ 替代为比较简单的函数，而它对于这个邻域内的函数 $y=f(x)$ 为尽可能最好的逼近。确定这种近似函数的一个方法就是最小二乘法。在别的一些过程中，傅立叶分析和数据调节也是建立在它之上的。如果为了说明近似函数而须确定的参数要比可以利用的基础点为少，那末就能应用它们。以这种方式确定的近似函数一般地并不正好通过已知的基础值 (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n)。

严格意义下的内插 下面我们将内插法理解为对于 $y=f(x)$ 它所作出的近似函数在基础点 x_0, x_1, …, x_n 上正好取基础值 y_0, y_1, …, y_n。因为多项式是最简单的可以利用的函数，所以就试图在 x_0, x_1, …, x_n 的邻域内找一个对于函数 $y=f(x)$ 的多项式逼近。由代数知道，正好有一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 通过 $n+1$ 个给定点 (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n)。这个多项式就选作对于 $y=f(x)$ 的一个近似函数。有几种不同的方法来确定它。它们全都导致同一个多项式 $P_n(x)$；虽然它们的外部形式不同，但这只是不同内插方法之间的差异。

多项式形式。 如果多项式写成 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，其中 a_0, a_1, …, a_n 为未定的系数，条件是多项式要通过点 (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n)，那末必须满足下边列出的方程。这是为了确定 a_0, a_1, …, a_n 的 $n+1$ 个方程。如果基础点 x_0, x_1, …, x_n 全不相同，那末它们就具有唯一的解。

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n\\
y_1 &= a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n\\
&\vdots\\
y_n &= a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n
\end{aligned}$$

【例】 函数 $y=\sqrt{x}$ 用一个通过点 $(x_0=1, y_0=1)$, $(x_1=1.21, y_1=1.1)$ 和 $(x_2=1.44, y_2=1.2)$ 的二次多项式来逼近。设 $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$。从右边列出的方程找出 $a_0=0.4099$, $a_1=0.6842$, $a_2=-0.0941$。在内插多项式 $y=\sqrt{x}\approx 0.4099+0.6842x-0.0941x^2$ 中代入值 $x=1.3$ 给出 $\sqrt{1.3}\approx 1.1403$。$\sqrt{1.3}$ 的精确值为 1.140175。

$$\begin{aligned}
1.0 &= a_0+a_1+a_2\\
1.1 &= a_0+1.21a_1+1.4641a_2\\
1.2 &= a_0+1.44a_1+2.0736a_2
\end{aligned}$$

这是在平方表中反内插的一个简单例子。虽然在这个方法中所采取的形式是非常简单的，但内插多项式的最后确定需要很大的计算量，特别地，若有大量基础点要考虑在内的话更是如此。由于这个原因，拉格朗日和牛顿选取与多项式 $P_n(x)$ 稍为不同的形式，从而达到计算起来比较简单的公式。

拉格朗日内插多项式 拉格朗日对于逼近多项式取作

$$P_n(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+\cdots+L_n(x)y_n,$$

其中基础值 y_i 的系数 $L_i(x)$ 是 x 的 n 次多项式。它们是单单从基础点 $x_j(j=0, 1, \cdots, n)$ 计算出来的，并且在这些点上取值 $L_i(x_j)$。如果多项式 $L_i(x)$ 能按这样的方式来确定：$L_i(x_j)$ 当 $i=j$ 时具有值1，而当 $i\neq j$ 时具有值0。那末多项式逼近 $P_n(x)$ 肯定正好通过点(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，$\cdots$，(x_n, y_n)。由拉格朗日定义的多项式满足这个条件。

拉格朗日内插多项式及拉格朗日多项式
$y=f(x)\approx P_n(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+\cdots+L_n(x)y_n$ $L_i(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$； $i=0, 1, \cdots, n$

如果值 $x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$ 之一代入 x，那末分子总是刚好有一个因子为零；而当 $x=x_i$ 时分子等于分母。将这些多项式引进 $P_n(x)$ 中就获得拉格朗日内插多项式。

【例】 借助于拉格朗日内插法，对于函数 $y=\sqrt{x}$ 确定出通过点$(x_0=1, y_0=1)$，$(x_1=1.21, y_1=1.1)$，$(x_2=1.44, y_2=1.2)$ 的抛物线逼近，从下边列出的拉格朗日多项式

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1.21)(x-1.44)}{0.0924}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1.0)(x-1.44)}{-0.0483}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1.0)(x-1.21)}{0.1012}$$

得到逼近多项式为

$$P_2(x)=(x-1.21)(x-1.44)(1.0/0.924)$$
$$-(x-1.0)(x-1.44)(1.1/0.483)$$
$$+(x-1.0)(x-1.21)(1.2/0.1012);$$
$$P_2(x)=(x-1.21)(x-1.44)\cdot 10.8225$$
$$-(x-1.0)(x-1.44)\cdot 22.7743$$
$$+(x-1.0)(x-1.21)\cdot 11.8577。$$

多项式已经能够以这种形式用于数值计算。乘出括号并把 x 的同次幂并项，重又得到前面定出过的多项式 $P_2(x)=0.4099+0.6842x-0.0941x^2$。

牛顿内插多项式　如果利用拉格朗日公式已经确定了通过基础点 (x_0, y_0)，(x_1, y_1)，…，(x_n, y_n)的 n 次多项式，现在再添上一个基础点 (x_{n+1}, y_{n+1})，要确定通过所有这 $n+2$ 个基础点的 $n+1$ 次多项式逼近，那末在应用拉格朗日公式时整个计算要重新从头做起。所有的拉格朗日多项式 $L_0(x)$，$L_1(x)$，…，$L_n(x)$ 必须重作计算。另一方面，对于**牛顿内插法**来说，在这种情况下只须添上一个附加项。这个方法的出发点是对于多项式逼近取作

$$P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+b_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})。$$

系数 b_0，b_1，…，b_n 是按这样的方式确定出来的：该多项式通过点 (x_0, y_0)，(x_1, y_1)，…，(x_n, y_n)。将值 x_0，x_1，…，x_n 代入牛顿公式中的 x 处，就得到**阶梯方程组**

$$y_0=b_0$$
$$y_1=b_0+b_1(x_1-x_0)$$
$$y_2=b_0+b_1(x_2-x_0)+b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$
$$\vdots$$
$$y_n=b_0+b_1(x_n-x_0)+b_2(x_n-x_0)(x_n-x_1)+\cdots$$
$$+b_n(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})。$$

这个方程组可以一步一步地解出 b_0，b_1，…，b_n。利用所谓差商（见 II. 第16章），以 $b_0=y_0$ 为开头，可给出各个系数 b_i 的公式。

从第二、第三及以后的方程一步一步地得出：

$$b_1=(y_1-y_0)/(x_1-x_0)=[x_1x_0];$$

$$y_2=y_0+[x_1x_0](x_2-x_0)+b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

或 $$[x_2x_0]=[x_1x_0]+b_2(x_2-x_1),$$

最后有 $$b_2=[x_2x_1x_0],\ \cdots,\ b_k=[x_kx_{k-1}\cdots x_1x_0]。$$

将这些系数代入所采取的公式中去就获得牛顿内插多项式。

牛顿内插多项式	$y=f(x)\approx y_0+[x_1x_0](x-x_0)+[x_2x_1x_0](x-x_0)\times(x-x_1)+\cdots+[x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1x_0](x-x_0)\times(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

如果考虑再加一个基础点$(x_{n+1},\ y_{n+1})$，那末只要在已经算出的多项式中添进一项 $[x_{n+1}x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1x_0](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，就获得了一个通过所有点 $(x_0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$，$\cdots$，$(x_n,\ y_n)$，$(x_{n+1},\ y_{n+1})$ 的 $n+1$ 次多项式。

在牛顿公式中用的是递减差商(见 II. 第16章第2节)。然而，在推导公式时基础点取成次序 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 不是实质性的。如果它们依任意次序 $x_{i_0},\ x_{i_1},\ \cdots,\ x_{i_n}$ 排列，并应用上面描述的过程，那末就得到一般形式下的牛顿内插多项式。

$$y=f(x)\approx P_n(x)=y_{i_0}+(x-x_{i_0})[x_{i_1}x_{i_0}]+(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})[x_{i_2}x_{i_1}x_{i_0}]+\cdots+(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})\cdots(x-x_{i_{n-1}})[x_{i_n}x_{i_{n-1}}\cdots x_{i_1}x_{i_0}]$$

将基础点排列成次序 $x_n,\ x_{n-1},\ \cdots,\ x_1,\ x_0$，就得

$$\begin{aligned}y=f(x)\approx P_n(x)&=y_n+(x-x_n)[x_{n-1}x_n]\\&+(x-x_n)(x-x_{n-1})[x_{n-2}x_{n-1}x_n]+\cdots\\&+(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)[x_0x_1\cdots x_n]。\end{aligned}$$

这个公式用的是递增差商(在下表中双重划线)。公式也可按这样的方式排列，(在下表中部)用中心差商来形成多项式逼近。不管选取哪一种形式来表示，总是获得唯一确定的 n 次多项式通过点$(x_0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$，$\cdots$，$(x_n,\ y_n)$。

【例】 为了借助于牛顿内插法确定对于函数 $y=\sqrt{x}$ 通过点$(x_0=1,\ y_0=1)$，$(x_1=1.21,\ y=1.1)$，$(x_2=1.44,\ y_2=1.2)$ 的抛物线逼近，首先来计算差商。

$x_{i+2}-x_i$	$x_{i+1}-x_i$	x_i	y_i	Δ	$[x_{i+1}x_i]$	Δ	$[x_2x_1x_0]$
	0.21	1	1	0.1	0.476190		
0.44		1.21	1.1			−0.041408	−0.0941
	0.23	1.44	1.2	0.1	0.434782		

当用递减差商时，牛顿内插多项式为

$$P_2(x)=1+(x-1)\cdot 0.476190-(x-1)(x-1.21)\cdot 0.0941;$$

而用递增差商时，它是

$$P_2(x)=1.2+(x-1.44)\cdot 0.434782-(x-1.44)(x-1.21)\cdot 0.0941;$$

用中心差商则为

$$P_2(x)=1.1+(x-1.21)\cdot 0.434782-(x-1.21)(x-1.44)\cdot 0.0941。$$

把包含 x 相同幂次的项合并在一起，所有这三种情况都导致前面已经定出了的多项式

$$P_2(x)=0.4099+0.6842x-0.0941x^2。$$

等距基础点　如果基础点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是等距的（间隔 h），那末通过点 $(x_0, y_0), \cdots, (x_n, y_n)$ 的牛顿内插多项式

$$P_n(x)=y_0+(x-x_0)[x_1x_2]+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots\times(x-x_{n-1})[x_nx_{n-1}\cdots x_1x_0]$$

中差商就可由简单的差分来表达，这时令 $x=x_0+th$（见 II. 第16章）。在那里引进的表格中，此处所用的差分位于从左落到右的对角线上。

用递减差分的牛顿内插公式
$$P_n(x_0+th)=y_0+t\Delta^1 y_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_1+\cdots+\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_{n/2}$$

还可考虑基础点 $x_{-1}=x_0-h$, $x_{-2}=x_0-2h$, $\cdots x_{-n}=x_0-nh$ 并确定通过点 (x_0, y_0), (x_{-1}, y_{-1}), $\cdots$, (x_{-n}, y_{-n}) 的牛顿内插多项式，得到

$$P_n(x)=y_0+(x-x_0)[x_0x_{-1}]+(x-x_0)(x-x_{-1})[x_0x_{-1}x_{-2}]+\cdots+(x-x_0)(x-x_{-1})\cdots(x-x_{-n+1})[x_0x_{-1}\cdots x_{-n}]。$$

在这个多项式中差商同样可用简单的差分来代替。

用递增差分的牛顿内插公式

$$P_n(x_0-th)=y_0+t\Delta^1 y_{-1/2}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\cdots+\frac{t(t+1)(t+2)\cdots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_{-n/2}$$

最后，基础点可以排成交替序列 $x_0,\ x_1,\ x_{-1},\ x_2,\ x_{-2},\ x_3,\ \cdots$。相应的牛顿内插多项式为

$$P_n(x)=y_0+(x-x_0)[x_1x_0]+(x-x_0)(x-x_1)[x_1x_0x_{-1}]+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})[x_2x_1x_0x_{-1}]+\cdots。$$

依照可以利用的基础点数是偶 $(n=2k)$ 还是奇 $(n=2k+1)$，多项式的末项为

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_{k-1})[x_kx_{k-1}\cdots x_0\cdots x_{-k+1}]$$

或 $$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_k)[x_kx_{k-1}\cdots x_0\cdots x_{-k+1}x_{-k}]。$$

如果差商用寻常的差分来替代，则得高斯内插公式。

高斯内插公式

$$P_n(x_0+th)=y_0+t\Delta^1 y_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t+1)}{3!}\Delta^3 y_{1/2}+\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_0+\cdots$$

这使用了差分格式里靠近中部的那些差分。还有第二个高斯公式，其中的基础点排列次序为 $x_0,\ x_{-1},\ x_1,\ x_{-2},\ x_2,\ \cdots$。斯特林(Stirling)、拉普拉斯、贝塞尔、埃弗里特(Everett)等人曾经给出别的内插公式，它们是由基础点的不同选取以及由牛顿公式和高斯公式的适当组合而得来的。

表内插

若基础点 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ 按大小次序排列 $x_0<x_1<\cdots<x_n$，又若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0,\ x_n)$ 内用通过点 $(x_0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$，$\cdots$，$(x_n,\ y_n)$ 的 n 次内插多项式来代替，则逼近误差由余项 R_{n+1} 来确定。

$$R_{n+1}(x)=f(x)-P_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)[y^{n+1}(\xi)/(n+1)!]$$

一般地说，量 ξ 是区间 (x_0, x_n) 内的一个未知值。例如，要用线性内插来确定自变量位于两个表值 x_0 和 x_0+h(h 为表的间隔) 之间 x 处的函数值 $y=f(x)$，那末内插误差为 $R_2(x)=(x-x_0)(x-x_0-h)y''(\xi)/2$。乘积 $(x-x_0)(x-x_0-h)$ 在 $x=x_0+h/2$ 处具有它的最大绝对值，因此内插误差可估计为 $|R_2(x)|\leqslant(h^2/8)|y''(x)|$，其中须代入在区间 (x_0, x_1) 上 $|y''(x)|$ 的最大值。在 k 位数表中用内插，其内插误差应不超过第 k 位的半个单位。由此得出：

在间隔为 h 的 k 位数表中，若 $(h^2/8)|y''(x)|<0.5\cdot 10^{-k}$，则允许作线性内插。

【例】 $\lg\sin x(0°\leqslant x\leqslant 45°)$ 的五位数表有间隔 $h=0.01°$，因为 $y''(x)=-M/\sin^2 x$，其中 $M=\lg e$，所以 x 必须满足不等式 $(h^2/8)(M/\sin^2 x)<0.5\cdot 10^{-5}$，这里 h 化为弧度计算。由此得出 $\sin x>0.01819$。当 $x>1.04°$ 时满足这个条件，因此在这个表中当 $x>1°$ 时可以作线性内插。

如果表中不允许线性内插，那末就得应用高次内插公式。在这些内插公式中，若基础点选取得使内插发生在所取基础点围成区域的中间附近，则能达到由余项定出的内插误差相当小。利用中心差分的一些内插公式，诸如高斯内插公式，可以达到这个要求。而如果必须在表头或者表尾作内插，中心差分就不能利用了，这时又回复到带有递减差分或者递增差分的牛顿内插公式。

第16章 数值分析

数学在它的严格意义下对其数量命题使用实数连续统和复数连续统，以及基于这个数系之上的数之间或如向量、矩阵等对象之间的关系。**在数值数学**中所有的命题都必须借助于有理数来完成，而且通常在使用数字计算机时必须借助于仅仅有限多位小数来完成。因此在数值分析中为形成一个数学问题的求解过程需要提出一个模式，而这就会引起舍入误差和过程误差。

16.1 引言

舍入误差是在将一个给定过程中出现的实数映射到许可的有理数范围情况下发生的。在实行映射时，不仅问题的初始数据，而且还有每一步计算后的中间结果都会失真。**过程误差**之所以出现，是因为每一个超越运算必须由诸如加、减、乘和除等可以实现的运算组成的一个有限链来替代。如果模式过程的数量结果与精确过程的结果仅仅相差一个指定的小量，则模式过程是**数值稳定**的。

数值过程的准确度估计 估计数值过程的准确度是一个非常重要的实际问题，但不是容易解决的。它的解在很大程度上依赖于所讨论的问题类型。在应用中首先要区别两类问题：逼近一个能用公式来表述的数学对

象，以及逼近一个已知它存在但只能用测量来近似地确定的数学对象。

对于由公式给出的数学对象的准确度问题 数、向量、函数、泛函和算子是由公式给出的数学对象。数、向量或函数被看作空间的点并用序列或与之相当地用关于坐标元素 e_i 及分量 c_i 的级数 $x=\sum_{i=0}^{\infty}c_ie_i$ 来逼近。

在数值分析中这种类型的每一个*展开*必须在有限多步逼近后予以截断，就是说代替 x 而满足于逼近 $x^*=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i$。属于这个问题的有两个*质量准则* Q_1 和 Q_2: $Q_1=n$ 为展开长度的度量，Q_2 是逼近密切性的度量，例如对于数来说有 $|x-x^*|$，或者对于函数来说有 $\sup|x(t)-x^*(t)|$。

感兴趣的是要使 Q_1 和 Q_2 都尽可能地小。然而，Q_1 小与 Q_2 小是互相矛盾的。如果系数 c_i 是由某个确定的规则，例如由泰勒级数展开计算出来的，那末对于给定的 $Q_1=n$ 就没有 Q_2 回旋的余地，Q_2 被所要逼近的元素 x 固定下来。但 Q_2 仍是未知的，因此实际上只得满足于 Q_2 的一个准确度估计，例如级数展开中的余项估计。

更加有趣的是 c_i 并非由某个确定的规则得出，而是对于给定的 $Q_1=n$ 要确定 c_i 使得 Q_2 成为极小的这种情况。这种确定规则表示一个*最优展开过程*。在这种情况下通常寻找这样的规则，使 $Q_{2\min}(n)$ 是一个单调减少函数。

如果考虑正交级数展开，其坐标元素 e_i 在一个适当的矩量运算 M 下满足正交性要求：当 $i\neq j$ 时 $M(e_ie_j)=0$，并且如果选取 $Q_2=M[(x-x^*)(x-x^*)]$ 作为逼近的度量，那末就是对于给定的 n 要求寻找值 c_i 保证 Q_2 极小。对此得到 $c_i=M(xe_i)/M(e_ie_i)$，而极小值为

$$Q_{2\min}=M(xx)-\sum_{i=1}^{n}M(xe_i)^2/M(e_ie_i)。$$

显然 $Q_{2\min}$ 是 n 的单调减少函数。对于数项级数取矩量运算 $M(xy)=x\cdot y$，对于向量级数取数量积 $M(xy)=(x,\ y)$，对于随机变量取期望值运算，对于函数则取函数空间中的数量积 $M(xy)=\int_a^b x(t)y(t)p(t)dt$。在由公式给出泛函或运算的情况下，准确度估计之困难在于给定运算的一个逼近要对广泛的一组原始元素 y 产生与该运算几乎相同的效果。

如果对于给定的运算（泛函或算子），关系 $x=Fy$ 成立，那末对于近似运算 F^* 就得到相应的关系 $x^*=F^*y$。通常的过程是用一定的线性基

础运算 f_i 的线性组合 $F^*=\sum_{i=0}^{n}c_if_i$ 来逼近 F。这里能够用类似展开元素 x 的那种方式进行；困难只在于必须用适当的方式消除对 y 的依赖性。通过对 y 作一个附加的平均或通过矩量方法可以达到这一点，此时要使 $\sup_{y\in Y}M((x-x^*)^2)$ 为极小。然而这里遇到了象切比晓夫逼近（即用一致收敛的级数逼近函数）同样性质的困难。

必须通过测量来近似表示的数学对象准确度问题　测量总是提供关于所要确定的对象的不完全信息。因此必然会想到从测量产生数学对象尽可能最优的逼近。在对于某一组原始元素 y_i 的测量 x_i 基础上，包含极值搜索在内的问题或逼近一个运算 F 的问题常常就是这种情况。

在这些问题中必须区别两个阶段，*获悉阶段*和*奏效阶段*。在获悉阶段，从属于效果准则的测量进行到一定的程度。从这些测量的结果，必须在尽可能最优的方式下，通常借助于*参数估计*，来决定数学对象的逼近。然后期望值运算 M 将所得的测量值变成对参数 c_i 的估计 c_i^*。除了效果的度量 Q_1 和用运算 M 形成的逼近度量 Q_2 之外，现在加进一个度量 Q_3，它在选择为导致测量值而作的试验基础上估计 c_i^* 的随机性。

联系到这一点，如果企图以这样的方式进行试验，使由估计值 c_i^* 所引进的随机误差尽可能小，就称之为*实验设计*。奏效阶段具有外推的特征。这时在任意的允许条件下应用具有估计值 c_i^* 的数学对象模式。如果从获悉阶段所得到的 $Q_{2\min}$ 中出现强偏差，那末可尝试通过往后的获悉阶段来一步一步地改进目前所达到的模式。这个过程对于数值分析的统计方法，例如对于*回归分析*具有特殊的意义。在特殊情况下序贯过程也能予以最优化。然而在这种情况下准确度问题通常就取消了。开始以 $Q_{2\min}$ 作为一个中断限值，用若干个获悉阶段来组织序贯过程，使得总的试验次数 N 尽可能地少。这样，在实验过程中除了前述几个准则外，次数 N 加入进来作为另一个准则。准则 Q_1，Q_2，Q_3 和 Q_4 是相互依存的，一般地说这对于解决问题的过程是重要的；例如 Q_1 的增加会使 Q_2 减少而使 Q_3 和 Q_4 增加。

数的表示　在以 $q>0$ 为基的*位置系统*中，实数 z 表示如下：

$$z=\pm(a_kq^k+a_{k-1}q^{k-1}+\cdots+a_0q^0+a_{-1}q^{-1}+a_{-2}q^{-2}+\cdots)。$$

这里每一个数 a_i 为非负整数 0, 1, …, $q-1$ 中的一个，其间 q 的指数 $l\geqslant 0$，为*整数部分*，而 $l<0$ 则为*小数部分*。在数字计算机中只能表示字长 L

的数，即负幂的最大次数为 L 的数。对于**浮点表示**使用正则形式

$$z=\pm q^{e}(b_{-1}q^{-1}+b_{-2}q^{-2}+\cdots+b_{-L}q^{-L}),\quad \text{其中} b_{-1}\neq 0。$$

例如拿 $q=10$ 来说，数 -36.12 表示为

$$-10^{2}(3\cdot 10^{-1}+6\cdot 10^{-2}+1\cdot 10^{-3}+2\cdot 10^{-4})=-10^{2}\cdot 0.3612。$$

在这种情况下，指数 e 通常在 $-L$ 和 $+L$ 之间变化，并且也在基为 q 的位置系统中加以表示。自动计算机可以避免使用负指数，代替在正则形式下的外界数，采用内部数 $z'=\pm q^{e+L}(b_{-1}q^{-1}+\cdots+b_{-L}q^{-L})$，它的指数由于量 L 而大为提高。对于给定的 e，$2\cdot(q^{L}-1)$ 个数的等距格点就能加以实现，它的格子距离为 q^{e-L}。所有可实现的数的总体为 $-L\leqslant e\leqslant +L$。基本的算术运算可能会导致偏离允许数的范围。一旦基 q 被采纳，就可以表述数 $z=\pm a_{k}a_{k-1}\cdots a_{0}a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-L}$ 的序列或由指数 e 及其正则小数部分所组成的数的序列。

除了 $q=10$ 的**十进制系统**外，还采用别的位置系统。$q=2$ 的**二进制系统**对于只有两个物理状态的计算机来说具有优越性。通过**转换**可以将一个数从它的 q-表示 $z[q]=a_{k}q^{k}+a_{k-1}q^{k-1}+\cdots+a_{0}q^{0}$ 变为 p-表示 $z[p]=b_{l}p^{l}+b_{l-1}p^{l-1}+\cdots+b_{0}p^{0}$，办法是 $z[q]$ 除以 $p[q]$。从 $z[p]$ 可以看出，它给出一个整数 g_{1} 和一个小数部分 $r_{1}/p[q]$，在 $z[p]$ 表示中的 $b_{0}p^{-1}$ 就对应于它，所以 $r_{1}=b_{0}$。类似地从 $g_{1}/p[q]$ 可以得到系数 b_{1}，然后得 b_{2}, b_{3}, $\cdots$, b_{l}。

【例】 十进数 132[10] 通过除以 2[10] 转换为：$132/2=66+0/2$ 得 $b_{0}=0$; $66/2=33+0/2$ 得 $b_{1}=0$; $33/2=16+1/2$ 得 $b_{2}=1$; $16/2=8+0/2$ 得 $b_{3}=0$; $8/2=4+0/2$ 得 $b_{4}=0$; $4/2=2+0/2$ 得 $b_{5}=0$; $2/2=1+0/2$ 得 $b_{6}=0$; $1/2=0+1/2$ 得 $b_{7}=1$。因此对于 132 来说，得到二进数 10000100。为了从这个数通过转换重新得出十进数就除以 $10[2]=1010$。

$$10000100/1010=1101+10/1010\quad \text{得}\quad b_{0}=10[2]=2[10];$$

```
 10000100
-1010
 ----
  1101
 -1010
 -----
   1100
  -1010
  -----
     10
```

$$\begin{array}{l} 1101/1010 = 1 + 11/1010 \quad 得 \quad b_1 = 11[2] = 3[10]; \\ \underline{-1010} \\ \quad 11 \end{array}$$

$$1/1010 = 0 + 1/1010 \quad 得 \quad b_2 = 1[2] + 1[10],$$

即
$$b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0 \cdot 10^0 = 132。$$

区间计算 在对初始数据作舍入的情况下，为了确定基本算术运算结果中的不准确度，摩尔(Moore)发展了区间计算；每一个数 z 被代之以它所处的最小闭有理区间$[a, b]$，作为在数上运算(它在每一种可能情况下都能直观显示在数直线上)的一个推广，得到区间上的算术运算。如果 $z_1=[a, b]$ 和 $z_2=[c, d]$，那末 $z_1+z_2=[a+c, b+d]$，又因为 $-[c, d]=[-d, -c]$，所以 $z_1-z_2=[a-d, b-c]$（见图 16.1-1）。对于第二类运算得

$$z_1 \cdot z_2 = [a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

和

$$z_1/z_2 = [a, b]/[c, d] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \\ \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]。$$

用这种方式就能定义区间函数，特别地能定义有理区间函数，在数值模式中它们可以代替别的函数。

【例】 具有正整指数 k 的幂函数 $f(x)=x^k$ 定义为 x 本身的 k 次乘积；这样，对于

$$x=[x_1, x_2]$$

作为区间就获得幂函数：

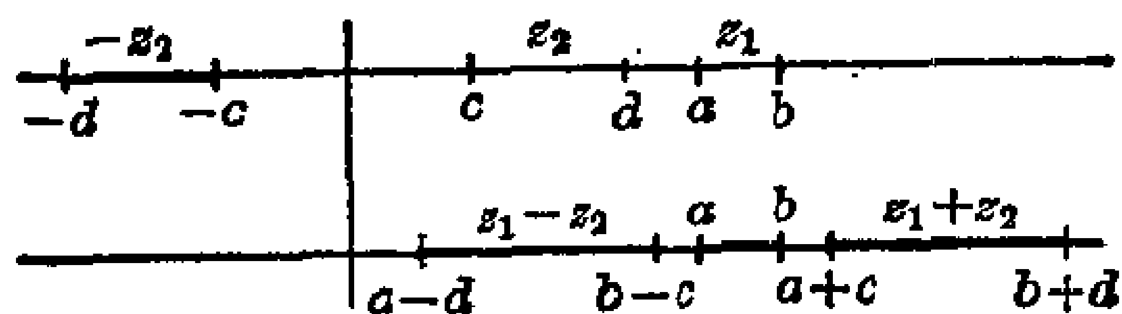


图 16.1-1 对于 z_1+z_2，对于 $-z_2$，以及对于 z_1-z_2 的区间

$$x^k = [x_1, x_2]^k = [\min(x_1^k, x_1^{k-1}x_2, x_1^{k-2}x_2^2, \cdots, x_2^k), \\ \max(x_1^k, x_1^{k-1}x_2 \cdots, x_2^k)]。$$

16.2 插值和差分计算

插值的基本概念是对于函数 $f(x)$ 在有限多个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 上给出函数值 $y_i=f(x_i)$ 或可能还给出导数值 $y_i^{(j)}=f^{(j)}(x_i)$，直到 $m_i \geqslant j$，用由标准函数 $\varphi_j(x)$ 的迭加 $\sum_j A_j\varphi_j(x)=f^*(x)\approx f(x)$ 来组成一个逼近。对于给定的一类函数来说，函数的形式 $\varphi_j(x)$ 以及迭加系数 A_j 必须由替换

函数 $f^*(x)$ 在给定点 $\{x_i\}$ 上所取的值 y_i 或 $y_i^{(j)}$, $i=1, \cdots, n$ 唯一地确定。对于点集 $\{x_i\}$ 以外的点，插值公式的优度由余项 $R=f(x)-f^*(x)$ 的估计来给出。如果 x 位于包含点集 $\{x_i\}$, $i=1, 2, \cdots, n$, 的最小区间内部，则称为真正的内插，而若 x 位于这个区间的外部，就称为外推。

许多数值过程可以用标准函数的迭加来较快地实现，例如根的确定、积分、微分或微分方程的积分。作为标准函数，常常使用多项式。泰勒插值和拉格朗日插值是具有实际重要性的两种极端情况。

泰勒插值　只在一个点 x_1 处给出函数值 $f(x_1)$ 及其导数值 $f^{(j)}(x_1)$, 其中 $m_1 \geqslant j$。标准多项式为 $\varphi_j(x)=(x-x_1)^j/j!$ 而迭加系数为 $A_j=f^{(j)}(x_1)$, $j=0, 1, \cdots, m_1$, 余项为 $R=f^{(m_1+1)}(\xi)\cdot(x-x_1)^{m_1+1}/(m_1+1)!$), 其中 ξ 是 x_1 与 x 之间的一点(参见 **II**. 第8章)。

【例】　函数 $\sin x$ 在点 $x=0$ 的泰勒插值由它的泰勒级数展开式 $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \cdots$ 的有限多项组成。

拉格朗日插值　在点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 只给出函数值 $y_i=f(x_i)$。标准多项式为 $\varphi_j(x)=\dfrac{\Phi_n(x)}{(x-x_j)\cdot\Phi_n'(x_j)}$, 其中 $\Phi_n(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)$, 而迭加系数为 $A_j=y_j=f(x_j)$。余项为 $R=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\Phi_n(x)$, 这里 ξ 是包含点集 $\{x_i\}$, $i=1, 2, \cdots, n$ 的最小区间内的一点。

牛顿插值多项式　牛顿插值能从拉格朗日插值导出，如果数据是以同样方式给定(参见 **II**. 第15章)。但是当引进一个外加的插值点 x_{n+1} 时，在拉格朗日公式的情况下需要重新计算标准多项式以及系数 A_j, 而就牛顿公式来说，可以扩充已经获得的值。标准多项式为

$$\varphi_j(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_j),$$

系数是差商，它们从差分表计算出来。

差商　如果对于函数 $y=f(x)$, 在 $n+1$ 个基础点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上给出值 $y_0=f(x_0), \cdots, y_n=f(x_n)$, 那末0阶到 n 阶差商(也叫做梯度)可确定如下:

0. $[x_0] \qquad = y_0,\ [x_1]=y_1, \cdots, [x_n]=y_n$;

1. $[x_ix_j] \qquad = (y_i-y_j)/(x_i-x_j)$, 例如,

$$[x_1x_0]=(y_1-y_0)/(x_1-x_0),$$

$$[x_nx_{n-1}]=(y_n-y_{n-1})/(x_n-x_{n-1});$$

2. $[x_ix_jx_k]$ $=([x_ix_j]-[x_jx_k])/(x_i-x_k)$，例如，

$$[x_2x_1x_0]=([x_2x_1]-[x_1x_0])/(x_2-x_0);$$

$(r+1)$. $[x_ix_jx_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_r}]=([x_ix_jx_{k_1}\cdots x_{k_{r-1}}]$

$$-[x_jx_{k_1}\cdots x_{k_r}])/(x_i-x_{k_r})。$$

$$n.\ [x_nx_{n-1}\cdots x_0]=\frac{[x_nx_{n-1}\cdots x_1]-[x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0]}{x_n-x_0}$$

所有的差商在它们的变元方面是对称的；例如

$$[x_ix_j]=(y_i-y_j)/(x_i-x_j)=(y_j-y_i)/(x_j-x_i)=[x_jx_i],$$

$$[x_ix_jx_k]=([x_kx_j]-[x_jx_i])/(x_k-x_i)=[x_kx_jx_i],$$

类似地可以证明

$$[x_ix_jx_k]=[x_ix_kx_j]=[x_jx_ix_k]=[x_kx_ix_j]。$$

因此可以用任意一种方式重新安排差商中的变元。为了计算差商，使用如下的梯度格式。

计算差商的格式：

			x_0	y_0					
		x_1-x_0			y_1-y_0	$[x_1x_0]$			
	x_2-x_0		x_1	y_1			$[x_2x_1]-[x_1x_0]$	$[x_2x_1x_0]$	
…		x_2-x_1			y_2-y_1	$[x_2x_1]$			…
	x_3-x_1		x_2	y_2			$[x_3x_2]-[x_2x_1]$	$[x_3x_2x_1]$	
⋮		x_3-x_2			y_3-y_2	$[x_3x_2]$			⋮
	⋮		x_3	y_3			⋮	⋮	
…		⋮			⋮	⋮			…
	x_n-x_{n-2}		⋮	⋮			$[x_nx_{n-1}]-[x_{n-1}x_{n-2}]$	$[x_nx_{n-1}x_{n-2}]$	
		x_n-x_{n-1}			y_n-y_{n-1}	$[x_nx_{n-1}]$			
			x_n	y_n					

表中单线指出递减差商的值，双线为递增差商的值，位于格式中间的则是中心差商。

【例】 $y=x^3$；基础点：$x_0=1$，$x_1=3$，$x_2=4$。梯度格式：

$x_{i+2}-x_i$	$x_{i+1}-x_i$	x_i	y_i	Δ	$[x_{i+1}x_i]$	Δ	$[x_2x_1x_0]$
		1	1				
	2			26	13		
3		3	27			24	8
	1			37	37		
		4	64				

结果：$[x_0]=1$，$[x_1x_0]=13$，$[x_2x_1x_0]=8$。

差商的性质。 如果 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，再用加上尾标 1 和 2 来记函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的差商，那末

$$[x_nx_{n-1}\cdots x_0]=[x_nx_{n-1}\cdots x_0]_1+[x_nx_{n-1}\cdots x_0]_2。$$

对于函数 $f(x)=cf_1(x)$，其中 c 为常数，

$$[x_1x_{n-1}\cdots x_0]=c[x_nx_{n-1}\cdots x_0]_1。$$

就差商来说可以不必预先形成低阶差商而直接给出一个独立的表达式：

$$[x_nx_{n-1}\cdots x_0]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}。$$

如果函数 $f(x)$ 在包含基础点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的一个区间内 n 次连续可微，那末它的差商能借助于函数的导数表示：$[x_nx_{n-1}\cdots x_0]=f^{(n)}(\xi)/n!$。这里 ξ 记在包含基础点的区间内一个适当的点。由此得出，一个 n 次多项式函数的所有 n 阶差商相等。

等距基础点的差分表。 如果按数量大小次序排列的基础点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是等距的，则计算差商的格式就变得特别简单。对于宽度为 h 的给定间距，$x_1=x_0+h$，$x_2=x_0+2h$，$\cdots$，$x_n=x_0+nh$。对于格式左面部分自变量的差分，得到 $x_{i+k}-x_i=kh$。更进一步，如果引进

一阶差分　$y_{i+1}-y_i=\Delta^1y_{i+1/2}$，

二阶差分　$\Delta^1y_{i+1}-\Delta^1y_i=\Delta^2y_{i+1/2}$，

⋮

n 阶差分　$\Delta^{n-1}y_{i+1}-\Delta^{n-1}y_i=\Delta^ny_{i+1/2}$，

则在通常差分和差商之间存在一个简单关系，下边的公式成立。

$$[x_{i+k}x_{i+k-1}\cdots x_{i+1}x_i]=\frac{1}{h^k}\frac{1}{k!}\Delta^ky_{i+k/2}$$

由此得出，一个 n 次多项式函数不仅所有的 n 阶差商相等，而且所有的 n 阶通常差分都彼此相等。

如果通过方程 $x=x_0+th$ 引进辅助变量 t，又如果也考虑在基础点 x_0 之前的基础点 $x_{-1}=x_0-h$，$x_{-2}=x_0-2h$，…，那末就获得如下的*差分表*。

差分表

t	$x=x_0+th$	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
⋮	⋮	⋮		⋮				
			⋮		⋮			
-2	x_{-2}	y_{-2}		Δ^2y_{-2}		⋮		
			$\Delta^1y_{-3/2}$		$\Delta^3y_{-3/2}$		⋮	
-1	x_{-1}	y_{-1}		Δ^2y_{-1}		Δ^4y_{-1}		⋮
			$\Delta^1y_{-1/2}$		$\Delta^3y_{-1/2}$		$\Delta^5y_{\ 1/2}$	
0	x_0	y_0		Δ^2y_0		Δ^4y_0		Δ^6y_0
			$\Delta^1y_{1/2}$		$\Delta^3y_{1/2}$		$\Delta^5y_{1/2}$	
1	x_1	y_1		Δ^2y_1		Δ^4y_1		⋮
			$\Delta^1y_{3/2}$		$\Delta^3y_{3/2}$		⋮	
2	x_2	y_2		Δ^2y_2		⋮		
			⋮		⋮			
⋮	⋮	⋮		⋮				

在计算差分表时，从基础值表开始形成关于函数值 y_i 的差分系列，这样就得到一阶差分。对于一阶差分再形成差分系列，就得到二阶差分，如此等等。

艾特肯插值 如果函数 $f(x)$ 要进行插值的那个点 x 已经给定，应用艾特肯(Aitken)的*递归插值过程*具有优越性。通过线性插值(见图 16.2-1)首先确定 $h_{i,i+1}$:

$h_{i,i+1}(x_{i+1}-x_i)=y_i(x_{i+1}-x)+y_{i+1}(x-x_i)$,

也就是说

$$h_{i,i+1}=\frac{1}{(x_{i+1}-x_i)}\det\begin{vmatrix} y_i & (x_i-x) \\ y_{i+1} & (x_{i+1}-x)\end{vmatrix}。$$

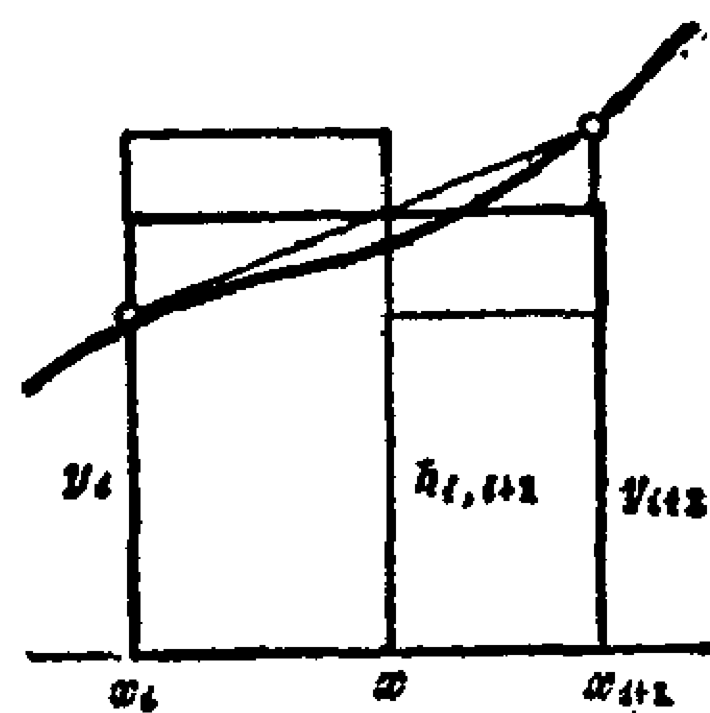


图 16.2-1 艾特肯插值；
$h_{i,i+1}(x_{i+1}-x_i)=y_i(x_{i+1}-x)+y_{i+1}(x-x_i)$

加上另一个点 x_{i+2}，就达成插值的一个二次多项式 $h_{i,i+1,i+2}$，由此达到一个较高的准确度：

$$h_{i,i+1,i+2}=\frac{1}{(x_{i+2}-x_i)}\det\begin{vmatrix} h_{i,i+1} & (x_i-x) \\ h_{i+1,i+2} & (x_{i+2}-x)\end{vmatrix}。$$

如果需要，可按这种方式进行下去，直到逐次逼近的值仅相差一个在所期望的准确度界限内的小量。

16.3 积分和微分的数值模式

数值积分 所谓求积公式可以理解为在基础点 x_{ij} 处给定函数 $f(x)$ 及其导数值的一个模式，其中的迭加系数 A_{ij} 或基础点 x_{ij} 是按模式优度的要求来确定的。在调幅型的求积公式中，基础点是给定的而 A_{ij} 是待定的；另一方面在配点型的求积公式中，A_{ij} 是给定的而相适应的基础点是待定的。基础点可不必属于积分区间。

求积公式	$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i,j} A_{ij} f^{(j)}(x_{i,j})$

【例】 对于高达三次的多项式提供精确值的三阶求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx [(b-a)/2]\{f(a)+f(b) - [(b-a)/6][f'(b)-f'(a)]\}。$$

插值求积公式是将积分区间 $[a, b]$ 内的被积函数用基础点 $x_i = a + ih$, $i=0, 1, 2, \cdots, n$, 的 n 次拉格朗日插值多项式来代替后得到的。根据求积公式需对每一个 n 次多项式成为精确公式的优度要求，得到模式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(a+ih)$$

其中
$$A_i = \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t^{[n+1]}}{t-i} dt,$$

这里 $t^{[n+1]} = t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)$。如果 $n = 2m-1-d$, 其中对于奇的 n 值 $d=0$, 而对于偶的 n 值 $d=1$, 那末模式的误差总计为

$$R_n = -M_n(b-a)^{2m+1} f^{(2m)}(\xi), \quad 其中 \ a<\xi<b$$

且
$$M_1 \approx 8.333 \cdot 10^{-2}, \quad M_2 \approx 3.472 \cdot 10^{-4},$$
$$M_3 \approx 1.543 \cdot 10^{-4}, \quad M_4 \approx 5.167 \cdot 10^{-7},$$
$$M_5 \approx 2.910 \cdot 10^{-7}, \quad M_6 \approx 6.379 \cdot 10^{-10},$$
$$M_7 \approx 3.912 \cdot 10^{-10}, \quad M_8 \approx 5.133 \cdot 10^{-13}。$$

常用的有梯形规则和辛卜生(Simpson)规则。

梯形规则

$$\int_a^b f(x)dx=[(b-a)/n][f(0)/2+f(h)+f(2h)+\cdots$$
$$+f((n-1)h)+f(nh)/2]$$
$$-[(b-a)^3/(12n^2)]\cdot f''(\xi)。$$

或者当 $n=1$ 即在区间的两个端点之间作线性插值的情况下:

$$\int_a^b f(x)dx\approx[(b-a)/2][f(a)+f(b)]-[(b-a)^3/12]f''(\xi)。$$

对于偶数 n 的辛卜生规则

$$\int_a^b f(x)dx=[(b-a)/(3n)]\{f(0)-f(nh)+2[f(2h)$$
$$+f(4h)+\cdots+f((n-2)h)]+4[f(h)$$
$$+f(3h)+\cdots+f((n-1)h)]\}$$
$$-[(b-a)^5/(180n^4)]f^{(4)}(\xi),$$

或者当 $n=2$ 从而在区间的两个端点 a 和 b 之间借助于二次多项式插值:

$$\int_a^b f(x)dx\approx(h/3)[f(a)+4f(a+h)+f(b)]-h^5\cdot f^{(4)}(\xi)/90,$$

这里 $h=(b-a)/2$。

数值微分 象数值积分那样,于 $f'(x_0)$ 所在点 x_0 的邻域内用一个 n 次插值多项式 $P_n(x)$ 来对函数 $f(x)$ 作插值,再使用模式 $f'(x_0)\approx P'_n(x_0)$。例如,对于点 x_0-h 和 x_0+h 之间的线性插值,得到

$$f'(x_0)\approx[f(x_0+h)-f(x_0-h)]/(2h)。$$

通过函数 $f(x)$ 在点 x_0 的泰勒展开

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+f''(x_0)(h^2/2!)+\cdots$$
$$+f^{(n)}(x_0)(h^n/n!)+\cdots=e^{(hd/dx)}f(x_0),$$

就获得微分算子普遍适用的模式

$$\frac{d}{dx}\approx(1/h)\ln(1+h\Delta)=(1/h)[(h\Delta)-(h\Delta)^2/2$$
$$+(h\Delta)^3/3-(h\Delta)^4/4+\cdots];$$

这里 Δ 是差分算子, $\Delta f(x)=[f(x+h)-f(x)]/h$。将这个级数在算子 $h\Delta$ 的 n 次幂后截断,就造成一个模式,它对于高达 n 次的多项式给出导

分计算都要求存贮后方值的有限集 $\{y_i\}$。另一面，龙格-库塔 (Runge-Kutta) 方法则仅利用连续函数 $f(x, y)$的性质；因此它要求较少的存贮，并且除了提供一个独立的解以外，它也能用来为别的方法计算开始值。再者，间距 h 在计算过程中是可以改变的，而数值稳定性比起别的建立在差分计算之上的方法来更加容易保证。在龙格-库塔方法中计算近似值 $\tilde{y}_{i+1}$，它相应于

$$y_{i+1}=y_i+\int_{x_i}^{x_i+h} f(t, y(t))dt, \quad \text{这里} \quad \tilde{y}_{i+1}=y_i+k$$

而增量 k 经过中间步骤：

$$k_0=0, \; k_j=hf(x_i+a_jh, \; y_i+\sum_{r=0}^{j-1} b_{jr}k_r), \quad j=1, 2, \cdots, r$$

得出的，且 $k=\sum_{j=1}^{r} g_jk_j$。这些步骤里包含的参数 a_j、b_{jr} 和 g_j 按方法所需要的优度来确定。通常要求 $\varphi(h)=\int_{x_i}^{x_i+h} f(t, y(t))dt-\sum_{j=1}^{r} g_jk_j$ 当 $h=0$ 时具有尽可能高的 l 阶退化导数 $\varphi(0)=\varphi'(0)=\cdots=\varphi^{(l)}(0)$，$l$ 就称为**龙格-库塔方法的阶**。

龙格-库塔方法是欧拉方法 $\tilde{y}_{i+1}=y_i+hf(x_i, y_i)$ 的一个改进，欧拉方法具有不利的误差传播。

已经证实的 4 阶龙格-库塔方法例题：

1. $\tilde{y}_{i+1}=y_i+(1/6)(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$，其中

$$k_1=hf(x_i, y_i), \; k_2=hf(x_i+h/2, \; y_i+k_1/2),$$

$$k_3=hf\left(x_i+\frac{h}{2}, \; y_i+k_2/2\right), \; k_4=hf(x_i+h, \; y_i+k_3)。$$

2. $\tilde{y}_{i+1}=y_i+(1/3)(k_1/2+3k_2/2+k_3/2+k_4/2)$，其中

$$k_1=hf(x_i, y_i), \; k_2=hf(x_i+h/2, \; y_i+k_1/2),$$

$$k_3=hf(x_i+h/2, \; y_i-k_1/2+k_2),$$

$$k_4=hf(x_i+h, \; y_i+k_2/2+k_3/2)。$$

根的确定

从函数 $y=f(x)$ 的值域可以得到使 $f(x)=0$ 的一些自变量 x 的迹象。相应地如果确定了一个插值多项式，那末它的根就是所要求的根的近似值。在由迭代过程来估计根的时候可试着作为一个步骤使用这些值。

试位法 用一条直线连接两个不同点 $y_1=f(x_1)$ 和 $y_2=f(x_2)$，它就成为一个一次插值多项式(见图16.3-1)。从 $(x_2-x)/(x_2-x_1)=(y_2-y)/(y_2-y_1)$ 得到 $P_1(x)=y=y_1(x-x_2)/(x_1-x_2)+y_2(x-x_1)/(x_2-x_1)$ 及 $P_1(x)=0$ 的根 x'。

试位法	$x'=\dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{y_1-y_2}$

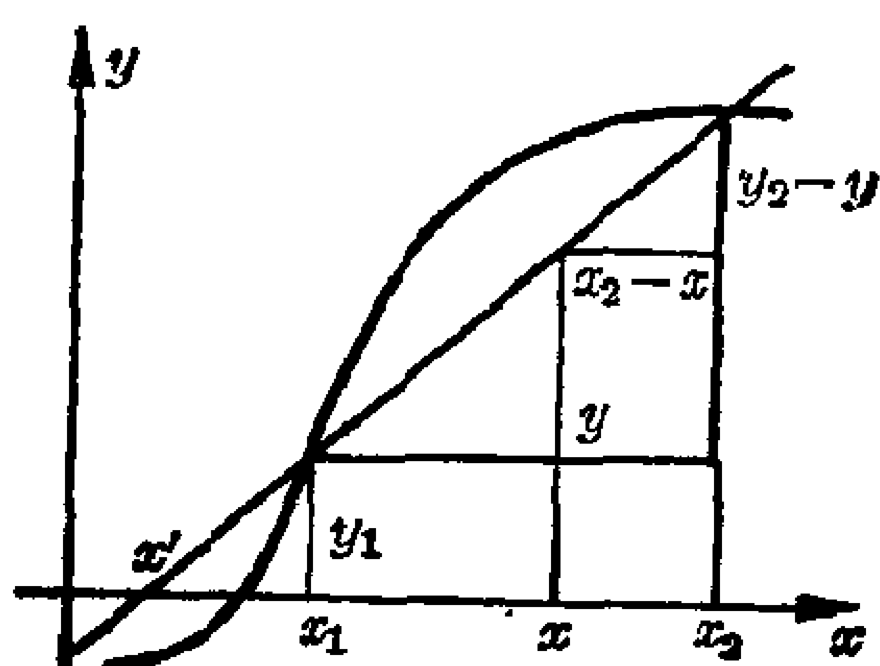


图16.3-1 试位法

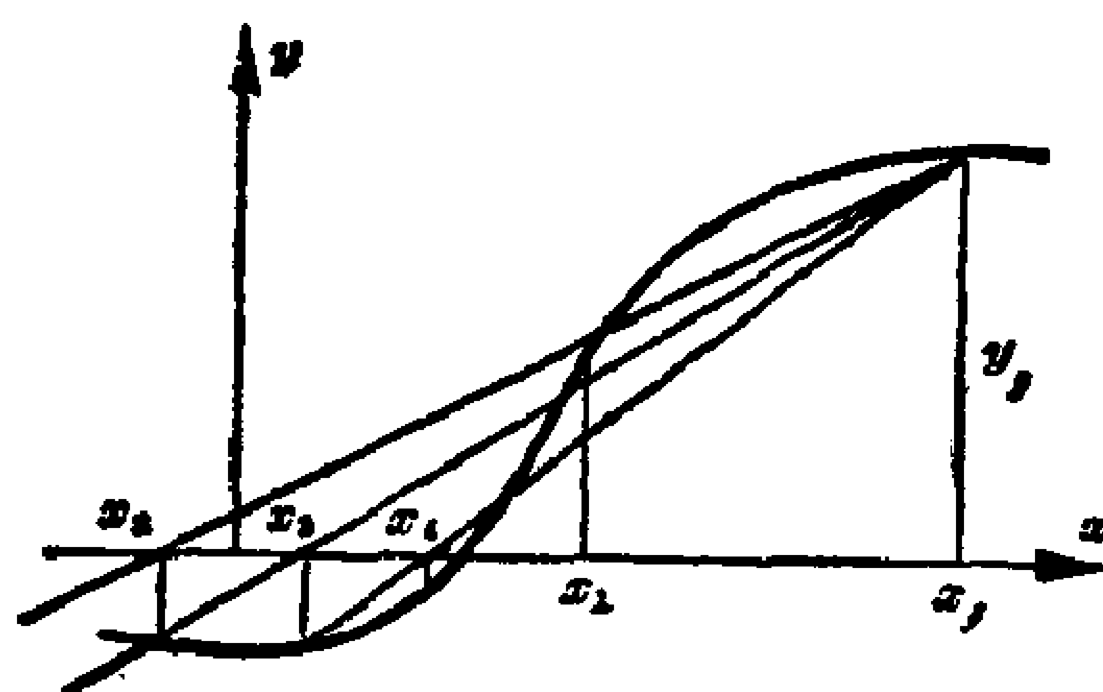


图16.3-2 试位法：定点法

如果通过代入确定 $y'=f(x')$，就能找到迭代过程。按照定点法(见图16.3-2)，将一对值 $x_2=x_f$ 和 $y_2=y_f$ 固定下来作为定点。写出 $x_1=x_i$，$y_1=y_i$ 以及 $x'=x_{i+1}$，$y'=y_{i+1}$，于是 $x_{i+1}=(x_fy_i-x_iy_f)/(y_i-y_f)$。按照割线法就写为 $x_2\to x_{i-1}$，$y_2\to y_{i-1}$，$x_1\to x_i$，$y_1\to y_i$，进而 $x'\to x_{i+1}$，得出 $x_{i+1}=(y_ix_{i-1}-y_{i-1}x_i)/(y_i-y_{i-1})=[x_{i-1}f(x_i)-x_if(x_{i-1})]/[f(x_i)-f(x_{i-1})]$。这个过程(见图16.3-3)将十分迅速地收敛于 x^* (在这一点上 $f(x^*)=0$)，倘若 $f(x)$ 满足下述条件：从 $f'(x)$ 的下界 m_1 和 $|f'(x)|$ 的上界 M_1 及 $|f''(x)|$ 的上界 M_2 算得 $K=M_2M_1^2/(2m_1^3)$，那末不等式 $K|x^*-x_0|<1$ 和 $K|x^*-x_1|<1$ 成立。

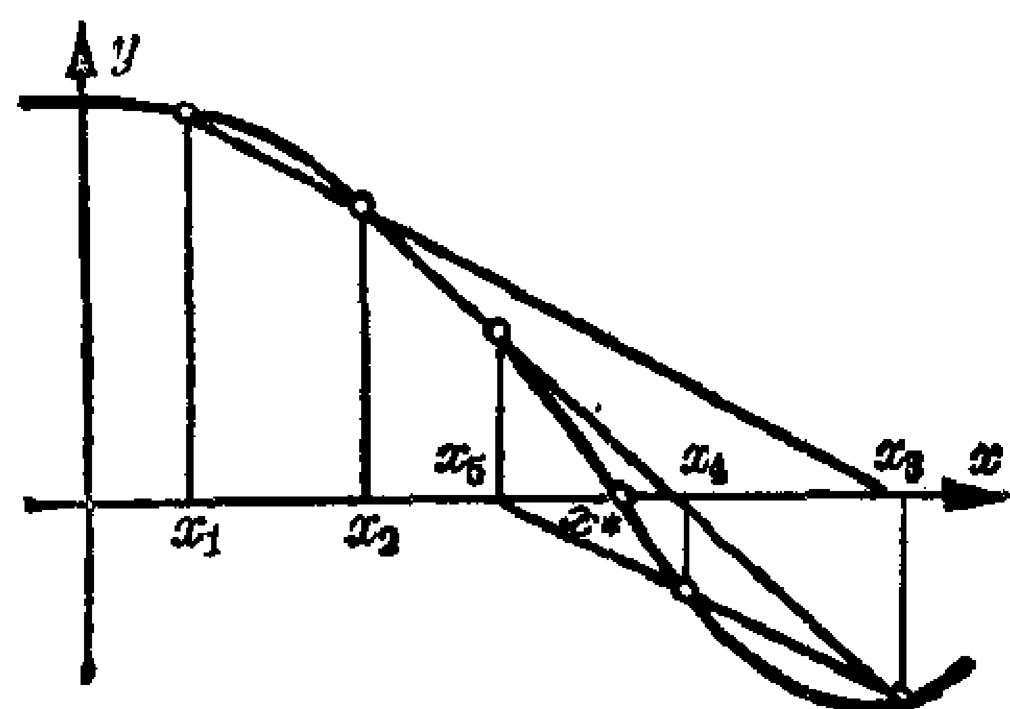


图16.3-3 试位法：割线法

【例】 对于函数 $f(x)=x^3-2x-5$ 的根 $x^*=2.094\,551\,481\,542\,3\cdots$，用定点法以及 $x_f=2$ 和 $x_1=3$ 得到下列逼近：

$x_2=2.058\,823\,529\,4$； $x_3=2.096\,558\,636\,2$； $x_4=2.094\,440\,519\,3$；
$x_5=2.094\,557\,621\,8$； $x_6=2.094\,551\,139\,9$； $x_7=2.094\,551\,500\,6$。

牛顿方法 作为一次牛顿插值多项式,直线是由函数 $f(x)$ 图上的一点 $y_0=f(x_0)$ 以及在该点的切线梯度 y_0' 定下来的。从切线方程 $y=P_1(x)=y_0+y_0'(x-x_0)$ 能作出零点的估计值 x'。

由此可导出迭代过程。在具有固定梯度的牛顿方法情况下,$y_0'=f'(x_f)$ 保持不变,而点 $x'\to x_{i+1}$ 及 $y_{i+1}=f(x_{i+1})$ 从点 $x_0\to x_i$ 及 $y_0\to f(x_i)$ 得出;这一步骤 $x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_f)$ 反复迭代(见图 16.3-4)。在具有可变梯度的牛顿方法情况下,导数 $f'(x_i)$ 在每一点 $(x_i, f(x_i))$ 是重新计算的,于是 $x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)$ (见图 16.3-5)。

牛顿方法	$x'=x_0-y_0/y_0'$

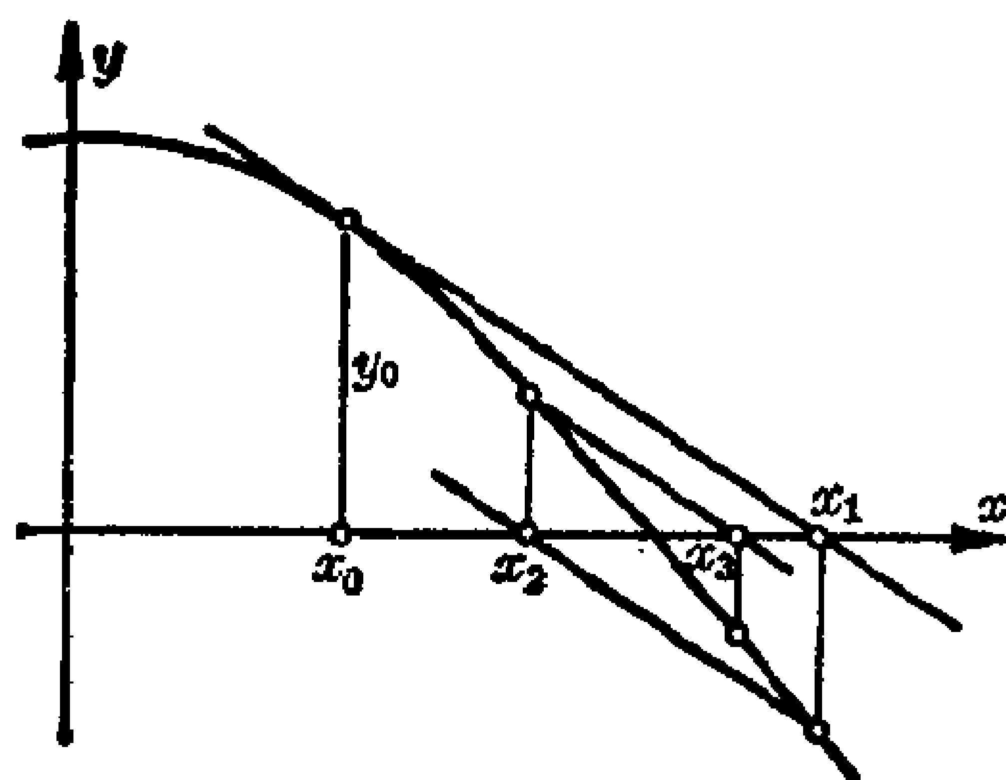


图 16.3-4 具有固定梯度的牛顿方法

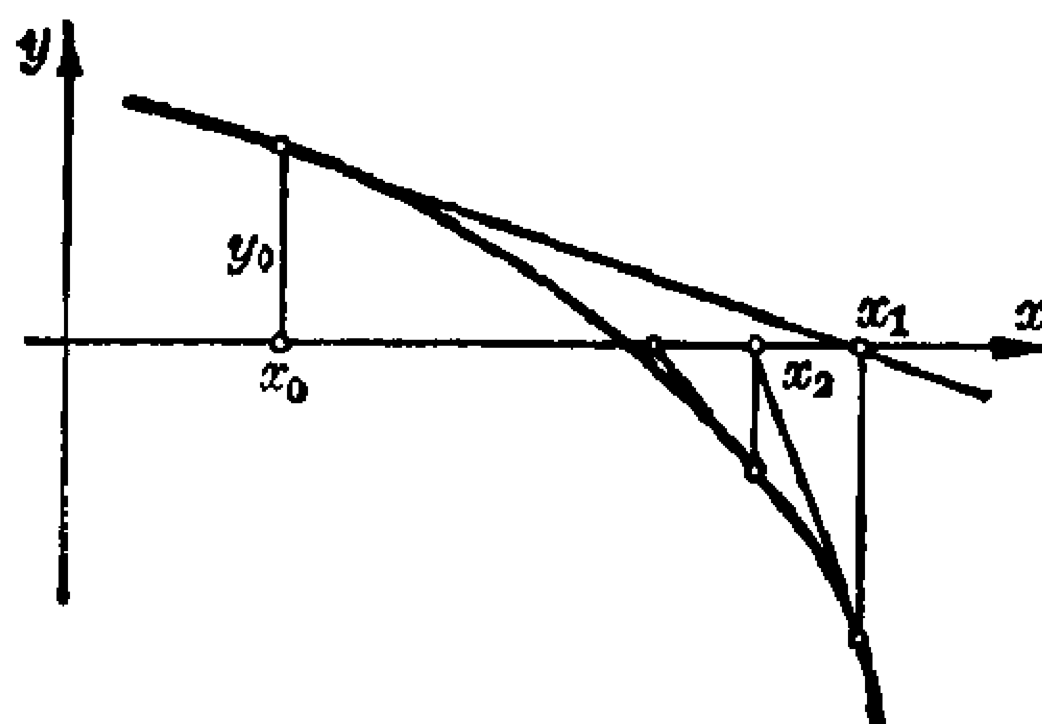


图 16.3-5 具有可变梯度的牛顿方法

【例】 数 a 的 k 次根作为函数 $f(x)=x^k-a$ 的根,是借助于迭代方程

$$x_{i+1}=x_i-(x_i^k-a)/(kx_i^{k-1})=x_i(1-1/k)+a/(kx_i^{k-1})$$

得到的。对于平方根,它变为 $x_{i+1}=(x_i+a/x_i)/2$。

如果对于根 x^* 和在试位方法中曾经表述过的值 K 使 $K|x^*-x_1|<1$ 成立,那末牛顿方法迅速收敛。

迭代方法 一般地,为了确定根,方程 $f(x)=0$ 表示成可以迭代的形式(见图 16.3-6)。如果选取函数 $F(x)=x-cf(x)$,这里 $c>0$,那末根据导函数 $f'(x)$ 的下界 m_1 和上界 M_1 即 $m_1<f'(x)<M_1$ 能选出 c 的最优值。关于导函数 $F'(x)=1-cf'(x)$ 得出 $1-cm_1>1-cf'(x)>1-cM_1$,也就是说 $\max(|1-cm_1|, |1-cM_1|)$ 的值越小,$F'(x)$ 所处的界限越

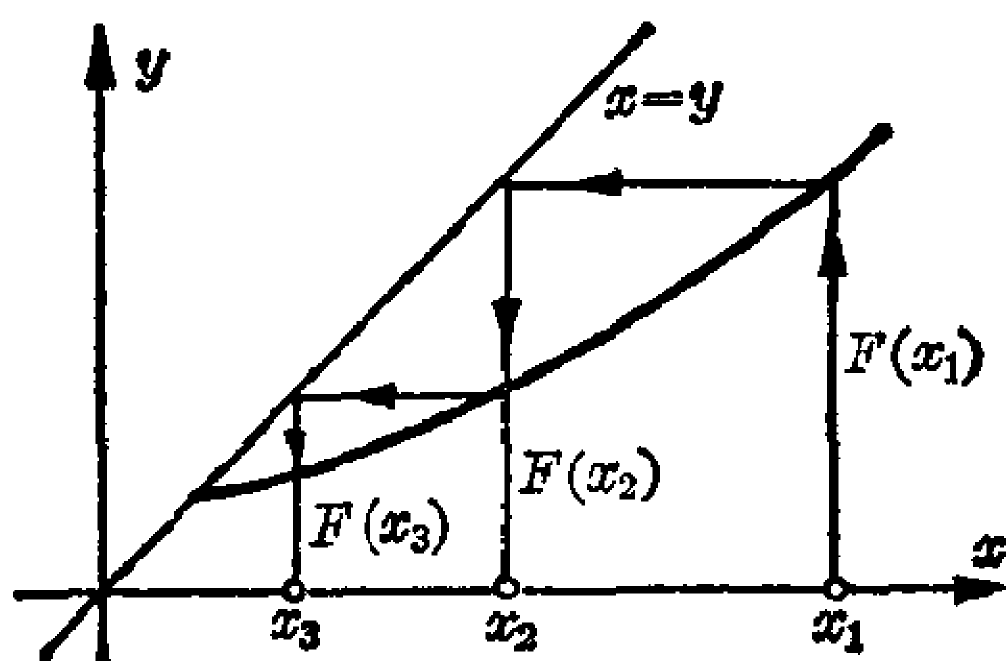


图 16.3-6　迭代过程 $x_{i+1}=F(x_i)$

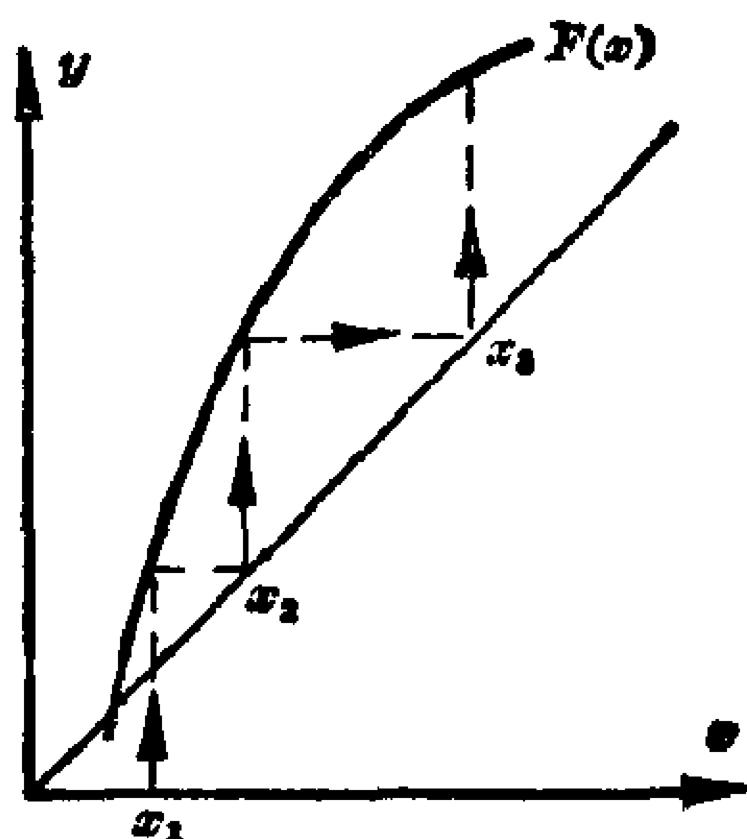


图 16.3-7　发散迭代图解

窄。当取 $c=2/(M_1+m_1)$ 时，得到 $|1-cm_1|=|1-cM_1|=(M_1-m_1)/(M_1+m_1)=a<1$。由微分的中值定理得出 $|F(x_{i+1})-F(x_i)|\leqslant|F'(\xi)||x_{i+1}-x_i|<a\cdot|x_{i+1}-x_i|$。$a$ 的值越小，迭代过程的收敛性越好。对于定点试位法，显然 $F(x)=[x_f f(x)-xf(x_f)]/[f(x)-f(x_f)]$，而对于牛顿方法则 $F(x)=x-f(x)/f'(x)$。收敛性能由艾特肯的 δ^2 过程加以改进。在这种情况下两个常规迭代步骤 $x_{3i+1}=F(x_{3i})$ 和 $x_{3i+2}=F(x_{3i+1})$ 之后跟着一个艾特肯步骤 $x_{3i+3}=x_{3i}-(x_{3i+1}-x_{3i})^2/(x_{3i+2}-2x_{3i+1}+x_{3i})$。图形说明了迭代过程收敛与发散之间的差别(见图16.3-7 和 16.3-8)。

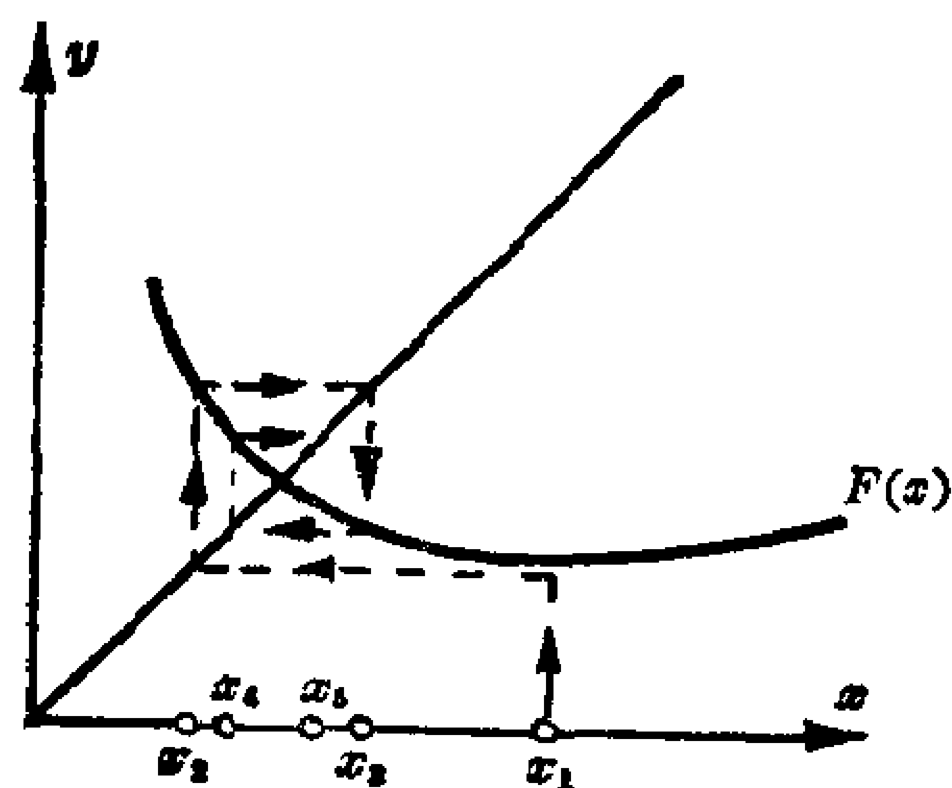


图 16.3-8　收敛迭代图解

【例】　数 $a>1$ 的平方根是由求解方程 $f(x)=x^2-a=0$ 的一个迭代过程得到的。一般地在零点的邻域 $1<\sqrt{a}=x<a$ 内，由于 $f'(x)=2x$，所以 $2<f'(x)<2a$。因为 $m=2$，$M=2a$，就得出 $c=(2a-2)/(2a+2)=(a-1)/(a+1)$。因此对于 $\sqrt{2}$ 来说，$x_{i+1}=x_i-(x_i^2-2)/3$ 是一个收敛的迭代过程。它给出 $x_1=4/3=1.333$; $x_2=38/27\approx1.407$; $x_3=3092/2187\approx1.412$。

16.4　极值搜索

一维过程

如果一个系统的运算方式依赖于参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，那末就希望有

关于运算方式优度的准则 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它也叫做目标函数或成本函数。然而这种有几个变量的函数，不总是以公式出现的。于是必须通过对于系统的试验来确定它的值。

这样的运算方式的一个简单情况是确定一个变量的函数 $f(x)$ 的极值。现在参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 定出点 x_i 而其值 $f(x_i)$ 提供关于函数 $f(x)$ 极值附近的信息。在搜索极值点的时候有几种策略已被证明为实用的。

数学分析的准则 $f'(x)=0$ 只适用于可微函数。实际上常常不能假定函数是连续的，也不能假定它的极值并不位于定义域的边界上。更为简便的常常是通过极值搜索来确定函数 $f^2(x)$ 的绝对极小值从而找出方程的根。

全盘策略　如果所讨论的函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内有一个极小值，那末函数 $-f(x)$ 就正好有一个极大值；如果它有几个相对极大值，那末所叙述的各种策略都导致对其中的一个极值的逼近。因此可以假定 $f(x)$ 恰有一个极大值，并经变换 $u=(x-a)/(x-b)$ 之后，区间为 $[0, 1]$。于是全盘策略 $Z_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就在于选取区间 $[0,1]$ 的 n 个不同点 x_i，其中当 $i<j$ 时 $x_i<x_j$。如果当 $x_i=x_k$ 时 $f(x_k)$ 是计算出来的函数值中最大者，那末极大点位于区间 $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ 内(见图 16.4-1)。区间的不定性 $L_n=x_{k+1}-x_k$ 导致策略的不定度 $L_n=\max\limits_{1\le i\le n}(x_{i+1}-x_{i-1})$，这里 $x_0=0$ 和 $x_{n+1}=1$。最大区间越小，策略就越好。所以最优不定度

$$L_n \text{ opt}=\min_{Z_n}\{\max_{1\le i\le n}(x_{i+1}-x_{i-1})\}$$

是极大极小策略的特征。

当 $n=1$ 时，$[0, 1]$ 是最大的不定性区间。当 $n=2$ 时(见图 16.4-2)，$[0, x_2]$ 和 $[x_1, 1]$ 是狭窄一些的不定性区间。如果按照极大极小策略试图

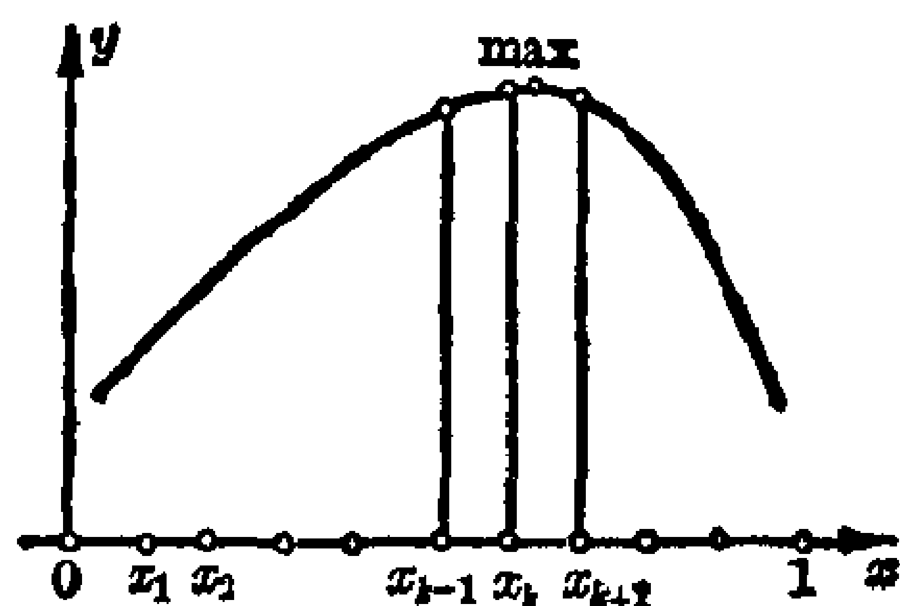


图 16.4-1　策略的不定度；$f(x_k)$ 为最大的计算值，max 为极大值

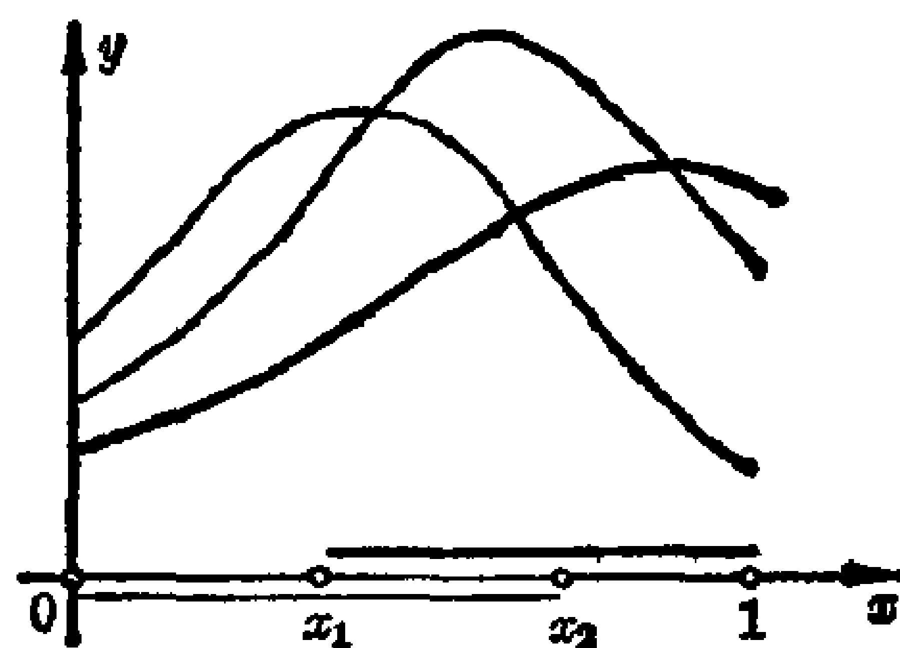


图 16.4-2　当 $n=2$ 时的不定性区间，及所求极大值的可能位置

将区间的长度 x_2 和 $1-x_1$ 搞得尽可能地小，但因 $x_1 \neq x_2$ 要避免不可实现的值 $x_1=x_2=0.5$，那末当 $n=2$ 时 ε-最优的全盘策略给出值 $x_1=0.5-\varepsilon/2$，和 $x_2=0.5+\varepsilon/2$，其中具有充分小的 $\varepsilon>0$，这里 ε 的选择还依赖于函数值 $f(x)$ 的误差变差，因为小于这个变差宽度就不可能确定两个值 $f(x)$ 和 $f(x+\varepsilon)$ 哪个大哪个小。

当 $n=3$ 时，新的第三点至多只能提高分离的鲜明性。不定性区间的变窄只能由一对新点来达到。最优的为一种等距对排列，对于偶数 n，它由点 $x_k=(1+\varepsilon)[(k+1)/2]/\{(n/2)+1\}-\{[(k+1)/2]-[k/2]\}\varepsilon$ 来给出，这里 $[x]$ 记小于或等于 x 的最大整数。于是最优的未定性区间的长度为 $L_{n\,\mathrm{opt}}=(1+\varepsilon)/\{(n/2)+1\}$。

【例】 当 $n=4$ 时就得到分点 $x_1=1/3-2\varepsilon/3$; $x_2=1/3+\varepsilon/3$; $x_3=2/3-\varepsilon/3$; $x_4=2/3+2\varepsilon/3$ 和最优的未定性区间 $L_{4\,\mathrm{opt}}=1/3+\varepsilon/3$。

序列策略　正如此名称所意味着的，在这种策略中每个新的一步是从前一步出发的，使前一步所得的未定性区间成为要加以考察的新区间。用这种方式可避免过多的分点。

在*两分序列搜索*的情况下，$n=2$ 的 ε 最优全盘策略可以反复应用。将 $L_{2\,\mathrm{opt}}=(1+\varepsilon)/2$ 推广为递归关系

$$L_{2k\,\mathrm{opt}}=(L_{2(k-1)\mathrm{opt}}+\varepsilon)/2,$$

对于 $n=2k$ 个点来说，得到 $L_{n\,\mathrm{opt}}=2^{-n/2}+\varepsilon(1-2^{-n/2})$。可以看出，对于同样的 n，区间的长度要比最优极大极小全盘策略的为小。

【例】 在函数 $f(x)=|x^2-2|$ 的极小值搜索中，以 $\varepsilon=10^{-4}$ 计算开头的12个分点，显示出所要求的效果：$x_1=1-\varepsilon/2$; $x_2=1+\varepsilon/2$; $x_3=1.5-3\varepsilon/4$; $x_4=1.5+\varepsilon/4$; $x_5=1.25-5\varepsilon/8$; $x_6=1.25+3\varepsilon/8$; $x_7=1.375-11\varepsilon/16$; $x_8=1.375+5\varepsilon/16$; $x_9=1.4375-23\varepsilon/32$; $x_{10}=1.4375+9\varepsilon/32$; $x_{11}=1.40625-45\varepsilon/64$; $x_{12}=1.40625+19\varepsilon/64$。

斐波那契搜索过程　在搜索时进行试验的次数 n 是固定的。从初始搜索区间 $[a,b]$ 出发，随后的搜索区间借助于数列 d_i 定下来，而这些 d_i 由斐波那契数规定。*斐波那契数* $F_0=1$, $F_1=1$, $F_2=2$, $F_3=3$, $F_4=5$, $F_5=8$, $F_6=13$, $F_7=21$, $F_8=34$, $F_9=55$, $F_{10}=89$, $F_{11}=144$, $F_{12}=233$, $F_{13}=377$, $F_{14}=610$ 满足递归关系 $F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$。这就给出 $1=F_{i-1}/F_i+F_{i-2}/F_i$，又因为 $F_{i-1}>F_{i-2}$，所以得出 $F_{i-2}/F_i<\frac{1}{2}$。令 $L_1=$

b_1-a_1, $d_1=L_2=L_1F_{n-1}/F_n$, $d_2=L_3=L_1F_{n-2}/F_n$, $d_3=L_2F_{n-3}/F_{n-1}=L_1F_{n-3}/F_n$, $d_4=L_3F_{n-4}/F_{n-2}=L_1F_{n-4}/F_n$, $\cdots$, $d_{n-1}=L_n=L_{n-2}F_1/F_3=\cdots=L_1/F_n$。由于当 $n\geqslant 3$ 时 $F_n>2^{n/2}$, 对于同样的 n 来说区间的长度 L_n 要比两分搜索法为小。

在这些值的帮助下, x_4 固定下来。从 $x_1=a_1+d_2$, $x_2=b_1-d_2$ 得出, $x_2-x_1=L_1-2d_2>0$ 或 $x_2>x_1$, 因为 $d_2<1/2L_1$。作为搜索区间, $[a_1, b_1-d_2]$或$[a_1+d_2, b_1]$具有同样的长度

$$L_1-d_2=L_1[(F_n-F_{n-2})/F_n]=L_1F_{n-1}/F_n=L_2=d_1。$$

点 x_3 和新的搜索区间依赖于函数值 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$:

当 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 时, 令 $a_2=a_1$, $b_2=x_2$ 以及 $x_3=a_2+d_3$, 这里 $a_2=a_1<x_3<x_1<x_2=b_2$。比较在点 x_3 和 x_1 的函数值, 给出两个可能的新未定区间$[a_1, x_1]$和$[x_3, x_2]$, 长度为 $L_3=d_2$。

当 $f(x_1)<f(x_2)$ 时, 令 $a_2=x_1$, $b_2=b_1$ 以及 $x_3=b_2-d_3$, 这里 $a_2\leqslant x_1<x_2<x_3<b_1=b_2$。比较在点 x_2 和 x_3 的函数值, 给出两个可能的新未定区间 $[x_1, x_3]$ 和 $[x_2, b_1]$, 长度为 $L_3=d_2$。

【例】 如果函数 $|x^2-2|=f(x)$ 的极小值由斐波那契搜索过程来确定, 则关于未定区间的长度得到 (三位小数): $L_1=2.000$, $L_2=1.236$, $L_3=0.764$, $L_4=0.472$, $L_5=0.292$, $L_6=0.180$, $L_7=0.113$, $L_8=0.068$, $L_9=0.045$, $L_{10}=0.023$; 以及分点 $x_1=0.764$, $x_2=1.236$, $x_3=1.528$, $x_4=1.708$, $x_5=1.416$, $x_6=1.348$, $x_7=1.461$, $x_8=1.393$, $x_9=1.438$, $x_{10}=1.415$(见图 16.4-3)。

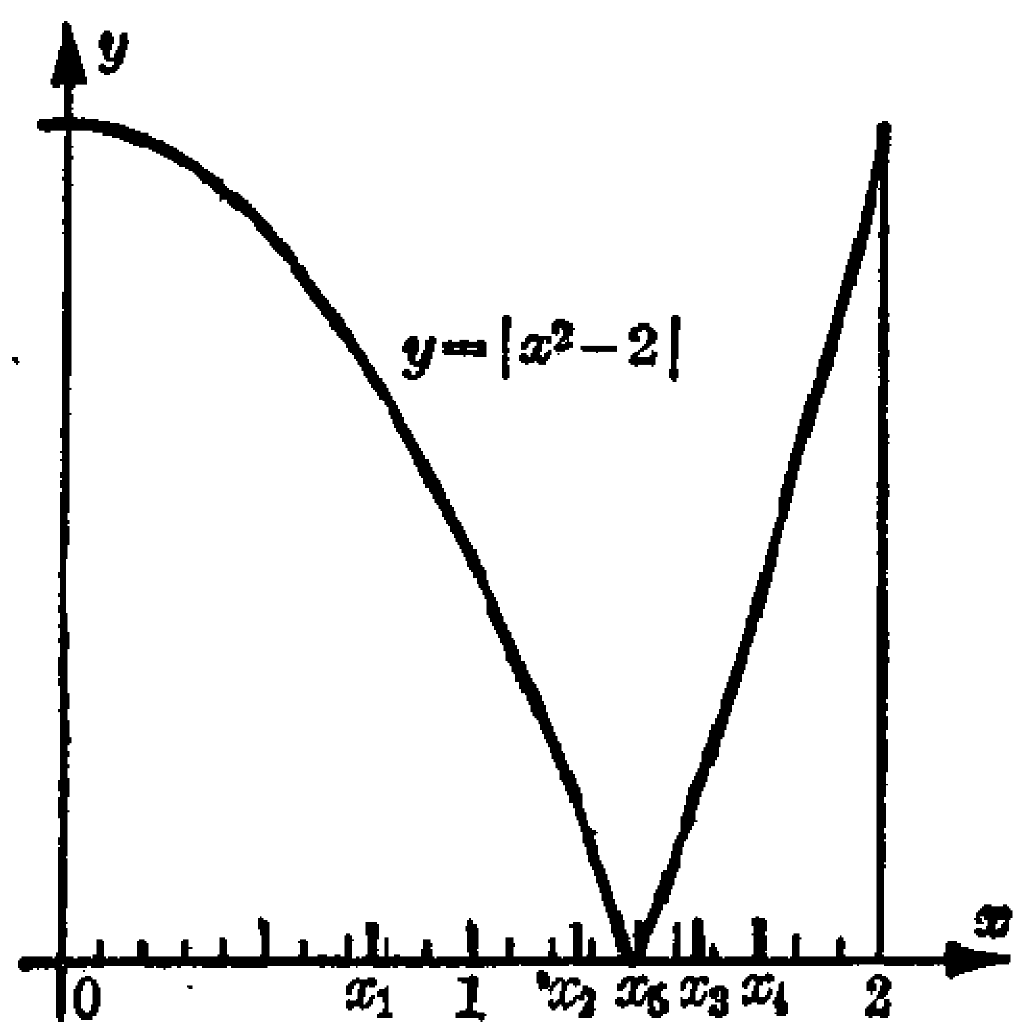


图 16.4-3 对于 $y=|x^2-2|$ 斐波那契搜索过程的区间

黄金分割搜索过程 这个过程比起斐波那契过程来效果只差一点点, 但是它不需要预先固定搜索的步数。

在搜索区间$[a, b]$内两个点 x 和x' 是由一个待定的参数 τ 来决定的。从 $\tau=(b-a)/(b-x)$ 得到 $x=a/\tau+b(1-1/\tau)$, 再从 $\tau=(b-x)/(b-x')$得到值 $x'=a/\tau^2+b(1-1/\tau^2)$; 例如对于 $a=0$ 和 $b=1$, 得到 $x=2/3$, $x'=8/9$。在一个缩小了的搜索区间

中类似于 (a, x, x', b) 那样的分点配置，依赖于点 x 和 x' 的函数值；当 $f(x')\geqslant f(x)$ 时就选取 $a:=x$, $x:=x'$ 和 $x':=b(1-1/\tau^2)+a/\tau^2$, 另一方面当 $f(x')<f(x)$ 时则 $b:=x'$, $x':=x$, $x:=b(1-1/\tau)+a/\tau$。于是未定区间的长度当 $f(x')\geqslant f(x)$时变为 $L:=L(1-1/\tau^2)$，而当 $f(x')<f(x)$ 时为 $L:=L/\tau$。区间内的每一点都被看作具有成为极值点的相等可能性。这样，一个区间包含极值点的概率就与该区间的长度成比例；对于两个区间来说，比率为 $(1-1/\tau^2):1/\tau$。但是最适宜的判定链是在两个等概率情况之间作出判别。为此就有 $1-1/\tau^2=1/\tau$，即最优的 τ 值是

$$\tau=1/2+(1/2)\sqrt{5}=1.618033989\cdots$$

(见 I. 第 7 章)。对于未定区间来说成立递归关系 $L:=L/\tau$，使得 n 步搜索后 $L_n=L_1/\tau^n$。这一过程的有效性与两分搜索法的有效性之比率为 τ 比 $\sqrt{2}\approx1.142\cdots$，就是说大约高 14%。

与斐波那契过程的联系得自关系 $F_i=(1/\sqrt{5})[\tau^{i+1}-1/(-\tau)^{i+1}]$。当 $i=1$ 和 $i=2$ 时通过代入可得 $F_1=1$ 和 $F_2=2$。一般地，递归公式 $F_{i+1}=F_i+F_{i-1}$ 对于关系的右边也成立；假如在

$$\tau^{i+1}-1/(-\tau)^{i+1}=\tau^i-1/(-\tau)^i+\tau^{i-1}-1/(-\tau)^{i-1}$$

的两边乘以 $(-\tau)^{i+1}$，那末不管 i 是偶还是奇，得到关系 $\tau^{2i}(\tau^2-\tau-1)=\tau^2-\tau-1$，而这总是正确的，因为 τ 就是从 $\tau^2-\tau-1=0$ 确定出来的。

通过对线性递归关系的 z 变换方法得出同样的结果。引进辅助函数 $F(z)=\sum_{i=0}^{\infty}F_iz^i$ 并考虑到这个事实：从递归关系 $F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$，有

$$\sum_{i=2}^{\infty}F_iz^i=z\sum_{i=2}^{\infty}F_{i-1}z^{i-1}+z^2\sum_{i=2}^{\infty}F_{i-2}z^{i-2}。$$

于是得到

$$F(z)=F_0+F_1z+\sum_{i=2}^{\infty}F_iz^i=F_0+F_1z-zF_0+z\sum_{i=0}^{\infty}F_iz^i+z^2\sum_{i=0}^{\infty}F_iz^i$$

或 $$-F_0+z(F_0-F_1)=z^2F(z)+zF(z)-F(z),$$

这给出 $$F(z)=[(F_0-F_1)z-F_0]/(z^2+z-1)=\frac{-1}{z^2+z-1}。$$

对于 $$z_{1,2}=-(1/2)\pm(1/2)\sqrt{5}$$

部分分式展开为

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{z_1-z}-\frac{1}{z_2-z}\right];$$

和式中的每一项都可展开为 z 的各幂次的几何级数，将它与级数 $F(z)=\sum_{i=0}^{\infty}F_i z^i$ 比较系数就给出所述的关系。

【例】 用黄金分割搜索过程确定函数 $f(x)=|x^2-2|$ 的极小值，对于初始区间 $a_1=0$, $b_1=2$ 给出搜索点：$x_1=0.764, x_2=1.236, x_3=1.528, x_4=1.708$, $x_5=1.415$, $x_6=1.348$, $x_7=1.459$, $x_8=1.391$, $x_9=1.373$, $x_{10}=1.399$, $x_{11}=1.405$。

与迭代法 $x_{i+1}=x_i-(x_i^2-2)/3$ 相比，黄金分割过程趋于所求的解要慢得多。然而，这是对于更加一般的函数适用的过程，而迭代过程只能应用于特殊的函数。

多维搜索过程和非线性方程组

试图推广一维过程来确定几个变量的函数极值或者解非线性方程组。由于计算量的缘故，为此必须用现代数字计算机而方法的有效性比较少。如果在 $n=1$ 的情况下变量 90% 被消去，使得不定性区间只是原来的 10%，那末因为 $0.9\cdot0.9=0.81$，所以当 $n=2$ 时就留下 19% 的不定性，当 $n=3$ 时不定性总计为 27%，因为 $(0.9)^3\approx0.73$，而当 $n=4$ 时不定性增加到 34%，当 $n=5$ 时为 41%，$n=6$ 时为 47%，$n=7$ 时为 52%。

在 $n=1$ 的情况下对于非线性方程 $f(x)=0$，通过等价关系 $x=x-cf(x)$ 的途径达到迭代过程 $x^k=x^{k-1}-cf(x^{k-1})$，这里 k 和 $k-1$ 是上标。常数 c 是由优度准则最优地确定的。推广到 $n=2$，就是为要解方程组

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2)&=0\\ f_2(x_1, x_2)&=0\end{aligned}\quad\text{而令}\quad\begin{aligned}x_1&=x_1-c_{11}f_1(x_1, x_2)-c_{12}f_2(x_1, x_2),\\ x_2&=x_2-c_{21}f_1(x_1, x_2)-c_{22}f_2(x_1, x_2),\end{aligned}$$

其中非奇异阵 $c=(c_{ij})=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ 是按照优度准则选取的。

迭代过程中不仅 x_1^k 和 x_2^k 依赖于前一迭代步 x_1^{k-1} 和 x_2^{k-1} 的值，而且常数 $c_{ij}(x_1^k, x_2^k)$ 也依赖于 $c_{ij}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})$。它们的值确定收敛性状况，这能由*多步迭代算法*加以改进，这时第 k 次迭代步的逼近依赖于以前有限步的逼近。

对于极值的多维搜索，例如对于函数 $f(x_1, x_2)$ 的极大化，必要条件是在定义域内部 $f_{x_1}(x_1, x_2)=\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1, x_2)=0$ 和

$$f_{x_2}(x_1, x_2)=\frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1, x_2)=0。$$

梯度法或最速下降法 函数 $f(x_1, x_2)$ 的最大增加方向是由梯度 $(f_{x_1}(x_1, x_2), f_{x_2}(x_1, x_2))$ 的方向给出的。

如果要求函数 $f(x_1, x_2)$ 的极小值，那末从已经得到的点 (x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) 朝着梯度的相反方向移动必能造成一个改进。这意味着作出下列迭代过程：

$$x_1^k = x_1^{k-1} - l f_{x_1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})$$

和

$$x_2^k = x_2^{k-1} - l f_{x_2}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}),$$

其中 $l>0$。因此，在这种情况下矩阵 $\boldsymbol{C}$ 取为一个对角阵，对角元素为 l。

如果对于固定的 l 进行试验性的步骤，考察是否出现一个改进，若成功就选用它做一个新的间距 l，这称为*梯度法*。

然而，我们能试图在每一步去最优地选取因子 l。对于 l 的一个自然要求是要使函数值

$$F(l) = f[x_1^{k-1} - l f_{x_1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}),\ x_2^{k-1} - l f_{x_2}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})]$$

尽可能地小。对于 l 所要求的值，例如能由一维搜索过程来确定（见图16.4-4）。

如果在每一步都选取 l 的这一最优值，那末就说是*最速下降法*。

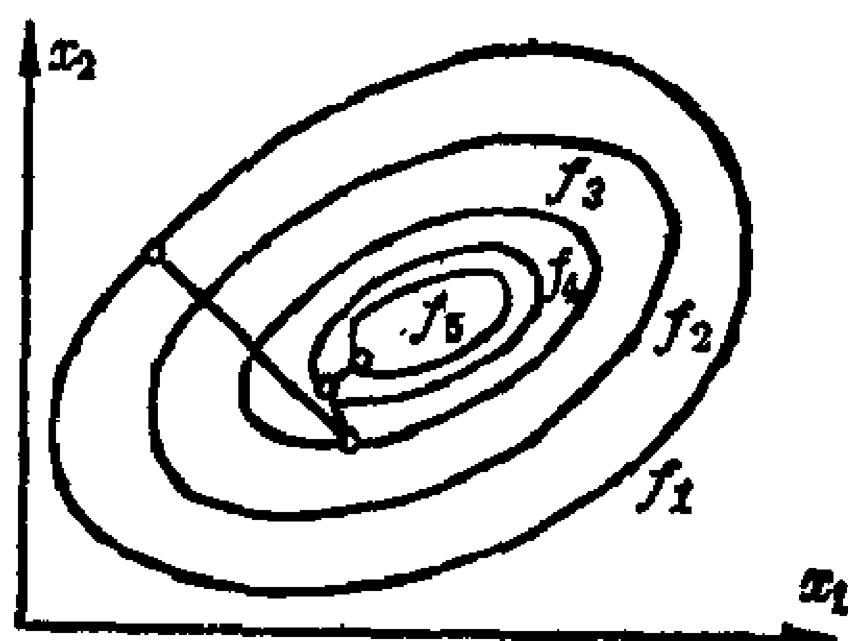


图 16.4-4 梯度法；$f(x_1, x_2)$ 的等值线 $f_1>f_2>f_3>f_4>f_5$

【例】 通过确定函数

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_2 = 2(x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 - 3/4$$

的极小值来说明这个方法；在这一简单情况下已知极小值为 $x_1 = x_2 = 0.5$。用*梯度法*得到递归公式

$$x_1^k = x_1^{k-1} - 2l(2x_1^{k-1} - 1)$$

和

$$x_2^k = x_2^{k-1} - l(2x_2^{k-1} - 1)。$$

按照*最速下降法*，最优的 l 得自

$$l = [4(2x_1^{k-1} - 1)^2 + (2x_2^{k-1} - 1)^2]/[16(2x_1^{k-1} - 1)^2 + 2(2x_2^{k-1} - 1)^2]。$$

如果从初始逼近 $x_1^0=x_2^0=0$ 开始，那末逐步地得到下列 l 值以及改进的逼近：

$l^0=0.278$	$x_1^1=0.556$	$x_2^1=0.278$
$l^1=0.414$	$x_1^2=0.457$	$x_2^2=0.461$
$l^2=0.283$	$x_1^3=0.504$	$x_2^3=0.482$
$l^3=0.429$	$x_1^4=0.497$	$x_2^4=0.497$

16.5 解线性方程和线性不等式的数值方法

线性方程组

m 个线性方程组 $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$，其中 $i=1, 2, \cdots, m$ 的解是 n 个数 x_j，其中 $j=1, 2, \cdots, n$。在 n 维空间中每一个方程当固定 y_i 时可以看作一超平面，其法向量为 $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$。若 $m=n$ 时这些法向量线性独立，也就是说如果方程 $\sum_{i=1}^{m}l_i\boldsymbol{a}_i=0$ 仅当所有的 l_i 为零时才能满足，那末 $n=m$ 个超平面就有一个公共交点，即唯一确定的坐标 x_j，$j=1, 2, \cdots, n$。如果 $m<n$ 且 m 个法向量线性独立，那末对于由它们来确定的 m 维子空间来说成立相应的结果。当 $m>n$ 时，m 个向量 $\boldsymbol{a}_i$ 必然线性相关。如果向量 $\boldsymbol{a}_{i_0}$ 是某些别的向量 $\boldsymbol{a}_j$ 的线性组合，此外 y_{i_0} 也是 y_j 同样的线性组合，从而属于 $\boldsymbol{a}_{i_0}$ 的超平面包含了哪些属于 $\boldsymbol{a}_j$ 的超平面的交线，则属于 $\boldsymbol{a}_{i_0}$ 的超平面并不表示什么附加条件，因而该方程可以不必考虑进去。而当 y_{i_0} 不是 y_j 的象 $\boldsymbol{a}_{i_0}$ 为 $\boldsymbol{a}_j$ 的线性组合同样的线性组合，则出现矛盾。在这种情况下，所给出的线性方程组不可解。

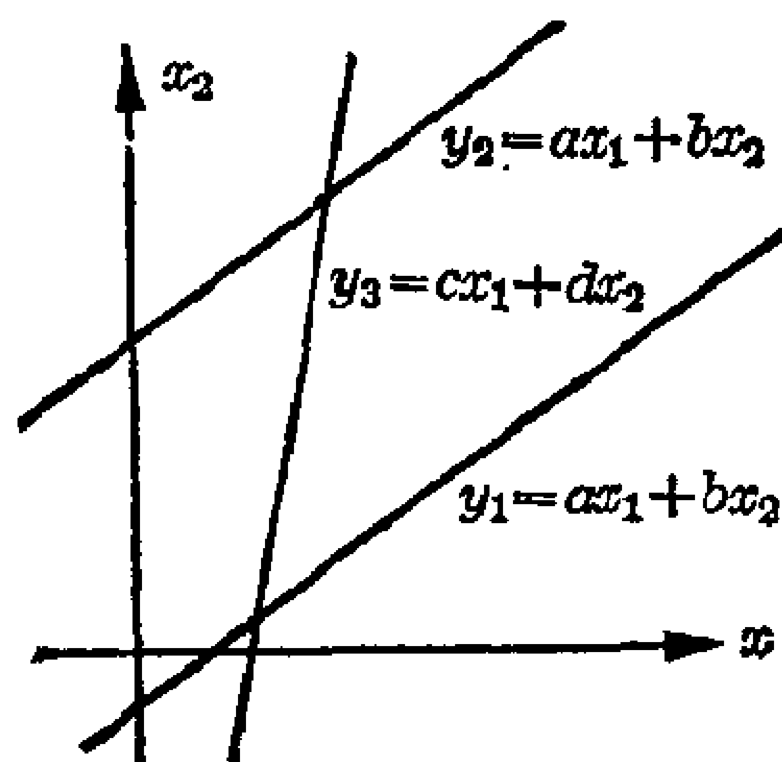


图 16.5-1 直线作为欧几里得空间内的超平面：两条直线相交，重合或者平行

当 $n=2$ 时超平面为直线，它们或者相交，或者彼此平行，或者重合（见图 16.5-1）。

约当消去法 方程组排成表的形式，使得第 r 行包含 x_j 的系数 a_{rj}，$j=1,2,\cdots,n$ 而第 s 列包含 x_s 的系数 a_{is}，$i=1, 2, \cdots, m$。

	x_1	x_2	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1s}	$\cdots$	a_{1n}	1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2s}	$\cdots$	a_{2n}	2
$\vdots$							
y_r	a_{r1}	a_{r2}	$\cdots$	a_{rs}	$\cdots$	a_{rn}	r
$\vdots$							
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{ms}	$\cdots$	a_{mn}	m
	1	2		s		n	

如果其中某个系数不为零，例如 $a_{rs}\neq 0$，那末 x_s 就能用 y_r 来消去。从 $y_r=a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rs}x_s+\cdots+a_{rn}x_n$ 得出

$$x_s=(1/a_{rs})[-a_{r1}x_1-a_{r2}x_2-\cdots+y_r-\cdots-a_{rn}x_n]。$$

将这个值代入 x_s 那里去就改变了表的系数。第 s 列的系数，即 y_r 的系数就变为 a_{1s}/a_{rs}, a_{2s}/a_{rs}, $\cdots$, a_{ms}/a_{rs}。对于其余的 b_{ij}，其中 $i\neq r$ 和 $j\neq s$，$b_{ij}=a_{ij}-(a_{is}\cdot a_{rj})/a_{rs}$。于是表采取形式：

	x_1	x_2	$\cdots$	y_r	$\cdots$	x_n	
y_1	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	$+a_{1s}/a_{rs}$	$\cdots$	b_{1n}	1
y_2	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	$+a_{2s}/a_{rs}$	$\cdots$	b_{2n}	2
$\vdots$							
x_s	$-a_{r1}/a_{rs}$	$-a_{r2}/a_{rs}$	$\cdots$	$+1/a_{rs}$	$\cdots$	$-a_{rn}/a_{rs}$	r
$\vdots$							
y_m	b_{m1}	b_{m2}	$\cdots$	$+a_{ms}/a_{rs}$	$\cdots$	b_{mn}	m
	1	2		s		n	

试图以这种方式尽可能地将每一个 x_s 换成某个 y_r。当未换的 y_j 所在的行与留下来的 x_i 所在的列相交处系数都为零时，这个过程就告结束。于是已换的 x_s 是已换的 y_r 和未换的变量 x_i 的线性组合。这些 x_i 并不服从任何进一步的条件，因此能作为自由参数而任意选取。未换的 y_j 仅仅是已换的 y_r 的线性组合。如果 y_j 的指定值不满足这些条件，则方程组无解。

如果这个过程能使所有的 x_s 都换成 y_r，那末在最终表中 x_s 是已换的 y_r 唯一确定的函数。此时任何一个还未换的 y_j 表示为 y_r 的唯一线性

组合。若 y_j 的指定值不满足这些条件，那就出现矛盾从而使方程组无解。

当 $m=n$ 时若所有的 x_s 都能换成 y_r，则最终表就提供了原始表中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

【例 1】 约当消去法应用到右列方程组，下列表中括号内的字数 $a_{rs}\neq 0$，从该行得出下一消元步骤，消元方程写在表格下方。

$$\boxed{\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=y_1=2\\ x_1-x_2+x_3&=y_2=4\\ x_1-x_2-x_3&=y_3=8\end{aligned}}$$

	x_1	x_2	x_3
y_1	(1)	1	−1
y_2	1	−1	1
y_3	1	−1	−1

$\boxed{x_1=y_1-x_2+x_3}$

	y_1	x_2	x_3
x_1	1	−1	1
y_2	1	−2	(2)
y_3	1	−2	0

$\boxed{x_3=-y_1/2+x_2+y_2/2}$

	y_1	x_2	y_2
x_1	1/2	0	1/2
x_3	−1/2	1	1/2
y_3	1	(−2)	0

$\boxed{x_2=y_1/2-y_3/2}$

	y_1	y_3	y_2
x_1	1/2	0	1/2
x_3	0	−1/2	1/2
x_2	1/2	−1/2	0

这个方程组有唯一解。代入给出 $x_1=3,\ x_2=-3,\ x_3=-2$。

【例 2】 对于方程组

$$\boxed{\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=y_1=2\\ x_1-x_2+x_3&=y_2=4\\ 3x_1-x_2+x_3&=y_3=8\end{aligned}}$$

同理可得

	x_1	x_2	x_3
y_1	1	1	−1
y_2	1	−1	1
y_3	3	−1	(1)

$\boxed{x_3=-3x_1+x_2+y_3}$

	x_1	x_2	y_3
y_1	(4)	0	−1
y_2	−2	0	1
x_3	−3	1	1

$\boxed{x_1=y_1/4+y_3/4}$

	y_1	x_2	y_3
x_1	1/4	0	1/4
y_2	−1/2	(0)	1/2
x_3	−3/4	1	1/4

所缺变量 x_2 的代换是不可能的，因为括号中的系数为零。该行给出了解的存在条件 $y_2=(y_3-y_1)/2$。而对于给出的数值它不满足此条件，所以方

程组无解。如果给出的值为 $y_1=2$, $y_2=3$, $y_3=8$, 那末 $y_2=(y_3-y_1)/2$ 得到满足并导致解 $x_1=2.5$, $x_3=0.5+x_2$, 其中 x_2 的值可任意选取。

修改了的线性方程组 $y_i=0=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i$ 导致约当代换问题的另一种形式。初始表格具有附加的 b_i 列。

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$-b_i$	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$-b_1$	1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$-b_2$	2
$\vdots$						r
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$-b_m$	m
	1	2	s	n	$n+1$	

因为在每一次用 y_r 换 x_s 的消元之后，第 s 列的系数以 $y_r=0$ 作为因子，所以这一列可忽略掉。

【例】 对于方程组

$$x_1+x_2-x_3-2=y_1=0$$
$$x_1-x_2+x_3-4=y_2=0$$
$$x_1-x_2-x_3-8=y_3=0$$

得到

	x_1	x_2	x_3	1
y_1	(1)	1	−1	−2
y_2	1	−1	1	−4
y_3	1	−1	−1	−8

$x_1=y_1-x_2+x_3+2$

	x_2	x_3	1
x_1	−1	1	2
y_2	−2	(2)	−2
y_3	−2	0	−6

$x_3=x_2+y_2/2+1$

	x_2	1
x_1	0	3
x_3	1	1
y_3	(−2)	−6

$x_2=-y_3/2-3$

	1
x_1	3
x_3	−2
x_2	−3

因此解为 $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=-2$。

高斯方法 这个解法是从约当消去过程得到的。任何一个被代换的变量 x_i 的行不再写入表中，而是分开表示。按这种方式，表格的规模渐渐的减缩，最后就得到一个非常易于求解的具有三角阵的线性方程组。

【例】 对于上面的例子，逐次得到如下的表格及方程，由此递归地得到解：

	x_1	x_2	x_3	1
y_1	(1)	1	-1	-2
y_2	1	-1	1	-4
y_3	1	-1	-1	-8

$\boxed{x_1=-x_2+x_3+2}$

	x_2	x_3	1
y_2	-2	(2)	-2
y_3	-2	0	-6

$\boxed{x_3=x_2+1}$

	x_2	1
y_3	-2	-6

$\boxed{x_2=-3}$

或者 $x_2=-3,\ x_3=-2,\ x_1=3$。

解线性方程组的迭代过程

通过代入 $a_{ij}=h_{ij}+c_{ij}$，给定的方程组 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$ 分解成

$$\sum_{j=1}^{n}h_{ij}x_j+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j=b_i。$$

选取 h_{ij} 使它们的矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})$ 具有易于形成的逆阵 $\boldsymbol{H}^{-1}=(h_{ri}^{-1})$。例如 $\boldsymbol{H}$ 为一对角阵；于是得出 $x_r=\sum_i h_{ri}^{-1}b_i-\sum_{i,j}h_{ri}^{-1}c_{ij}x_j$。这个方程组能写成迭代形式。如果取初始值 $x_r^0=\sum_i h_{ri}^{-1}b_i$，那末得到 $x_r^k=x_r^0-\sum_{i,j}h_{ri}^{-1}c_{ij}x_j^{k-1}$。当且仅当矩阵 $\sum_i(h_{ri}^{-1}c_{ij})=(k_{rj})$ 所有特征值的绝对值都小于1，这个过程收敛于线性方程组的解。矩阵 (k_{ij}) 的一个特征值 l 定义为使得方程组 $\sum_j k_{ij}x_j=lx_i$ 具有非平凡解，即不是所有的 x_j 都退化的一个数 l。这意着或者 $\sum_j|\sum_i h_{ri}^{-1}c_{ij}|<1$，或者 $\sum_r|\sum_i h_{ri}^{-1}c_{ij}|<1$。例如，若对矩阵 $\boldsymbol{K}=(k_{ij})$ 而言，条件 $|k_{ii}|\geqslant\sum_{i\neq j}|k_{ij}|$ 成立，则上述条件就能满足。于是逐次逼近的增量给出为

$$(x_r^k-x_r^{k-1})=\sum_{i,j}h_{ri}^{-1}c_{ij}(x_j^{k-1}-x_j^{k-2})。$$

【例】 为了用迭代法求解，给定的方程组要表示成适于迭代的形式：

$$\left.\begin{aligned}10x_1-x_2+x_3&=10\\x_1+5x_2+x_3&=5\\x_1-x_2+10x_3&=10\end{aligned}\right|\longrightarrow\left.\begin{aligned}x_1^k&=0.1x_2^{k-1}-0.1x_3^{k-1}+1\\x_2^k&=-0.2x_1^{k-1}-0.2x_3^{k-1}+1\\x_3^k&=-0.1x_1^{k-1}+0.1x_2^{k-1}+1\end{aligned}\right|$$

对于初始逼近 $x_1^0=1,\ x_2^0=1,\ x_3^0=1$，得到增量

$$\begin{pmatrix}0\\-0.4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.04\\0\\-0.04\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.004\\0.016\\0.004\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0012\\-0.0016\\0.0012\end{pmatrix}\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}$$

把这些增量加到初始逼近上去便给出四步迭代后的近似解 $x_1^4=0.9652$, $x_2^4=0.6144$, $x_3^4=0.9652$。

特征值问题　如果把线性方程组 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=x_i$, $i=1, 2, \cdots, n$ 看作以 y_j 为输入变量，以 x_i 为输出变量的某个线性系统的表述，它们的因果关系由矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 给出，那末相应于方程 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=lx_i$, 存在一个特征值 l 意味着将特征向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 用作输入变量，除了一个比例因子 l 之外它保持不变。特征值方程 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=lx_i$ 是一个齐次线性方程组，它有非零解。如果矩阵 $\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{I}$ 的行列式退化，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位阵，即

$$\det|\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}a_{11}-l & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-l & & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-l\end{vmatrix}=0。$$

这个特征方程为确定特征值的 n 次多项式。对于每一个特征值 l，从特征值方程得出相应的特征向量。利用特征向量，就能将一个系统分解开来，达到每一个输出变量仅依赖于一个输入变量。用这种方式就可在机械振动系统中引进正规振动。在回转仪理论中为了获得动力系统的简单形式，就将三根轴放在惯性矩矩阵的三个独立的特征向量方向上。电学 n 通道或 2 通道理论，是以相应于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的线性变换只用特征值和特征向量来表示为基础的。

绝对值最大的特征值及相关的特征向量，可以通过在电传输理论中证实的一个规则来获得。按照这个规则，绝对值最大的特征值估计及其特征向量逼近可以从连锁的输出向量中得出：由任意一个输入开始，在连锁中取一步的输出向量作为下一步的输入向量，足够多步骤以后就符合方程 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=lx_i$, $i=1, 2, \cdots, n$（见图 16.5-2）。最后一个输出向量近似地表示特征向量，而相继两个逼近的对应分量之商表示特征值。取本质上任意的初始向量 $x_i^0=b_i$，就有迭代过程 $x_i^k=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{k-1}$。商 x_i^k/x_i^{k-1}

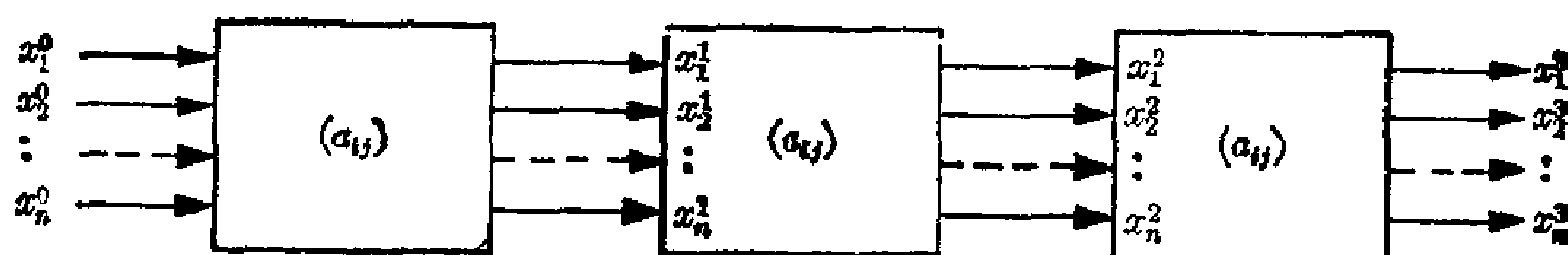


图 16.5-2　确定绝对值最大的特征值的连锁格式

彼此趋于相等，可作为绝对值最大的特征值的一个估计。

【例】 对于方程组

$$\left.\begin{aligned} x_1-x_2&=lx_1\\ 2x_2+x_3&=lx_2\\ x_2+x_3&=lx_3 \end{aligned}\right|$$

用迭代法，取初始值 $x_1^0=1$, $x_2^0=1$, $x_3^0=1$, 逐步得到

x_1	0	−3	−11	−32	−87	−231	−608
x_2	3	8	21	55	144	377	987
x_3	2	5	13	34	89	233	610
$k=$	1	2	3	4	5	6	7

对于 x_i^7/x_i^6, 得到 2.633, 2.62, 2.62 作为绝对值最大的特征值的一个逼近。从矩阵 A 及其特征方程获得真正的特征值:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{vmatrix}1-l&-1&0\\0&2-l&1\\0&1&1-l\end{vmatrix}=(1-l)^2(2-l)-(1-l)=0$$

其中 $(1-l)=0$ 或者说 $l_1=1$, $l^2-3l+2=1$ 或者说

$$l_2=(3+\sqrt{5})/2\approx2.6173,$$

还有 $$l_3=(3-\sqrt{5})/2\approx0.3825。$$

线性不等式

在数学方法应用于经济和计划工作的时候，会出现从不等式组

$$y_i=-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i\geqslant0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

来确定 n 数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的问题。如果 n 数组看作 n 维空间的一个点，那末 m 个不等式中的每一个就定下了以超平面 $-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j+b_i=0$ 为界的半空间。当 $m\leqslant n$ 时，这些超平面交成至少是 $n-m$维的子空间。对于实践中重要的情况 $m>n$, 交成的图形包括由这些半空间相交而成的角

点。这种交集是给定的不等式所要求的解域。这是一个 n 维的凸多面体；若联结它内部或边界上的任何两点，则它包含这段直线上的所有点。一个不包含无限远点的有限多面体，完全由它的角点或顶点确定。

在 $m>n$ 并且系数矩阵 (a_{ij}) 具有秩 n 的假定之下，可以用一个算法来判定是否存在 n-数组为不等式的解，以及如果有解的话怎样获得解域的角点。

初始信息

	$-x_1$	$-x_2$	$\cdots$	$-x_n$	1
y_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
$\vdots$					
y_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m

$$x_1=-b_{11}y_1-b_{12}y_2-\cdots-b_{1n}y_n+b'_1,$$
$$x_2=-b_{21}y_1-b_{22}y_2-\cdots-b_{2n}y_n+b'_2,$$
$$\cdots$$
$$x_n=-b_{n1}y_1-b_{n2}y_2-\cdots-b_{nn}y_n+b'_n$$

	$-y_1$	$-y_2$	$\cdots$	$-y_n$	1
y_{n+1}	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$		$b_{n+1,n}$	b'_{n+1}
y_{n+2}	$b_{n+2,1}$	$b_{n+2,2}$		$b_{n+2,n}$	b'_{n+2}
$\vdots$					
y_r	b_{r1}	b_{r2}		b_{rn}	b'_r
$\vdots$					
y_m	b_{m1}	b_{m2}		b_{mn}	b'_m

在上表所提出的初始信息中，假定系数 a_{ij} 的开头 n 行是线性独立的。用约当消去法则每一个变量 x_i 能换成变量 y_j。这样就得到不等式组的一个标准形式，它由 n 个等式和一表格形成，变量 $y_i(y_i\geqslant 0)$, $i=1, 2, \cdots, n$ 是这样确定的：对于 $i=n+1, \cdots, m$ 也要成立 $y_i\geqslant 0$。然后由 n 个等式给出所要求角点的 n 数组。

如果在此表格中的 $b'_i\geqslant 0$，那末点 $y_i=0$, $i=1, \cdots, n$ 导致一个解。

如果 b'_i 之中有一个数为负，譬如 $b'_r<0$，那末点 $y_i=0$, $i=1, 2, \cdots, n$ 不满足第 r 个不等式，因为 $y_r=b'_r<0$。此外若这一行的每一个系数

$b_{rj}\geqslant 0$, $j=1, 2, \cdots, n$, 则没有点 $y_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, n$ 能满足这个不等式。于是所给的不等式组无解。

不过当 $b'_r<0$ 时若在第 r 行中有一个系数 $b_{rs}<0$, 则用第 s 列的系数形成商 b'_i/b_{is}, $i=n+1, \cdots, m$。如果除了 b'_r/b_{rs} 外还有别的非负商，那末选取最小的。若这个最小的出现在第 i_0 行中，则选 b_{i_0s} 作为约当步骤的交换元素，用 y_s 交换变量 y_{i_0}。从等式 $y_{i_0}=-\sum\limits_{j\neq s}b_{i_0j}y_j-b_{i_0s}y_s+b'_{i_0}$ 给出值 $y_s=(-\sum\limits_{j\neq s}b_{i_0j}y_j-y_{i_0})/b_{i_0s}+b'_{i_0}/b_{i_0s}$。项 b'_{i_0}/b_{i_0s} 是非负的。如果 $i_0=r$, 那末通过约当步骤得到新的列 1 中所有的元素非负，并且找到了一个角点。

然而如果 $i_0\neq r$, 那末必须估计其他行 $i\neq i_0$ 的项。在约当步骤后它们满足 $-b_{is}\cdot b'_{i_0}/b_{i_0s}+b'_i=b_{is}[(b'_i/b_{is})-(b'_{i_0}/b_{i_0s})]$。对于 $b'_i/b_{is}>b'_{i_0}/b_{i_0s}\geqslant 0$ 的那些行 i, 在 $b_{is}<0$ 的情况下得到改进，因为在约当步骤以后这个负项具有较小的绝对值。正项 $b_{is}>0$ 仍然为正。对于 $b'_i/b_{is}<0$ 的那些行 i, 在 $b_{is}<0$ 的情况下，项 b'_i 为正的还是为正；在 $b_{is}>0$ 的情况下，b'_i 为负的，现在仍为负而其绝对值甚至会增大。

能够证明，对于 $b'_i/b_{is}\geqslant 0$ 但 $b_{is}<0$ 的情况，对于 $b'_i/b_{is}<0$ 但 $b_{is}>0$ 的情况，以及对于别的诸如 $b'_{i_0}/b_{i_0s}=0$ 的特殊情况，在有限步交换以后造成一个只有正元素的表，它导致解域的一个角点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

【例】 要确定不等式

$$-x_1+2x_2-3x_3-2\geqslant 0,\ 4x_1-x_2+4x_3-5\geqslant 0,$$
$$-3x_1+x_2-4x_3+3\geqslant 0,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,$$

解域的一个角点。这个不等式组已经成标准形式。按照上面的算法逐次地得到下表

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	1	-2	3	-2
y_2	-4	1	-4	-5
y_3	3	-1	4	3

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_3$	1
y_1	$-5/4$	$-5/4$	$-3/4$	$-17/4$
y_2	-1	0	1	-2
x_3	$3/4$	$-1/4$	$1/4$	$3/4$

	$-x_3$	$-x_2$	$-y_3$	1
y_1	$20/12$	$-20/12$	$-4/12$	-3
y_2	$4/3$	$-1/3$	$4/3$	-1
x_1	$4/3$	$-1/3$	$1/3$	1

	$-x_3$	$-y_1$	$-y_3$	1
x_2	-1	$-12/20$	$4/20$	$36/20$
y_2	1	$-4/20$	$84/60$	$-8/20$
x_1	1	$-4/20$	$24/30$	$32/20$

	$-x_3$	$-y_2$	$-y_3$	1
x_2	-4	-3	-4	3
y_1	-5	-5	-7	2
x_1	0	-1	-1	2

16.6 算图过程

算图是用图形表示出几个变量之间的函数相关性，在这种方式下它们之中一个变量的值可以通过简单的作图从其他变量的已知值得出来。

两个变量的算图

对于函数关系 $y=f(x)$，笛卡尔坐标系中的图形表示已经形成了一个算图，它是由两根坐标轴以及一般地说一条曲线所组成的。它的图形是可变的，如果沿着 x 轴和 y 轴标上的不是单位距离的倍数而分别地是长度 $\xi=\varphi(x)$ 和 $\eta=\psi(y)$，其中 φ 和 ψ 是可逆的单调函数，适当地选取这些函数，就可得到一张图纸。这时*标度承载形* $\eta=g(\xi)$ 表示所给的关系 $y=\psi^{-1}g(\varphi(x))=f(x)$，于是 $f=\psi^{-1}g\varphi$，这里 ψ^{-1} 是 ψ 的反函数。如果 $\eta=\alpha+\beta\xi$ 或 $\psi(y)=\alpha+\beta\varphi(x)$，则*标度承载形是一条直线*。

【例】 1．对于*半对数纸*，$\xi=x$ 和 $\eta=\log_a x$。函数 $y=Ka^{Lx}$ 作为标度承载形具有一条直线，其中的 $\alpha=\log_a K$ 和 $\beta=L$。

2．对于双重对数纸，$\xi=\log_a x$ 和 $\eta=m\log_a y$。函数 $y=Kx^L$ 作为标度承截形具有一条直线，此时 $\alpha=m\log_a K$ 和 $\beta=mL$。

3．对于概率纸，$\xi=x$ 和 $\eta=F^{-1}(y)$，而 F^{-1} 为高斯误差函数 $F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{w}\exp[-x^2/2]dx$ 的反函数。那末对于函数 $y=F(K+Lx)$，即所有正规分布的分布函数来说，标度承载形是一条直线。

*双重标度*是一种标度承载形，相应于足够多点数的 x 值，在其背面直接排列着相伴的 y 值。可以想象，这些标度值是从 x 轴和 y 轴通过平行投影转移得来的，以致这两个轴不必再给出了(见图 16.6-1)。如果曲线的每一点用一个参数值 u 表示，它在一个固定的 x，y 系中是通过

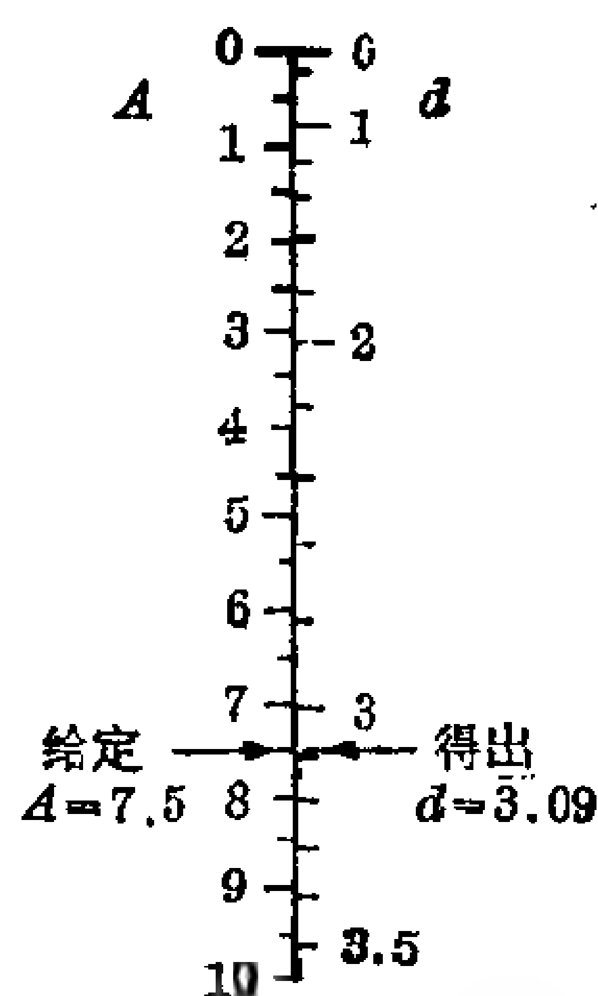


图 16.6-1 圆面积 $A=\pi d^2/4$ 与其直径 d 之间关系的双重标度

$x=\varphi(u)$ 和 $y=\psi(u)$ 来规定的，那末就获得变量 u 的函数标度或曲线标度。于是这个函数标度的曲线表示函数 $\varphi(u)$ 和 $\psi(u)$ 之间的关系。

【例】 对于函数 $x=\varphi(u)=e^u+u$ 和 $y=\psi(u)=e^u-u$，因为 $u=(1/2)\ln(x+y)$，所以就得到标度承载形的方程 $(x-y)/2=\ln(x+y)/2$（见图 16.6-2）。

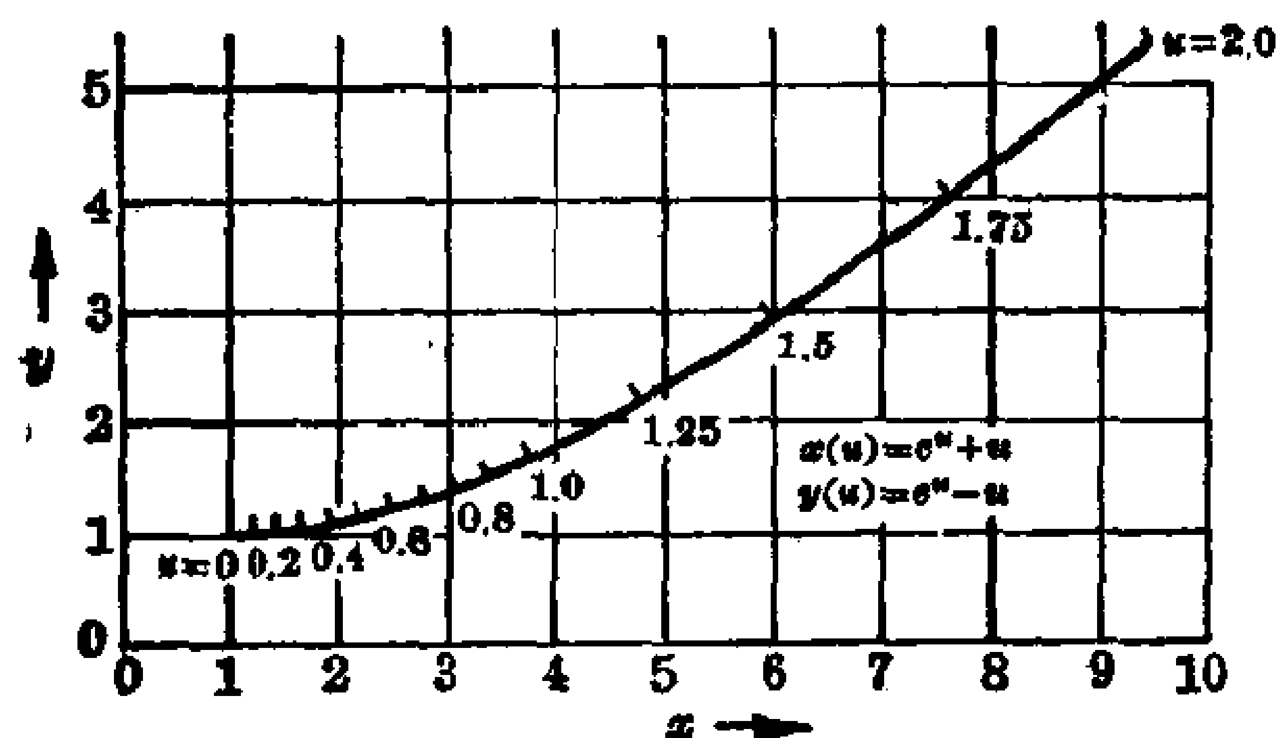


图 16.6-2　标度承载形，其中方程 $(x-y)/2=\ln[(x+y)/2]$

三个变量的算图

对于函数关系 $F(u,v,w)=0$，为了易于将一个变量的值从其余两个变量的值中读出来，通常采用直射算图或列线图。

直射算图 如果三个变量之中的每一个都看作参数，那末借助于六个函数 $\varphi_i,\psi_i,i=1,2,3$，就能在唯一的 x，y 坐标系中找到由方程 $x_1=\varphi_1(u)$，$y_1=\psi_1(u)$；$x_2=\varphi_2(v)$，$y_2=\psi_2(v)$；$x_3=\varphi_3(w)$，$y_3=\psi_3(w)$所给定的三个函数标度。为便于读出，附带要求函数 φ_i，ψ_i 使其相应于方程 $F(u_0, v_0, w_0)=0$ 的三重值 (u_0, v_0, w_0) 位于一条直线上（见图 16.6-3），就是说顶点为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)的三角形面积为零。索罗 (Soreau) 方程是它的一个充分必要条件。

索罗方程	$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(u) & \psi_1(u) \\ 1 & \varphi_2(v) & \psi_2(v) \\ 1 & \varphi_3(w) & \psi_3(w) \end{vmatrix}=0$

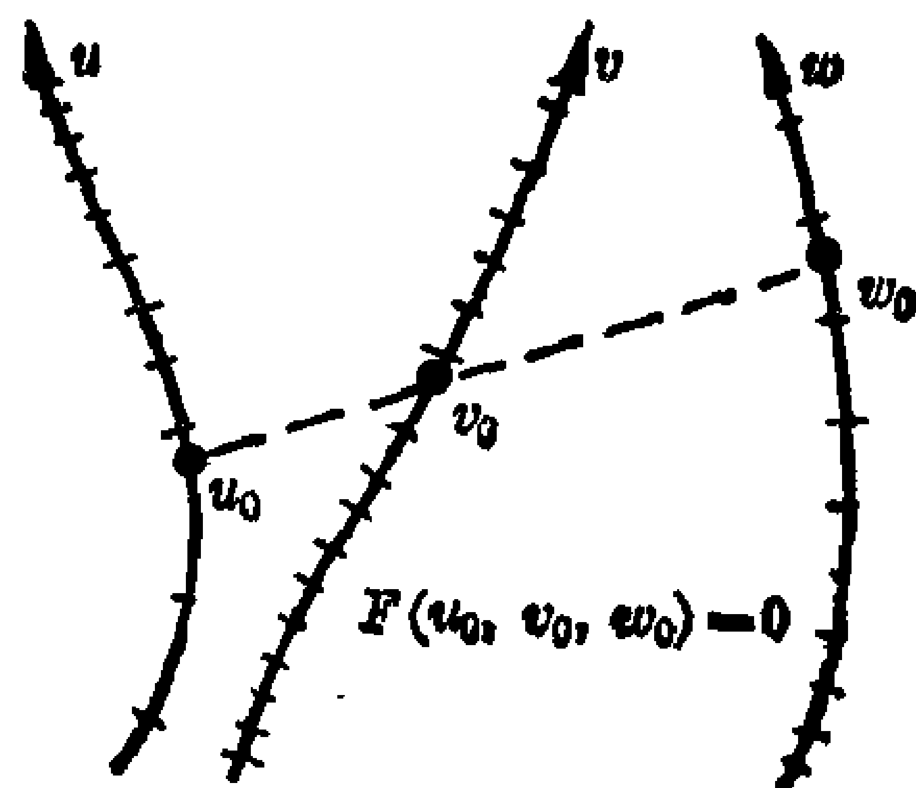


图 16.6-3　直射算图的相关三重值 (u_0, v_0, w_0) 位于一条直线上

如果有了满足这个方程的函数 φ_i，ψ_i，那末函数标度就由 $x_i=\varphi_i$ 和 $y_i=\psi_i$ 来确定；当然这不是唯一的，因为每一个将直线重又变为直线的普通坐标平面变换会给出一个新的列线图。这样的一个变换能用以改善变量变化区间的大小来提高读出的精度。

直射算图的基本形式和标度方程 (1) 如果$(y_1-y_2)/(x_1-x_2)=(y_1-y_3)/(x_1-x_3)$，那末三点$(x_1,y_1)$，$(x_2, y_2)$，$(x_3, y_3)$就位于一条直

线上。若将 $x_1=g_1(u)$, $y_1=f_1(u)$; $x_2=-g_2(v)$, $y_2=-f_2(v)$ 和 $x_3=-g_3(w)$, $y_3=-f_3(w)$ 写进去，则在 f_i, g_i 之间不存在线性关系；这就造成三个曲线标度且具有基本形式

$$[f_1(u)+f_2(v)]/[g_1(u)+g_2(v)]$$
$$=[f_1(u)+f_3(w)]/[g_1(u)+g_3(w)]。$$

(2) 当 $x_1=0$ 时条件方程(1)就变成

$$(y_1-y_2)/(-x_2)=(y_1-y_3)/(-x_3)$$

或
$$y_1=(y_3x_2-y_2x_3)/(x_2-x_3)。$$

于是若标度 S_1, S_2, S_3 由 $x_1=0$, $y_1=f_1(u)$, $x_2=-1/g_2(v)$, $y_2=f_2(v)/g_2(v)$ 和 $x_3=1/g_3(w)$, $y_3=f_3(w)/g_3(w)$ 来确定，则 s_1 为直线而在 f_2, 6_2 和 f_2, g_3 之间不存在线性关系。基本形式为 $f_1(u)=[f_2(v)+f_3(w)]/[g_2(v)+g_3(w)]$。

(3) 如果将 $y_2=px_2+q$ 代入条件方程 (2)，使得 $x_1=0$, $y_1=f_1(u)$; $x_2=-1/g_2(v)$, $y_2=px_2+q$; $x_3=1/g_3(w)$ 和 $y_3=f_3(w)/g_3(w)$，那末 S_1 和 S_2 为直线，p 可任意地选取，只是在 f_3 和 g_3 之间不存在线性关系；基本形式为 $f_1(u)=[-p+qg_2(v)+f_3(w)]/[g_2(v)+g_3(w)]$。

(4) 如果通过 $y_3=mx_3+c$ 使 S_3 也变成直线，这里 m 可自由选取，那末在其他与(3)等同的条件下基本方程变为

$$f_1(u)=[-p+qg_2(v)+m+cg_3(w)]/[g_2(v)+g_3(w)]。$$

(5) 如果将 $x_2=1$ 代入条件方程(2)，那就变为 $y_1=(y_3-y_2x_3)/(1-x_3)$ 或 $y_1(1-x_3)+y_2x_3-y_3=0$。现在若引进 $x_1=0$, $y_1=f_1(u)$; $x_2=1$, $y_2=f_2(v)$ 和 $x_3=g_3(w)/[f_3(w)+g_3(w)]$, $y_3=-h_3(w)/[f_3(w)+g_3(w)]$，则标度 S_1 和 S_2 为平行直线，而标度 S_3 为直线仅在 f_3 和 g_3 之间存在线性关系时才行。通过代入，得到基本形式

$$f_1(u)f_3(w)+f_2(v)g_3(w)+h_3(w)=0。$$

(6) 将 $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$ 代入条件方程(2)就得到 $y_1=(by_3-cy_2)/(b-c)$ 或利用条件(1)得 $y_1(b-c)=y_3(b-a)+y_2(a-c)$，即 $y_3(a-b)=y_1(c-b)+y_2(a-c)$。由 $y_1=f_1(u)/(c-b)$, $y_2=f_2(v)/(a-c)$ 和 $y_3=f_3(w)/(a-b)$ 就得出基本形式 $f_3(w)=f_1(u)+f_2(v)$，这里标度 S_1, S_2, S_3 为平行直线。

(7) 一般性的研究表明，除了已经导出的之外，下面的三个基本形式也是可能的：

$$f_3(w)=f_1(u)f_2(v),$$

$$f_1(u)f_2(v)f_3(w)=f_1(u)+f_2(v)+f_3(w)$$

以及　$$f_1(u)f_2(v)f_3(w)+f_1(u)+f_2(v)g_3(w)+h_3(w)=0。$$

【例】 化简了的三次方程 $w^3-3pw-2q=0$ 的实解能从直射算图得到，从基本形式

$$f_1(p)f_3(w)+f_2(q)g_3(w)+h_3(w)=0$$

可以看出这个算图有两条直线标度：$x_1=0$，$y_1=-3p$；$x_2=1$，$y_2=-2q$ 和 $x_3=1/(1+w)$，$y_3=-w^3/(1+w)$。由此读出：

$$f_1(p)=-3p,$$

$$f_2(q)=-2q,$$

$$f_3(w)=w,$$

$$g_3(w)=1,$$

$$h_3(w)=w^3$$

(见图 16.6-4)。

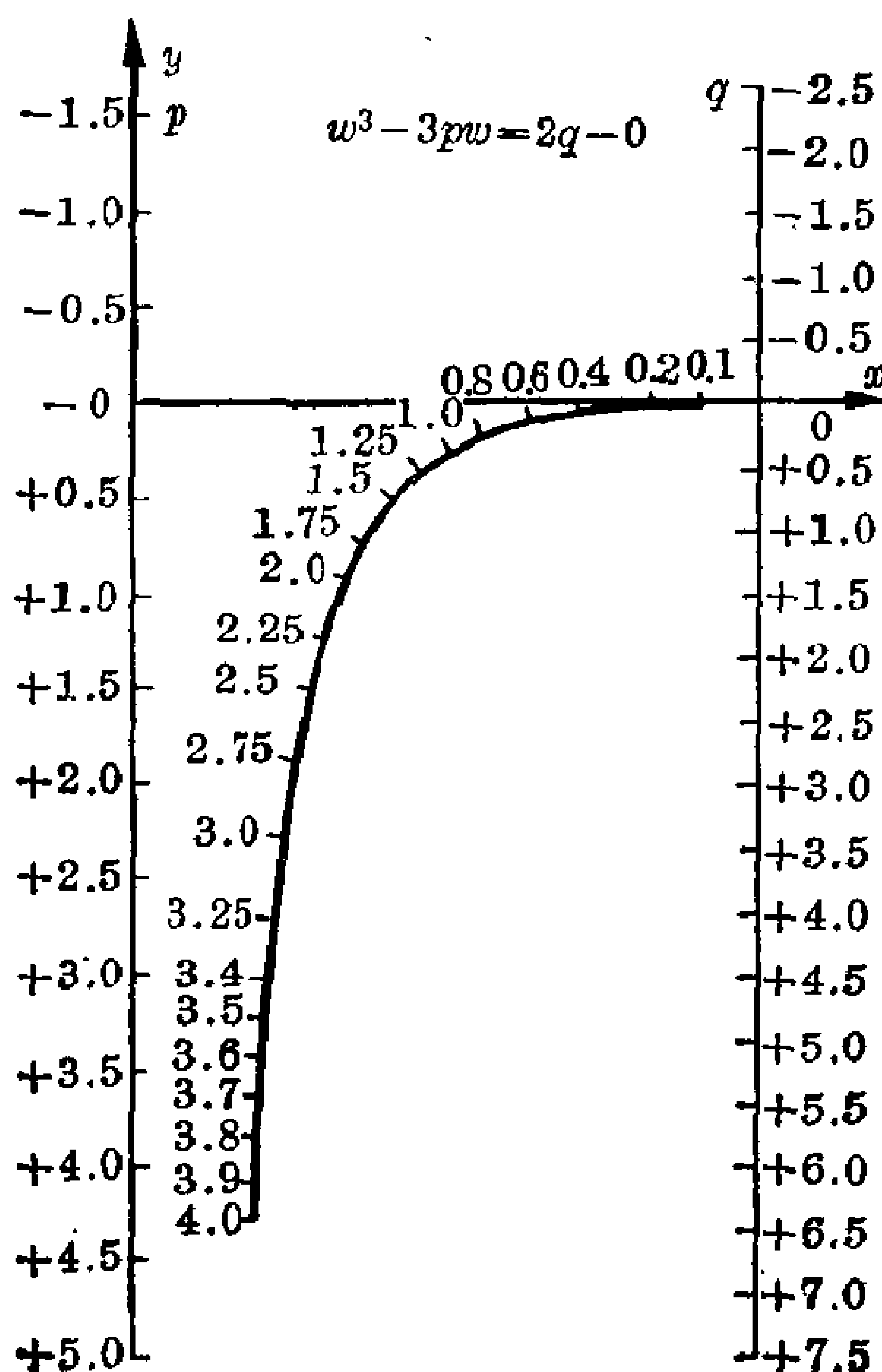


图 16.6-4　方程 $w^3-3pw-2q=0$ 实解的算图

三个以上变量的算图

不限于将三个点(每个函数标度的点)彼此用一条直线连结起来，可以寻找连结更多个点的其他构造，例如能用 x，y 平面上的三个点来确定唯一的圆的中心或三角形的中心。

对于函数依存性 $F(u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2)=0$，最多为六个变量，已经构造出了**截距图**，它用直线连结三个**函数格**。所谓函数格，可理解为两族坐标曲线，例如极坐标系的曲线 $r=\text{const}=\sqrt{x^2+y^2}$ 和曲线 $\psi=$常数$=\arctan y/x$。由这个格关联着的变量的两个值确定一个点，坐标为 $x_1=\varphi_1(u_1, u_2)$，$y_1=\psi_1(u_1, u_2)$。对于其余两个函数格，另外可得到 $x_2=\varphi_2(v_1, v_2)$，$y_2=\psi_2(v_1, v_2)$ 和 $x_3=\varphi_3(w_1, w_2)$，$y_3=\psi_3(w_1, w_2)$。

重要的是，对于一个函数格必须在 (u_1,u_2)和(x_1,y_1)之间存在唯一的可逆对应关系。象直射算图的情况那样，要求三个函数格 (u_1, u_2)，$(v_1,$

v_2), (w_1, w_2) 满足给定条件 $F(u_1^0, u_2^0, v_1^0, v_2^0, w_1^0, w_2^0)=0$ 的三个点 (u_1^0, u_2^0), (v_1^0, v_2^0)和(w_1^0, w_2^0) 位于一条直线上(见图 16.6-5)。在笛卡尔坐标系中对于所有的函数格必须成立下边列出的条件:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(u_1, u_2) & \psi_1(u_1, u_2) \\ 1 & \varphi_2(v_1, v_2) & \psi_2(v_1, v_2) \\ 1 & \varphi_3(w_1, w_2) & \psi_3(w_1, w_2) \end{vmatrix} = 0$$

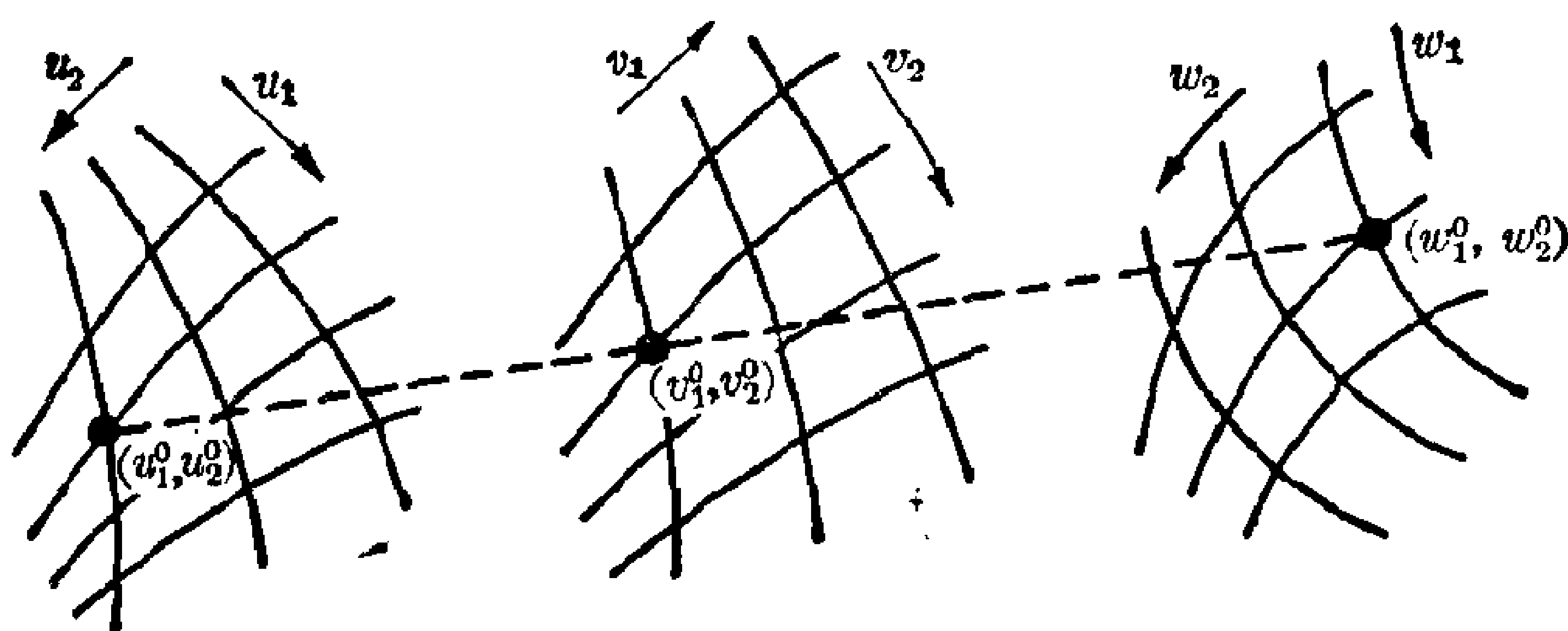


图 16.6-5 三个函数格的相应点位于一条直线上

如果进行图算的方程包含 5 个变量，那末其中的 4 个变量由 2 个函数格来表示而对于第 5 个变量还需一个标度承载形；对于 4 个变量来说，有一个函数格和两个标度承载形就行了。

当然，并不是每一个包含 6 个变量的关系都可由截距图来进行图算的。另一方面，如果对于某个关系获得了这样的一个图，那末应用将直线重又映射为直线的任意一个平面变换，可以在截距图形式下得到进一步的解。

【例】 关系 $(a-b)\varphi_3(w_2)=[a-\varphi_3(w_1)]\psi_2(v)+[\varphi_3(w_1)-b]\psi_1(u)$ 等价于下边列出的行列式方程:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \psi_1(u) \\ 1 & b & \psi_2(v) \\ 1 & \varphi_3(w_1) & \psi_3(w_2) \end{vmatrix} = 0。$$

从它立刻可找到标度方程，所要求的函数格的方程为 $x_1=a$, $y_1=\psi_1(u)$; $x_2=b$, $y_2=\psi_2(v)$; $x_3=\varphi_3(w_1)$, $y_3=\psi_3(w_2)$。实行起来普通的毫米纸就行了，相距 $b-a$ 的两条直线必须按照函数标度 $\psi_1(u)$和 $\psi_2(v)$加以编号。同样的毫米纸格子可作为函数格。垂直于标度的轴必须按照函数 $\varphi_3(w_1)$

加以编号，而平行于标度的轴则按 $\psi_3(w_2)$ 编号。

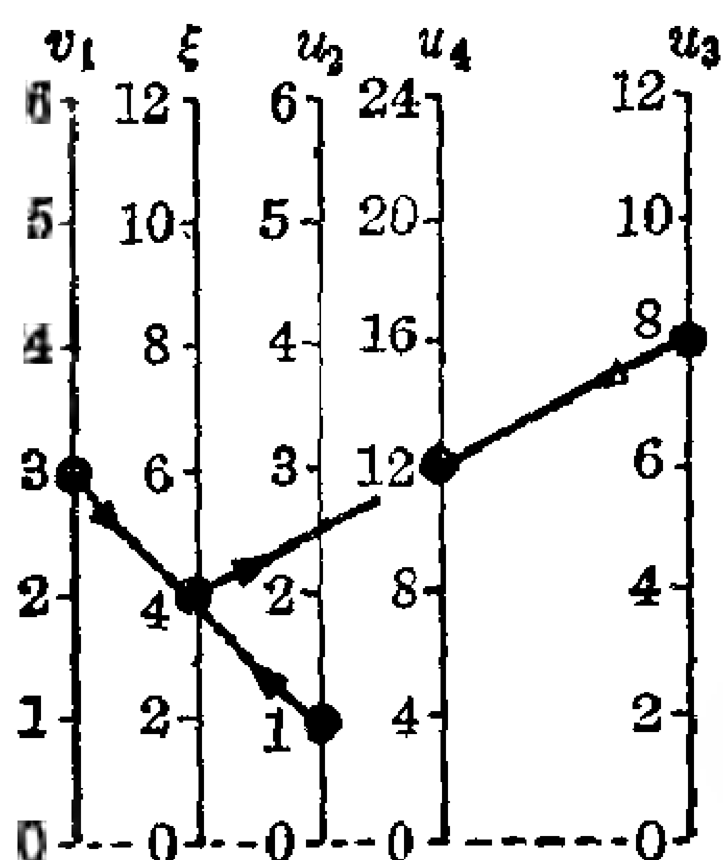


图 16.6-6　$u_4=u_1+u_2+u_3$ 直射图中的辅助变量 ξ

常常用直射算图链来建立三个以上变量的图算关系。在这样的算图中，对于两个变量的给定值，首先从一个直射算图上确定一个辅助变量例如 ξ(见图 16.6-6)的值。对于如此确定的值以及第三个变量的一个给定值，从第二个直射算图上确定再一个辅助变量，或者也可能为解变量的一个值，用这种方式继续下去，总可算出各个辅助变量的值，直到从最后一个直射算图上获得所要求变量的值为止。

16.7　蒙特-卡洛方法

蒙特-卡洛 (Monte-Carlo) 方法是利用随机性概念解决确定性问题例如积分赋值、确定极值、解方程组以及解常微分方程或偏微分方程等等问题的所有各种过程的总称。用来阐明方法的积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 的例子可以直接推广到 n 重积分；事实上蒙特-卡洛方法的价值只是在高维问题中才充分地显示出来。积分的有限区间 $[a, b]$ 可以用线性变换 $u=(x-a)/(b-a)$ 化为 $[0, 1]$。

概率过程　假定函数 $f(x)$ 是有上界和下界的，于是可作变换使满足条件 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$。

所要求的积分是由曲线 $f(x)$，横坐标以及可能平行于纵坐标轴的直线段所围区域的面积值(见图 16.7-1)。如果包含这块面积的整个单位正方形是均匀地由物质覆盖着的，例如它们是从厚薄均匀的纸板上剪下来的，那末两者质量的比可看作一种区间估计。若想象两块面积由 n 个等质量的点所均匀覆盖，又若它们之中 m_f 个位于所求的那块面积内，则通过计数得 m_f/n 作为

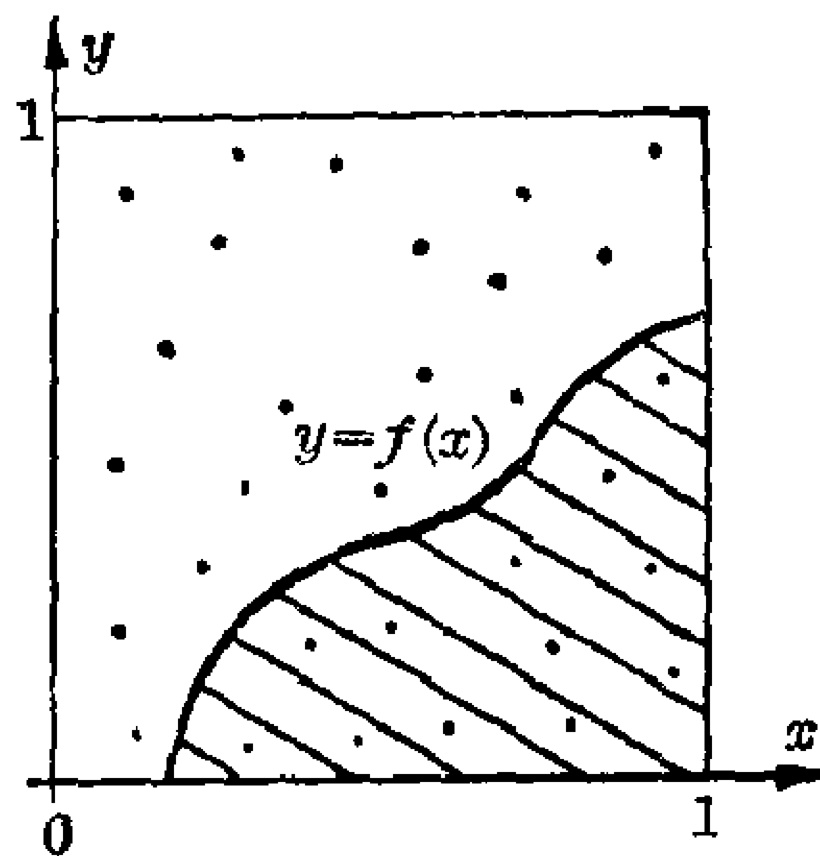


图 16.7-1　用蒙特-卡洛方法计算积分 $\int_0^1 f(x)dx$

所求面积的一个估计。这里点数 n 至少为 10^4。它们的均匀分布在 x 方向和在 y 方向都必须是真正随机的，使得所作的是 n 次相互独立的试验。如果这时相继的估计已相差到小于预先规定的精度范围，均匀分布的随机数就能在某个 n 值中断这个过程。若$(k-1)$为执行的步数而 I_{k-1} 为其结果，那末递归计算格式

$$I_k=I_{k-1}+(\xi_k-I_{k-1})/k=[(k-1)I_{k-1}+\xi_k]/k$$

被证明是有用的，这里如果第 k 点落在 $f(x)$ 的区域里，$\xi_k=1$，否则 $\xi_k=0$。

平均值过程 如果仅对于自变量选取[0, 1]区间上的均匀分布随机变量 x_i，而 $f(x_i)$ 每次是算出来的，那末统计平均 $M[f(x)]$ 乘以区间的宽度 1 就是所求积分的一个估计。因为算术平均是 $M[f(x)]$ 的一种有效估计，所以能得出 $(1/n)\sum f(x_i)=\int_0^1 f(x)dx$。这里递归公式

$$I_k=I_{k-1}+[f(x_k)-I_{k-1}]/k=[I_{k-1}(k-1)+f(x_k)]/k$$

已证明为合适的。

均匀分布随机数的产生 当使用数字计算机时，不常在计算机内造一个随机发生器来产生随机数。如果要避免过分复杂，这种真正的随机发生器只有相对小的灵活性。此外，不能保征所产生的随机数序列长时期的平稳性，就是说它们的统计性质在试验进程中会改变。

为此原因，随机数是由确定性的递归公式产生的。这样的**伪随机数**应当与真正的随机数序列的差别尽可能地小，这就要求相继伪随机数的**拟独立性**并且不能出现周期性的数列。建立在初等数论之上的递归公式已被证明是特别有用的。

1. 简化的斐波那契数 $[F_k=F_{k-1}+F_{k-2}]\bmod m$;
2. $y_{k+1}=[(2^r+1)y_k+c]\bmod 2^m$，其中 $r>2$ 而 c 为偶数;
3. $y_k=s\cdot y_{k-1}\bmod m$，例如 $s=23$ 而 $m=10^8+1$;
4. $y_k=\sum_{j=1}^{r} c_j y_{k-j}\bmod m$，这里 $y_0, y_1, \cdots, y_{r-1}$ 是 0 与 $m-1$ 之间适当的数而 c_j 是适当的常数，$j=1, 2, \cdots, r$。

因为所有这些伪随机数是由模数 m 或模数 2^m 确定的，它们就得由 $x_k=y_k/m$ 或 $x_k=y_k/2^m$ 化为区间[0, 1]上的数。

第17章 数学最优化

虽然欧几里得早已系统阐述过最优化问题，但只是在17和18世纪，随着微分和变分演算的发展，才给出了解决这种问题的数学工具。**经济学上的最优化问题**是具有辅助条件的极值问题，它的特点常常是变量的个数非常大并且要找的是非负解。

一般地，经济学上所研究的事件看作由各个不同的活动所组成的一个过程，目的是通过抽象获得相应的数学模型。对于每个活动存在若干变量，它们的实现依赖于由可用容量所加上的约束 $g_j(x_i)=0$，所以并不是对于每一个活动都能选取最满意的变式。代之以寻找可能变式的一种组合，使给定的**目标函数** $f(x_i)$ 取到整个过程的最大值或最小值；$g_j(x_i)=0$ 和 $x_i \geqslant 0$ 称为约束。

最优化问题	$\max\{f(x_i) \mid g_j(x_i)=0,\ x_i \geqslant 0\}$	$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ n>m$

对于**一般的非线性最优化**，给定的函数 f 和 g_j 没有限制；对于**二次最优化**，$f(x_i)$ 是 x_i 的二次函数而 $g_j(x_i)$ 是线性的；对于**线性最优化**，f 和 g_j 都是线性函数。

17.1 线性最优化

在最优化中，通常对于同阶矩阵（参看II.第4章）$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 也定义关系 $<$（"小于"），$\boldsymbol{A}<\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}$ 当且仅当对于每一个 i 和 j，分别有 $a_{ij}<b_{ij}$ 或 $a_{ij}\leqslant b_{ij}$。相应地也能分别用 $a_{ij}>b_{ij}$ 或 $a_{ij}\geqslant b_{ij}$ 来定义 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$。值得注意的是，可能有两个同阶的矩阵，三个关系 $<$，$>$，$=$ 没有一个是成立的，而对于两个有理数或实数，在任何情况下这些关系中恰有一个关系成立。

若 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 是具有 n 行和 1 列的 $n\times1$ 阶矩阵，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 $m\times1$ 阶的，$\boldsymbol{O}$ 是 $m\times n$ 阶零矩阵，$\boldsymbol{o}$ 是 $n\times1$ 阶零矩阵，以及 $\boldsymbol{c}^T$ 是从 $\boldsymbol{c}$ 交换行和列得到的，矩阵 $\boldsymbol{c}$ 的转置，那末对于线性的目标函数和约束来说，$f(x_i)$ 可表示为 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ 而 $g_j(x_i)=0$ 可表示为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$。当设 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{h}$ 时，极大值问题就变成极小值问题。作为一种几何解释，$\boldsymbol{x}$ 可看作 n 维欧几里得空间 R_n 中的一个向量。

线性最优化	$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}>0\}$ 或 $\min\{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Bx}\geqslant\boldsymbol{h},\boldsymbol{x}\geqslant0\}$

根据矩阵 $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{h}$ 的元素可区别为各种问题：若这些系数都是已知常数，则是**确定性**问题，若系数（或其中一部分）能在已知的区间上变化，则是**参数**问题，若系数（或其中一部分）是随机变量，则是**随机**问题。

【例 1】 **最大利润**。若 $\boldsymbol{x}$ 的分量 x_i 是加工过程中的产品或商品的件数，c_i 是对应于一件产品 i 的利益，则 $\boldsymbol{x}$ 表示一个加工计划，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ 是**总利益**，如外部交换的利润或收益。进一步地，若 k 是 m 次活动（如一组机器）中的一次活动，b_k 是可用容量（储备资本），且若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的系数 a_{ki} 表示每件商品的活动水平，则使加工计划达到最大的问题就是在考虑到给定容量的可用性情况下计算最大的收益。模型建立在两个假定的基础上，即假定收益和活动性与产品的总量成比例，假定件数的向量 $\boldsymbol{x}$ 只能有整数分量 $x_i\geqslant0$。进一步假定对此商品的需求是无限制的。若不是这种情况，则销售限额 d_i 可引进为附加的约束 $x_i\leqslant d_i$。

【例 2】 **饮食问题**。设 i 是一种营养物，x_i 是在要确定的食品组合中这种营养物的总量，再设 d_i 是其单位数量的价值。设 k 是一种维生素或一种营养物质，h_k 是它必须出现的最小总量，而 b_{ki} 是营养物 i 含有这种成分的量。这个问题的解导致一个最小化问题，不过它在这种简单形式下只能适用于动物饲料最廉价的组合。要得到一个旅馆食谱成本最低化的不同模型，须根据精确、具体的附加假设条件，诸如**每餐的逐日分布**，即早餐、中餐和晚餐的逐日分布；**一餐的结构**，例如小吃、主菜和甜点心结构；**点菜**，例如点三个菜以及**菜谱的最小周期**，例如二星期。

康托洛维奇(Kantorovich)在 1939 年系统阐述了在线性最优化中的最大值问题，他用解因子的方法解决了这个问题。饮食问题大约由科恩

非尔德(Cornfield)在1941年和由斯蒂格勒(Stigler)在1945年予以解决。

伍德(Wood)和丹济希(Dantzig)相当广泛地阐述了**线性最优化**问题，并由丹济希用**单纯形法**解决了，它在许多方面有进一步的发展。

单纯形法 对于线性最优化，约束由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$ 并且 $\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 或者说 $a_{j1}x_1+\cdots+a_{ji}x_i+\cdots+a_{jn}x_n\leqslant b_j$ 并且 $x_i\geqslant 0$ ($j=1, 2, \cdots, m$, $i=1, 2, \cdots, n$) 组成 (参看 II. 第16章)。正如条件 $2x_1+3x_2\leqslant 4$ 定义一个闭半平面那样，若 $\boldsymbol{x}$ 理解为 n 维空间 R_n 中的一个**点**或**向量**，则上面的约束恰好确定 $(n+m)$ 个闭半空间。若 $(n+m)$ 个约束是相容的，则 $(n+m)$ 个半空间的交集 R 至少包含一点。R 的每一点是一个**可行解**或一个**可行向量**。

一个问题的**可行区域** R，作为 $(n+m)$ 个半空间的一个交集，是一个**凸多面体**(见图17.1-1)。假定 R 非空且有界。

目标函数 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ 在几何上可解释成考虑曲面 $f(\boldsymbol{x})=$ 常数，这代表在 R_n 中的一族平行超平面 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=k$。要求找出一个与凸多面体 R 有非空交集的，具有最大 k 的超平面。显然，对于这个超平面形成 R 的一个**支面**，即此超平面与 R 有一个公共点。相应地，f 在 R 中的最大值只能出现在边界点上。

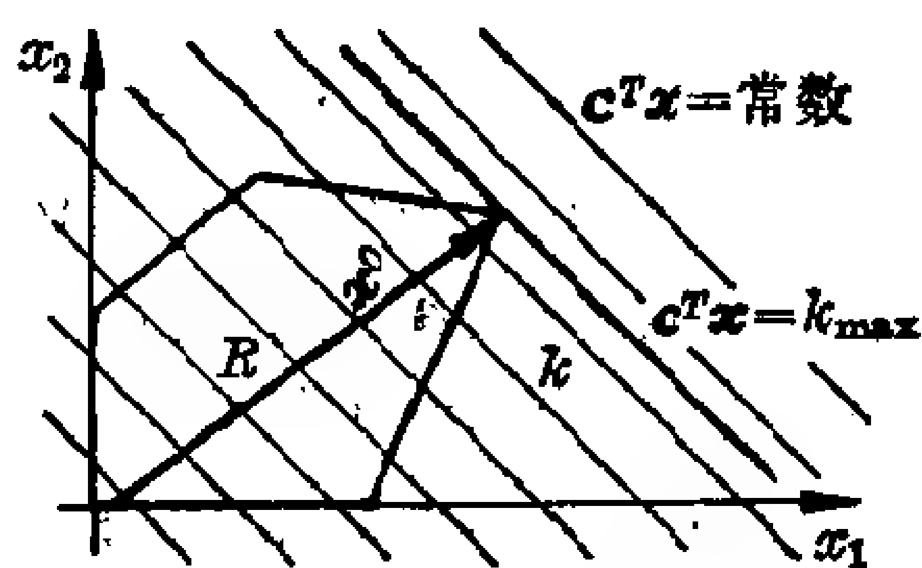


图17.1-1 在二维空间 R_2 中最大值问题的几何表示；R 是可行区域，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=k_{\max}$ 是支面，$\boldsymbol{x}^0$ 是可行基本解

由于上面的假设，R 是它顶点的凸包。设 $\boldsymbol{x}^l$ ($l=1, 2, \cdots, s$) 是 R 的顶点，它至多有 $\binom{m+n}{n}$ 个。因此每一个 $\boldsymbol{x}\in R$ 能表示成 $\boldsymbol{x}=\sum_{l=1}^{s}\lambda_l\boldsymbol{x}^l$，其中 $\lambda_l\geqslant 0$ 和 $\sum_{l=1}^{s}\lambda_l=1$。于是得出 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}^T\left(\sum_{l=1}^{s}\lambda_l\boldsymbol{x}^l\right)=\sum_{l=1}^{s}\lambda_l\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^l=\sum_{l=1}^{s}\lambda_l f(\boldsymbol{x}^l)$。在 s 个值 $f(\boldsymbol{x}^l)$ 中有一个最大的，譬如说 $f(\boldsymbol{x}_0^{l_0})$。从而肯定成立 $f(\boldsymbol{x})=\sum_{l=1}^{s}\lambda_l f(\boldsymbol{x}^l)\leqslant\sum_{l=1}^{s}\lambda_l f(\boldsymbol{x}^{l_0})=f(\boldsymbol{x}^{l_0})$。当 R 有界且非空时，最优化问题就归结为确定 R 的**顶点** $\boldsymbol{x}^l$。在任何情况下，解要在它们中间去找。

引进 m 个(所谓)松弛变量 $\bar{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ \vdots\\ x_{n+m}\end{pmatrix}$，就能把 m 个不等式 $\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\cdot x_i\leqslant$

b_j 写成方程 $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + x_{n+j} = b_j$。若 $\boldsymbol{I}$ 是单位阵，则得到一个线性最优化问题的另一种形式。

具有松弛变量的线性最优化	$\max\{(\boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{o})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \bar{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{I}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{o}, \bar{\boldsymbol{x}}\geqslant\boldsymbol{o}\}$

为了简单起见，重新写成 $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x, \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{o}\}$，其中适当扩大了的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times(n+m)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 $(n+m)\times 1$ 阶矩阵。可以假定 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 m，否则或者方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 不相容从而不存在可行向量，或者某几个方程为多余的，它们是其余那些方程的线性组合。

恰有 m 个正分量且这 m 个正分量正好属于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个线性无关列的一个向量 $\boldsymbol{x}$，称为一个**可行基本解**。

可行基本解的确是可行区域 R 的顶点。

为了解析地证明这个定理，利用**凸线性组合** $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2=\lambda(\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^2)+\boldsymbol{x}^2(0<\lambda<1)$，它确定连接点 $\boldsymbol{x}^1$ 和 $\boldsymbol{x}^2$ 的直线段上的中间点 $\boldsymbol{x}$。唯有 R 的顶点不能表示为 R 中两个不同点的凸线性组合。若 $\boldsymbol{A}$ 有 m 个线性无关列 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$，又若一个可行基本解是 $\boldsymbol{x}^1$，具有 $x_1^1>0, \cdots, x_m^1>0$，$x_{m+1}^1=\cdots x_{m+n}^1=0$，则具有两个不同可行点 $\boldsymbol{x}^2$ 和 $\boldsymbol{x}^3$ 的这样一个凸线性组合 $\boldsymbol{x}^1=\lambda\boldsymbol{x}^2+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^3$ 是不可能的。因为对于 $t=1, 2, 3$ 和 $r=1, 2, \cdots, n$，有 $x_{m+1}^t=0$，从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^3=\boldsymbol{b}$ 中得出 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^3)=\boldsymbol{o}$，即它有平凡解 $\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^3=\boldsymbol{o}$；但这意味着 $\boldsymbol{x}^1$ 必是一个顶点。

另一方面，若假设 $\boldsymbol{x}^1$ 是具有正分量 $x_1^1, \cdots, x_k^1$ 的一个顶点，那末，$\boldsymbol{A}$ 的相应列 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 必定线性无关。因为 $\boldsymbol{A}$ 有 m 行，$k\leqslant m$ 必定成立，由此得出 $\boldsymbol{x}^1$ 是一个可行基本解。因为若列 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 线性相关，则能找到不全为零的数 $y_1, \cdots, y_k$，使得 $\sum_{j=1}^{k} y_j\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{o}$，从而对于 $y>0$ 也有 $y\sum_{j=1}^{k} y_j\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{o}$。由于 $\sum_{j=1}^{k} x_j^1\boldsymbol{a}_j \pm y\sum_{j=1}^{k} y_j\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{b}$，可以选取充分小的数 y，构造两个向量 $\boldsymbol{x}^2=(x_1^1+yy_1, \cdots, x_k^1+yy_k, 0, \cdots, 0)$ 和 $\boldsymbol{x}^3=(x_1^1-yy_1, \cdots, x_k^1-yy_k, 0, \cdots, 0)$，使它们的前面 k 个分量是正的。然而取 $\lambda=\frac{1}{2}$ 有表示式 $\boldsymbol{x}^1=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^3$，所以 $\boldsymbol{x}^1$ 不是一个顶点，这与第一个假设矛盾。

退化情况 $k<m$ 是可能的，但是这里不予讨论。退化情况能毫无困

难地用单纯形法处理。

这样，R 至多有 $\binom{m+n}{n}=\binom{m+n}{m}$ 个顶点。在这有限个顶点或可行基本解中，必能确定目标函数的最大函数值 $k_{\max}$。此点不一定是唯一地确定的。例如，当 R 的边界与所求的超平面 $c^T x=k_{\max}$ 有 $d(\geqslant 1)$ 维的交集时，就是这种情况。若假定 A 的最初 m 列线性无关，由这些列形成的矩阵记为 A_1，其余的记为 A_2，则 $A=(A_1, A_2)$，这里 A_1 是 $m\times m$ 阶非奇异的；A_2 是 $m\times n$ 阶的。类似地，划分 $c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，这里 c_1 和 x_1 各由最初 m 个分量组成。于是方程 $Ax=A_1x_1+A_2x_2=b$ 能解出 x_1，给出 $x_1=A_1^{-1}b+A_1^{-1}A_2(-x_2)$。假定 $A_1^{-1}b>0$，连同 $x_2=0$，这就给出一个可行基本解 x^1。代入目标函数得到

$$f(x)=c_1^T A_1 b+[c_1^T A_1^{-1}A_2-c_2^T](-x_2)。$$

当 $x_2=0$ 时，目标函数的值变成 $f(x^1)=c_1^T A_1^{-1}b$。这些关系式列于所谓的**单纯形表**中。

单纯形表	$A_1^{-1}b$	$A_1^{-1}A_2$
	$c_1^T A_1^{-1}b$	$c_1^T A_1^{-1}A_2-c_2^T$

可行基本解位于前一列，而后一行给出相应的目标函数值。

在单纯形表中可以区别三种互相排斥的情况。

1. $c_1^T A_1^{-1}A_2-c_2^T$ 的 n 个元素是非负的。在这种情况下存在一个最优解，因为若 x_2 的任一元素取成正的，则目标函数的值至多变小。

2. $c_1^T A_1^{-1}A_2-c_2^T$ 包含一个负元素，譬如说第 k 个元素为负；假设 $A_1^{-1}A_2$ 第 k 列的所有元素是非正的。于是 x_2 的第 k 个分量可任意地增加。由于 $x_1=A_1^{-1}b+A_1^{-1}A_2(-x_2)$，$x_1$ 的分量同时改变，因此总能得到一些可行解，对于它们来说目标函数超出一切界限；$f(x)$ 在可行区域内无界，从而问题无解。

3. $c_1^T A_1^{-1}A_2-c_2^T$ 的第 k 个元素仍是负的，但对于每个 k，$A_1^{-1}A_2$ 的第 k 列至少包含一个正元素。在这种情况下，也可通过增大 x_2 的第 k 个分量使目标函数增大。不过只在 $x_1=A_1^{-1}b+A_1^{-1}A_2(-x_2)$ 减少着的分量中有一个取值为零之前才能这样做。x_1 的其余（改变了的）分量以及用这

种方式确定的x_2的第k个分量，形成一个使目标函数具有较大值的新的可行基本解。能推出A的相应列的线性无关性。因为只存在有限多个可行解并且由于目标函数在每一个单纯形步的增加就得到新的基本解，所以在有限步以后就达到情况1(最优解)或情况2。

最初可行基本解的导出 若$b>o$，则引进松弛变量并从要求$\max(c^T, o)\begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix}$，其中$\bar{x}=b$，出发得到一个可行基本解。若没有松弛变量可引进，则一定能达到$b\geqslant o$(在每个实际问题中，还是$b>o$)。利用所谓**人工变量**$y=(y_1, \cdots, y_m)$，就可首先求解问题

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j \mid Ax+Iy=b,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\right\},$$

对于这个问题$y=b$提供一个最初可行基本解。若$\sum_{j=1}^{m} y_j$的最小值是正的，则初始问题*没有可行解*。若最小值为零，则上述问题的最优解$(x^0, y^0)=(x^0, o)$就是初始问题的一个可行基本解。就计算程序来说选择上面所描述的过程，它是独立于问题的。

对偶性 问题$\min\{b^T y \mid A^T y\geqslant c,\ y\geqslant o\}$称为问题$\max\{c^T x \mid Ax\leqslant b,\ x\geqslant o\}$的*对偶问题*。后者也就叫做*原始问题*。这里$y$是$m\times 1$阶矩阵或者说$R_m$中的一个向量。满足$A^T y\geqslant c$和$y\geqslant o$的向量$y$称为**可行的**。

原始问题	$\max\{c^T x \mid Ax\leqslant b,\ x\geqslant o\}$
对偶问题	$\min\{b^T y \mid A^T y\geqslant c,\ y\geqslant o\}$

若x和y(分别属原始和对偶问题)是可行的，则$c^T x\leqslant b^T y$。

证：x可行意味着$Ax\leqslant b$并且$x\geqslant o$；y可行意味着$A^T y\geqslant c$并且$y\geqslant o$。这样，$c^T x\leqslant (A^T y)^T x=(y^T A)x=y^T(Ax)\leqslant y^T b=b^T y$。

由此容易得到：

若x^0和y^0是可行的，又若$c^T x^0=b^T y^0$，则x^0和y^0分别是原始问题和对偶问题的最优解。

证：按照上面的定理，对于每个可行的x，有$c^T x\leqslant b^T y^0=c^T x^0$。另一方面，对于每个可行的$y$，有$b^T y\geqslant c^T x^0=b^T y^0$。第一个不等式表明$x^0$是原始问题的解，而第二个不等式表明$y^0$是对偶问题的解。

盖尔(Gale)、库恩(Kuhn)和塔克(Tucker)证明了下面的对偶性定理。

对偶性定理：x^0 是原始问题的一个解当且仅当存在一个可行的 y^0 使得 $c^T x^0 = b^T y^0$；y^0 是对偶问题的一个解当且仅当存在一个可行的 x^0 使得 $b^T y^0 = c^T x^0$；原始问题和对偶问题两者可解当且仅当两者同时具有可行的向量。

若一个问题仅可近似地求解，而人们要估计它与最优解之差有多大，则这些命题特别有用。当使用计算机为了使计算费用保持在经济界限内而不得不中断计算时，这也可能是重要的。

【例 3】　在所示的约束下极大化 x_1+4x_2。利用松弛变量 x_3 和 x_4 这些约束以及目标函数 $f(x)$ 都变成下列方程。

$$\begin{array}{l} 2x_1+3x_2\leqslant 4, \\ 3x_1+x_2\leqslant 3 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1\cdot x_3+0\cdot x_4+2x_1+3x_2=4, \\ 0\cdot x_3+1\cdot x_4+3x_1+1\cdot x_2=3, \\ 0\cdot x_3+0\cdot x_4+x_1+4x_2=f(x) \end{array}$$

从这些方程得到：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&3&1\end{pmatrix},\ A_1=A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix},$$

$$c_1^T=(0,\ 0),\ c_2^T=(1,\ 4),\ x_1^T=(x_3,\ x_4),\ x_2^T=(x_1,\ x_2),$$

因而得到新的方程与单纯形表 S_1。因为 x_2 包含在基内，导致目标函数

$$\begin{array}{l} x_3=4-2x_1-3x_2 \\ x_4=3-3x_1-x_2 \\ f(x_1^T)=0+(0-1)(-x_1)+(0-4)(-x_2) \end{array}$$

S_1	4	2	3
	3	3	1
	0	−1	−4

值的最大增长，所以用 x_2。通过方程 $x_3=4-2x_1-3x_2$，确定 $x_2=\frac{4}{3}$，因为这蕴涵着 $x_3=0$，这样它就离开基。根据对于 x_2，x_4 的修改了的方程和 $A_1^{-1}A_2$ 的值及 $c_1^T=(4,\ 0)$ 与 $c_2^T=(1,\ 0)$，能确定目标函数 $f(x)=4x_2+0\cdot x_4+x_1+0\cdot x_3$ 的新形式：

$$f(x_1^T)=\frac{16}{3}+\left(\frac{8}{3}-1\right)(-x_1)+\left(\frac{4}{3}-0\right)(-x_3)。$$

$$x_2=\frac{4}{3}-\frac{2x_1}{3}-\frac{x_3}{3}$$

$$x_4=\frac{5}{3}-\frac{7}{3}x_1+\frac{1}{3}x_3$$

$$A_1^{-1}A_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

S_2			
	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$
	$\frac{16}{3}$	$\frac{5}{3}$ ·	$\frac{4}{3}$

我们得到单纯形表 S_2。这个问题的最优解出现在 $x_2=\frac{4}{3}$, $x_4=\frac{5}{3}$, $x_1=x_3=0$。在图 17.1-2 中表明原始问题未用松弛变量的可行区域 R, 以及直线 $x_1+4x_2=\frac{16}{3}$。

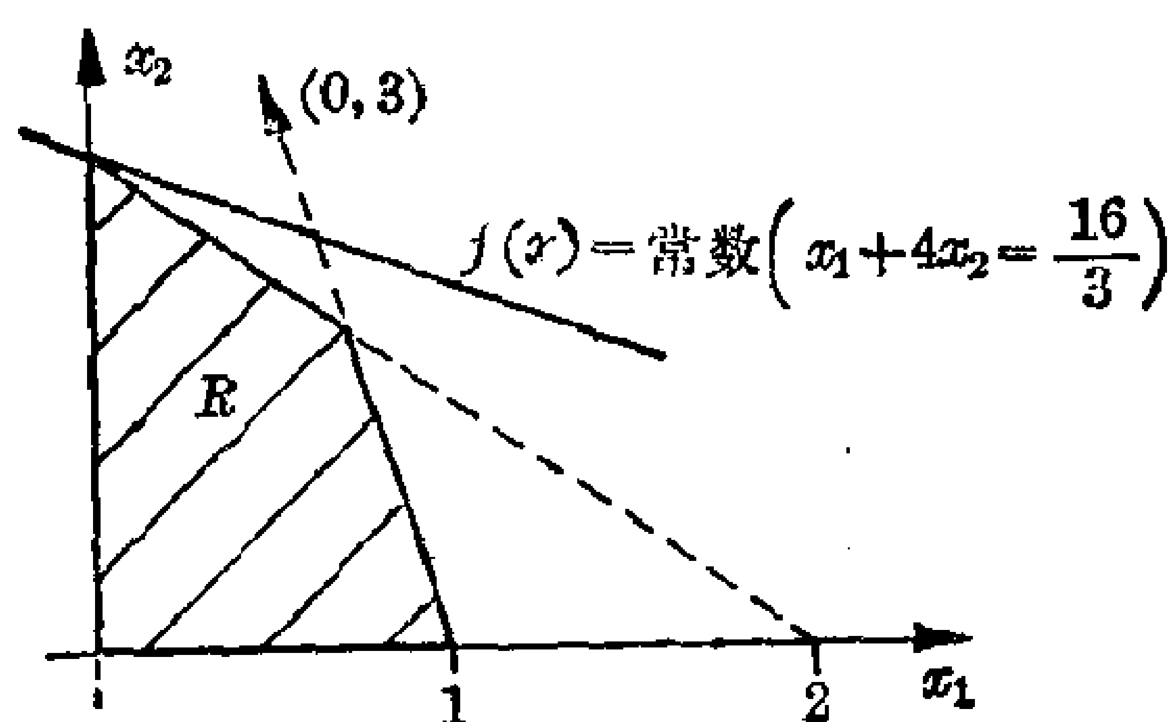


图 17 1-2 目标函数为 $f(\boldsymbol{x})=x_1+4x_2$ 的原始问题解

影子价格。在相应于最优解的目标函数形式中，属于松弛变量的系数 $\boldsymbol{c}_1^T A_1^{-1}\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{c}_2^T$ 形成对偶问题的解向量 $\boldsymbol{y}^0$。在例子中，$\boldsymbol{y}^{0T}=\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, 因此 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^0=\frac{16}{3}=f(\boldsymbol{x}^0)$。这个对偶解向量的分量也叫做影子价格。它们指出当 $\boldsymbol{b}$ 的相应分量增加一个单位时，目标函数增加的程度。在例子中，$b_2=3$ 的增加得不到任何东西，因为在最优解中 $x_4>0$ 而相应的 $3x_1+x_2<3$ 不受影响。另一方面，若用 $b_1=5$ 代替 $b_1=4$, 则容易验证会增加 $\frac{4}{3}$。

单纯形法的应用 为了减少舍入误差，减少所需的计算机存储以及所需的计算机时间，单纯形法在许多方面已有改进。

莱姆克(Lemke)在 1954 年发展了对偶单纯形法，他经由对偶问题的解来求解原始问题。为了节省计算机时间将原始的和对偶的单纯形组合起来。*修正单纯形法*经常同逆矩阵乘积形式的表示一起使用。对于广泛的问题，在一定数量的单纯形步以后，通过重反演回复到初始矩阵的数据，以减少舍入误差。

丹济希对变量具有上界($x\leqslant d$)的原始问题发展了一个特殊算法，其计算量可与无上界问题的计算量相当。最后，对于具有特殊矩阵结构的问题，其中只有阴影区域才是非零元素(见图 17.1-3)，丹济希和沃尔夫在1960年提出了一种*分解方法*，把总问题分解成一个主问题和几个辅助问题。用这个方法在1963年以前已经在适当的计算时间内解决了具有32000个约束和2百万个变量的问题。

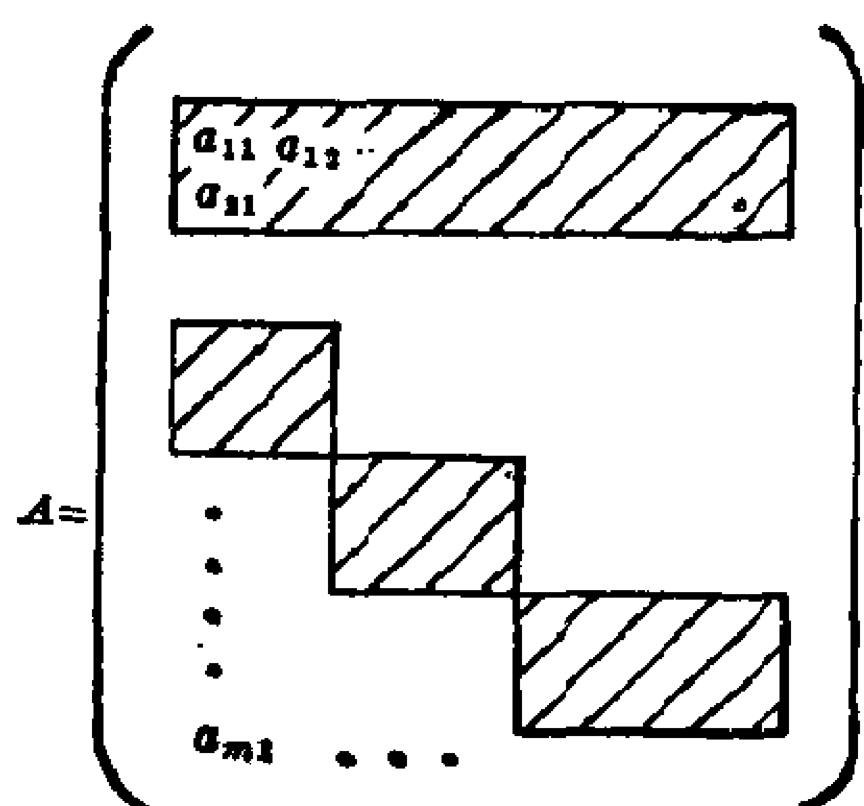


图 17.1-3 分解方法；矩阵格式，其中只有指出的元素不为零

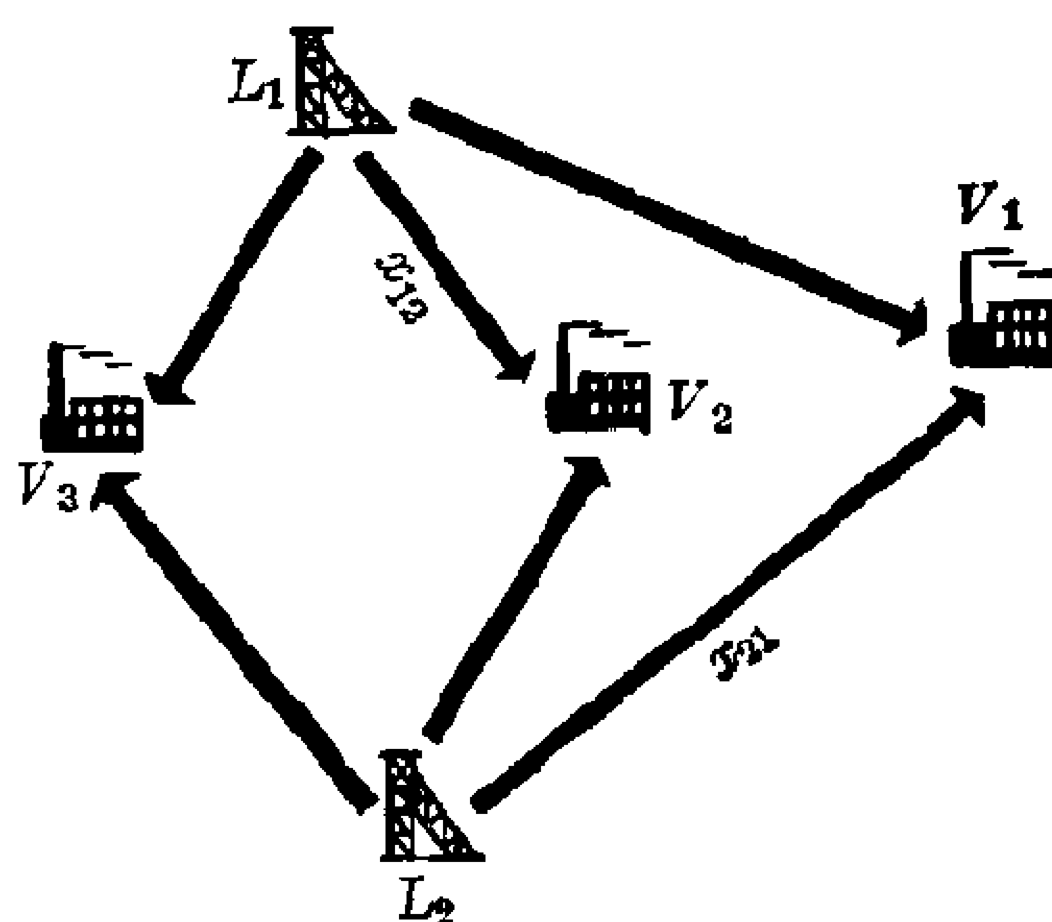


图 17.1-4 运输最优化

*虚构对策*的方法是由布朗(Brown)和罗宾逊(Robinson)提出的，它比起单纯形法来要求较少的储存空间，但实际使用起来收敛太慢。

运输问题。它是原始问题的一种重要的特殊情况，由希契科克(Hitchcock)在1941年和康特罗维奇在1942年独立地阐述。

运输问题	$\min\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\,\middle\vert\,\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i;\ x_{ij}\geqslant 0\right\}$

它可有如下的含义：对于某种商品，存在具有*供应量*为 $a_i\geqslant 0$ 的*供应者* L_i 和具有*需要量*为 $b_j\geqslant 0$ 的*消费者* V_j。从供应者到消费者每单位商品的运输费为 c_{ij} 货币单位。要以这样一种方式确定从 L_i 运到 V_j 的数量 x_{ij} (见图 17.1-4)，使得总的运输费尽可能地便宜。现在矩阵 A 有一种特殊结构，使得整数值 b_j 和 a_i 造成对于 x_{ij} 的整数解。况且，这个特殊问题总是有一个解。这在实践中使用起来很有效，并且以许多方式被使用。除了单纯形算法的通常形式以外，还应提到库恩的*匈牙利方法*，查恩斯(Charnes)和库珀(Cooper)的*踏脚石方法*的求解过程，以及福特(Ford)

和富尔克森(Fulkerson)的方法，它利用在有向图中确定最大流量来求解问题。用这样的方式能解决运输问题，同时还考虑到运输线的容量限度。

更一般化就区分成几个运输阶段或者考察几种商品的运输。

【例 4】 设 4 个消费者的需要量 $b_1=4$, $b_2=8$, $b_3=2$, $b_4=8$ 和 3 个供应者的容量 $a_1=10$, $a_2=7$, $a_3=5$, 这时正好 $\Sigma a_i=\Sigma b_j=22$。要是出现 $\Sigma a_i=a \gtrless b=\Sigma b_j$ 中的一种情况，就假定一个虚构的供应者其量为 $(b-a)$ 或者假定一个虚构的消费者其量为 $(a-b)$。矩阵的系数 c_{ij} 就是从 i 处运到 j 处每件的运费。利用西北角规则，从左上方的西北角出发，以最大

$$\begin{array}{|l|}\hline c_{11}=20,\ c_{12}=6,\ c_{13}=4,\ c_{14}=3 \\ c_{21}=10,\ c_{22}=1,\ c_{23}=5,\ c_{24}=8 \\ c_{31}=9,\ c_{32}=3,\ c_{33}=8,\ c_{34}=2 \\ \hline\end{array}$$

的方式一格一格地分别按 b_j 与 a_i 的总数满足给定的需要量。箭头尾部的数字指出决定的次序，件数同时已经决定的那些格子也用箭头标出。

西北角规则

					a_i
	4 1	6 2	0	0	10
	0	2 3	2 4	3 5	7
	0	0	0	5	5
b_j	4	8	2	8	

最小矩阵过程

					a_i
	4	1	2	3 3	10
	0	7 1	0	0	7
	0	0	0	5 2	5
b_j	4	8	2	8	

利用最小矩阵过程按 a_i 与 b_i 的总数也最大限度地满足，但是为了节省运输成本，在每种情况下按 c_{ij} 的最小值定出作决定的格子。如期望的那样，目标函数值现在较小；西北角规则给出 $f_1=162$ 而矩阵最小过程给出 $f_2=120$。对于最优解 $x_{13}=2$, $x_{14}=8$, $x_{22}=7$, $x_{31}=4$, $x_{32}=1$ 得到 $f_{opt}=78$。这个解是退化的，因为只出现 $5=n+m-2$ 个正分量，而由于附加条件 $a=b$，所以期望有总数 $n+m-1=6$ 个正分量。

整数最优化 联系到确定一个生产计划，它要在有容量限制的情况下，保证最大的收益，这就出现 $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant 0\}$ 的整数解问题。不再在可行区域 R 所有的点中，而仅在包含于 R 内的格点中寻找目标函数的最大值。

当然，对于每个具体问题必须考察是否真有必要作为整数问题来处

理。例如，若问题的系数只是估计出来的，则不必付出这种额外的劳动，由初始数据引进问题的不精确性，不会由于正规过程以及将非整数解舍入到邻近格点而有重大的增长。

对于整数最优化，戈莫里(Gomory)在1958年发展了**割平面法**。问题首先用正规方式处理，一直到找出最优解为止。如果万一这个解不是整数，那末以这样的方式引进附加的约束，使所得的解不再是在原来的意义下可行的，而可行区域的其余部分 $R_1\subseteq R$ 包含 R 的全部格点。从 R 割去东西的超平面给出了这个方法的名称。由于它的引进，解作为一个原始解不是可行的，但作为一个对偶解仍是可行的。这样，用对偶的单纯形法能够比较迅速地达到相对于 R_1 的最优解。若这不是整数，则引进第二个割平面，给出 $R_2\subseteq R_1$。这个过程在有限步后导致所要求的整数解。

在实际应用中，由于从有限演算产生的舍入误差，会引起一些问题。因为经过格点的割平面只能近似地确定，所以当检验解的整数特征时，必须允许有一定的变化界限。尽管这样，可能发生一些格点从 R 被割去。这已导致问题的许多进一步研究，并且方法的应用就有关的计算技巧来说尚有问题。

参数最优化　线性最优化中的所有系数可依赖于参数。最简单的情况是

参数最优化	$\max\{(\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{d})^T\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{o}\}$
	$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{o}\}$

当要确定一个生产计划，使它对于给定的容量达到利润最大，以及当只能对每项产品的利润给出界限或当要回答作为产品利润，例如销售价格变化的结果最优解将怎样变化的时候，就会出现这种问题。这是第一种表述方式。第二种表述方式回答这样的问题，作为容量变化，或者扩大或者抑制的结果生产计划如何变化。这里如上面所指出的，从对偶问题的分量即影子价格，可以得到一定的信息。

这两种表述是**互相对偶的**：对偶于第一种表述的问题具有第二种表述的结构，因此这里只细说第一种表述。假定可行区域 R 有界且非空，又 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 线性无关(对于线性相关的 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$，结果是一般的原始问题)。对于每一个固定的 λ，超平面 $(\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{d})^T\boldsymbol{x}=k$ 形成一族平行平面，参数为 k。对于固定的 k 和变化的 λ 得到一束超平面。

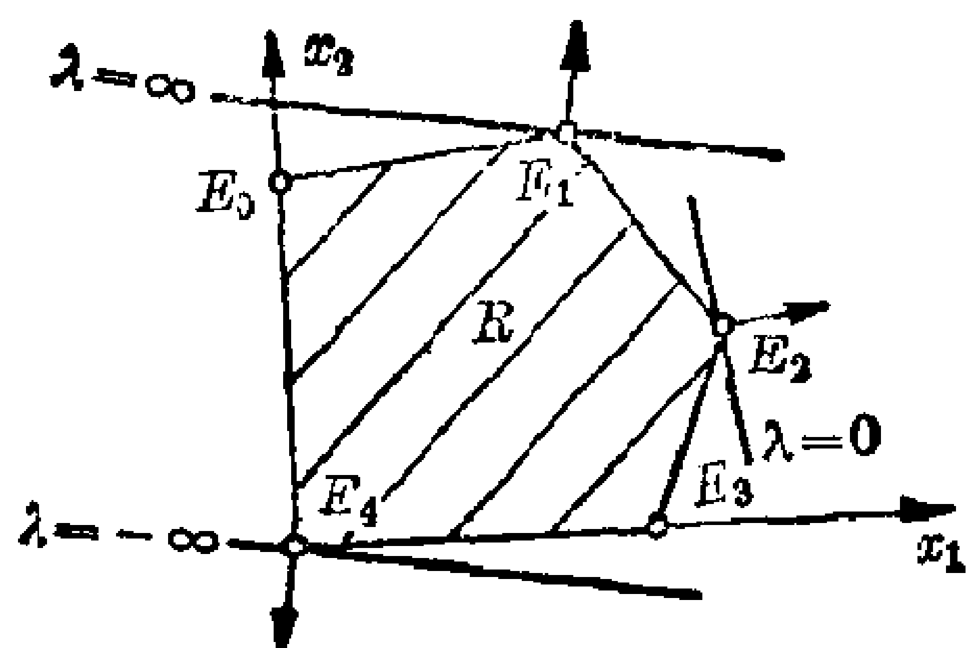


图 17.1-5 平面上的参数最优化

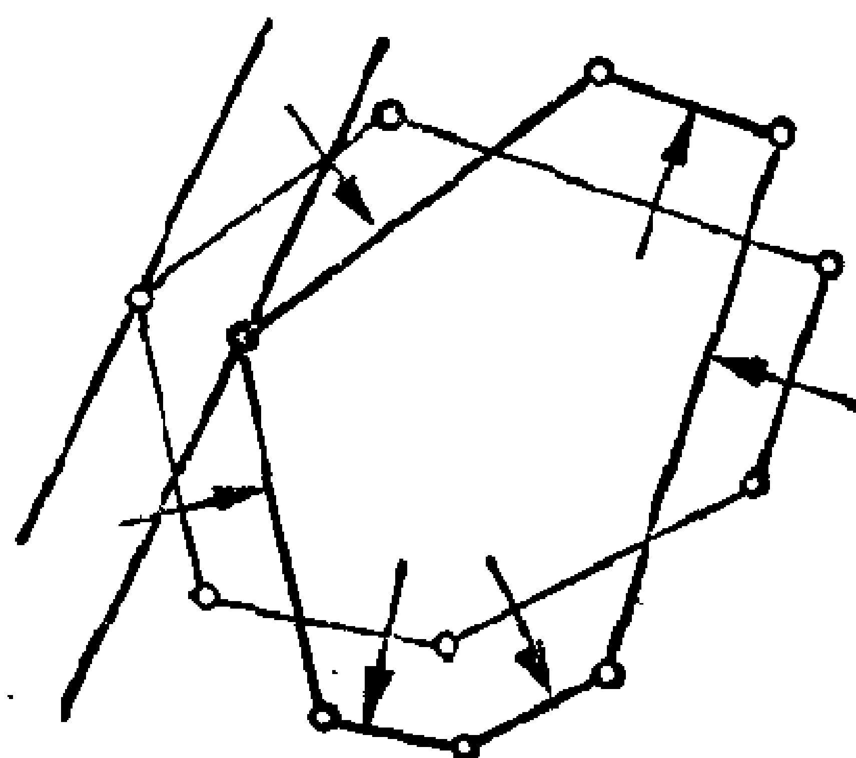


图 17.1-6 对偶参数问题的几何解释

图 17.1-5 说明二维的情形，它能非常一般地确立：若在 k 增加的一边，引出超平面 $(\mathbf{c}+\lambda \boldsymbol{d})^T\boldsymbol{x}=k$ 的法向量，则对于 $-\infty<\lambda<+\infty$，这个向量扫遍大小为 π 的一个角。就图中的例子，λ 区间 $(-\infty, +\infty)$ 能分成四个部分 $-\infty<\lambda\leqslant\lambda_1<0$, $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2<0$, $\lambda_2\leqslant\lambda\leqslant\lambda_3(\lambda_3>0)$, $\lambda_3\leqslant\lambda<+\infty$，对此 E_4, E_3, E_2, E_1 分别是最优解。可以非常一般地把 $(-\infty, +\infty)$ 分解成有限多个部分区间，使得对于每一个 λ 区间有一个可行基本解是最优的。对于无界区域 R，在区间 $-\infty<\lambda\leqslant\lambda_1$ 或 $\lambda_r\leqslant\lambda<+\infty$ 上不一定存在解。

在实践中，对于某一 λ 用单纯形法求解问题，然后确定 λ 区间，使对此区间所得到的最优解仍是最优的。在此区间的两个端点上，能确定当增加或减少 λ 时移动进入基（同样地移动离开基）的 $\boldsymbol{x}$ 的那些分量。对于这个新的基又得到一个 λ 区间，等等。有几种过程例如由斯珀克兰(Spurkland)在 1941 年提出的过程，对此特别适合。

对于对偶问题，λ 的变化意味着围绕可行区域 R 超平面的平行位移（见图 17.1-6）。这里可以证明对于某些 λ 区间，$\boldsymbol{x}$ 的相同分量在基里，即是正的。然而解本身随 λ 而变。对于给定容量的生产计划最大利润的问题提出另一个参数问题。在例 1 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ki} 表示了在活动组 k 中每件商品 i 的活动。例如，随着生产率的提高或新技术的引进这些系数也会改变。这样，就要研究多于一个参数的问题，最近的一些研究证明单参数最优化已知结果的某些一般化。

当然，每一个实际问题都会发生这样的问题：系数的改变如何影响解。在有界容量的情况下，影子价格给出有关这个问题的信息，但是只有用参数最优化才能充分一般地回答这个问题。

线性最优化的进一步应用　线性最优化可应用于自然科学，工程技术和经济学的许多领域。它是运筹学有效的数学方法之一。现在说明应用的几个特例。

协调问题。 n 个代理人以这样的方式联系恰好 n 项任务：每个代理人恰好联系一项任务，而要使总成本最小。例如，一个机器生产过程由 n 项任务组成，有 n 个工人，原则上每个工人会做其中的每一项任务，但所化的时间不一样。各个工人所需要的时间形成元素为 c_{ij} 的方阵。现在，每个工人恰好完成一项任务，于是，数学表述采取形式

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ x_{ij}\geqslant 0\right\}。$$

这是运输问题的一种特殊情形。x_{ij} 恰有 n 个等于 1 其余为 0。基本解所包含的，不是 $2n-1$ 个正分量而只有 n 个正分量，就是说问题是强退化的。因此库恩的方法比单纯形法更适合于求解。

混合问题。 典型的混合问题联系着饮食问题早已提到过了，第二个例子是生产铸铁的高炉的装载量。生产具有规定性质的铸铁，要找最便宜的矿石混合比。生产具有指定热值的煤气，它用不同加工成本和已知其热值的煤气混合而成，也导致线性最优化问题。

切割问题。 若要将给定大小的面料切割成不同类型的小料，则浪费减为最小的问题导致一个极小化问题。这样的问题在金属、木材、纺织品和皮货加工中会碰到。

随机的线性最优化　一个线性最优化问题，它的系数是随机量，即 $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{o}\}$ 只有理解为目标函数的**最大期望**才有意义。若把问题的随机特征完全考虑进来，则在大多数情况下，或者变成**非线性**的，或者必须用分段线性的目标函数以及分段线性的约束的问题来表示或逼近。只有一种十分特殊的情形，其中产生的问题仍为线性的，这就是当 $\boldsymbol{c}$ 的分量即利润或者对于最小值问题的成本是随机量，它们的分布函数独立于 x_i 的值。于是允许对 $\boldsymbol{c}$ 的随机分量 c_i 代之以它们的**期望值** $\bar{c}_i=E(c_i)$，从而用由 $\bar{c}_i$ 形成的向量 $\boldsymbol{c}$ 以确定性的方式处理原始问题。例如，若假定在所考虑的一年里各种食料价格的已知分布具有这样的随机性，则在处理**饲料最小成本**问题（饮食问题）时就可能这样做。若 $\boldsymbol{b}$ 的分量是随机量，例如，在备用零件储存的最优成本情况下需求量是随机的，或者若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素是随机的，则问题就变得更为复杂。

17.2 非线性最优化

在非线性问题中，凸最优化至少就有关的理论来说可要求一定的完全性。

凸最优化 若在 n 维欧几里得空间 R_n 中，一个区域 B 对其任何两点凸的线性组合的所有点都属于 B，则这个区域 B 就叫做凸的(见图17.2-1)。定义在凸区域 B 上的函数 $f(\boldsymbol{x})$，若对 B 中的两点 $\boldsymbol{x}^1$ 和 $\boldsymbol{x}^2$ 以及 $0<\lambda<1$ 总有

$$f(\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2)\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x}^1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}^2),$$

则称它为凸函数(图17.2-2)。若对于 $\boldsymbol{x}^1\neq\boldsymbol{x}^2$，上式等号不成立，则称

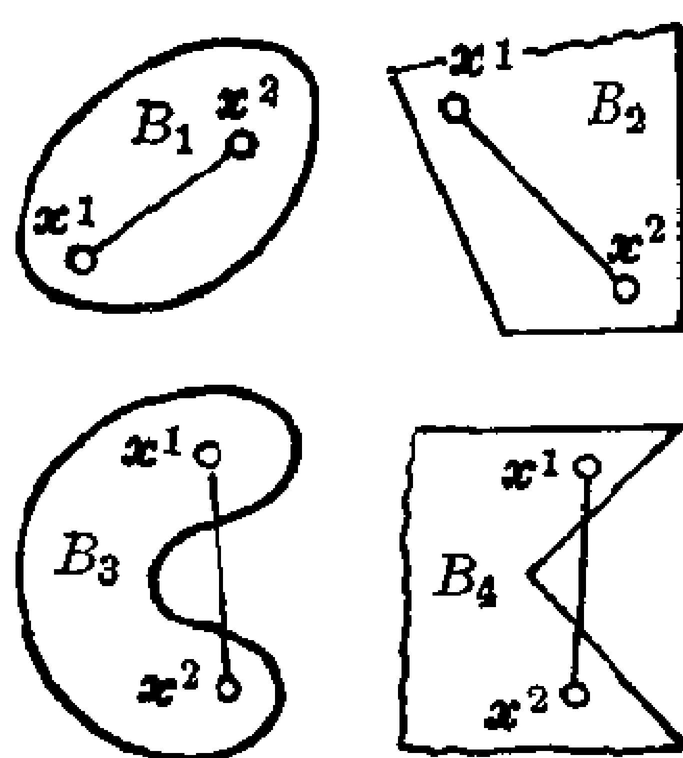


图17.2-1 凸集 M_1, M_2 和非凸集 M_3, M_4

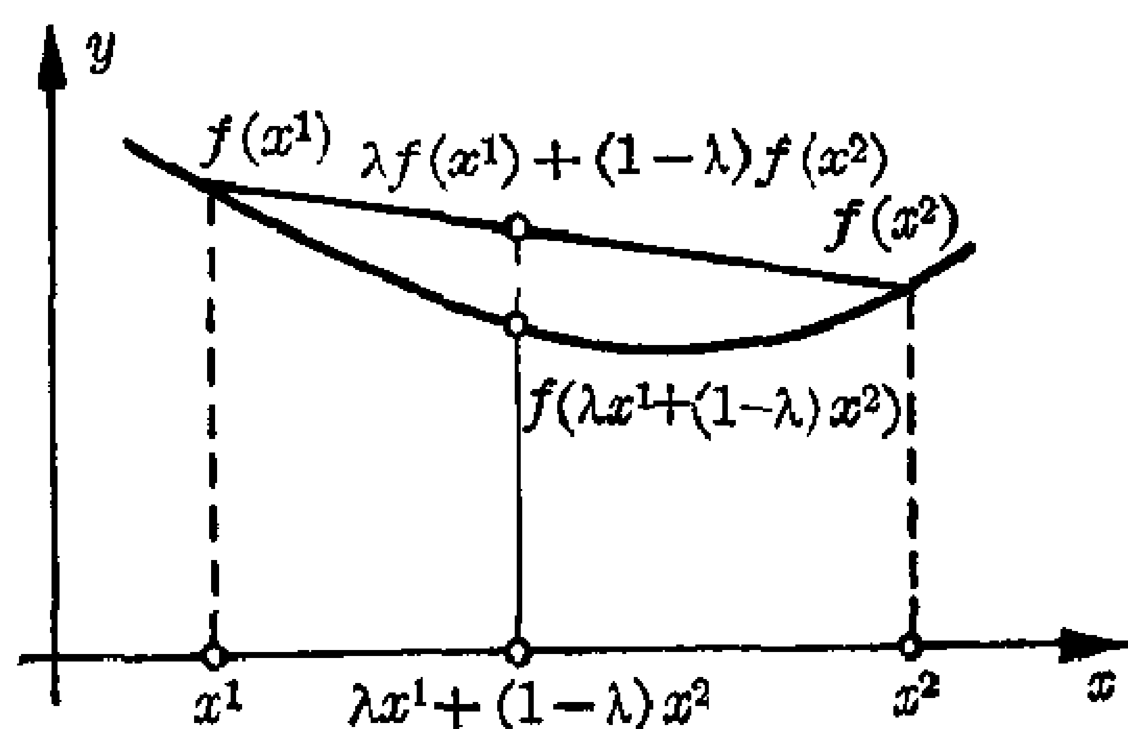


图17.2-2 一元凸函数图形

$f(x)$ 为严格凸或真凸。举例来说，立方体、平行六面体、四面形、球和椭球都是 R_3 中的凸区域。

两个凸区域的交也是一个凸区域，这个性质在讨论最大值问题的可行区域 R 时已经用过了。若在 $\min\{f(\boldsymbol{x})\,|\,g_j(\boldsymbol{x})\leqslant0,\ x_i\geqslant0\}$ $(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m; m<n)$ 中函数 f 和 g_j 是凸函数，则把这个问题叫做凸最优化问题。这个问题的可行区域 R 是 R_n 中的一个凸区域。对于解的存在性，库恩、塔克和斯莱特(Slater)证明了一个基本定理，即鞍点定理。对于二元函数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$，点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)$ 称为鞍点，在这一点函数对于 $\boldsymbol{u}$ 取最大值，使在 $\boldsymbol{u}^0$ 的邻域内的 $\boldsymbol{u}$ 值函数减少，而对于 $\boldsymbol{x}$ 取最小值，从而在 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域内的 $\boldsymbol{x}$ 值函数增加。对于具有边条件的极值问题用拉格朗日乘数法得到这个函数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$。利用拉格朗日乘数 u_j $(j=1, 2, \cdots, m)$ 定义广

义拉格朗日函数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(\boldsymbol{x})$，其中 $\boldsymbol{u}$ 是由 u_j 形成的 $m\times1$ 阶矩阵。

鞍点定理。若存在 $\boldsymbol{x}^0\geqslant\boldsymbol{o}$，满足 $g_j(\boldsymbol{x}^1)<0(j=1, \cdots, m)$，则 $\boldsymbol{x}^0\geqslant\boldsymbol{o}$ 是 $\min\{f(\boldsymbol{x})\mid g_j(\boldsymbol{x})\leqslant0, x_i\geqslant0\}$ 的解，当且仅当对于所有的 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{o}$ 存在一个 $\boldsymbol{u}^0$，满足 $F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u})\leqslant F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)\leqslant F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^0)$。

相应地，函数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 在 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)$ 有一个非负鞍点。现在证明这对于 $\boldsymbol{x}^0\geqslant\boldsymbol{o}$ 成为凸问题的一个解来说是充分的。对于所有的 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{o}$ 以及所有的 $\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{o}$，得到 $f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(\boldsymbol{x}^0)\leqslant f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{j=1}^{m}u_j^0g_j(\boldsymbol{x}^0)\leqslant f(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m}u_j^0g_j(\boldsymbol{x})$。从左边不等式得到 $g_j(\boldsymbol{x}^0)\leqslant0(j=1, 2, \cdots, m)$；因为对于一个正的 $g_{j0}(\boldsymbol{x}^0)$，就可取 $u_{j0}>0$，而当 $j\neq j_0$ 时 $u_j=0$，左边能无限制增大。因此，$\boldsymbol{x}^0\geqslant\boldsymbol{o}$ 是可行的。另外，$\sum_{j=0}^{m}u_j^0g_j(\boldsymbol{x}^0)=0$，否则由于所有的 $g_j(\boldsymbol{x}^0)<0$ 以及 $\boldsymbol{u}^0\geqslant\boldsymbol{o}$，使得左边不等式对于 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$ 将不成立。由此得出，对于所有的 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{o}$ 有 $f(\boldsymbol{x}^0)\leqslant f(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m}u_j^0g_j(\boldsymbol{x})$，因而由 $\boldsymbol{u}^0\geqslant\boldsymbol{o}$ 对于满足 $g_j(\boldsymbol{x})\leqslant0(j=1, 2, \cdots, m)$ 的所有的 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{o}$，有 $f(\boldsymbol{x}^0)<f(\boldsymbol{x})$。而这意味着 $\boldsymbol{x}^0\geqslant\boldsymbol{o}$ 是一个解。

这里所叙述的鞍点定理的完全证明归于斯莱特。库恩和塔克对于可微函数证明了这个定理，下面叙述对于这种函数的*局部库恩-塔克条件*，它等价于定理的条件。对于凸最优化问题解的这些充要条件在许多应用中，特别在二次最优化方法中有用。

局部库恩-塔克条件：对于可微的凸函数 $f(\boldsymbol{x})$，$g(\boldsymbol{x})$ 存在 $\boldsymbol{x}^0\geqslant\boldsymbol{o}$ 和 $\boldsymbol{u}^0\geqslant\boldsymbol{o}$ 满足

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)}{\partial x}\geqslant\boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{x}^{0T}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)}{\partial u}\leqslant\boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{u}^{0T}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)}{\partial u}=0,$$

是 $\boldsymbol{u}^0\geqslant\boldsymbol{o}$ 为凸问题解的充分必要条件。

二次最优化 上面给出的，对于给定的容量确定加工计划具有最大利润的例子是一个线性最优化问题。$\boldsymbol{c}$ 的分量 c_i 是每单位产品 i 的利润。利润是达到的价格 p_i 与成本 k_i 之间的差。这里不详细考虑 k_i 的合成以及可能改变 p_i 的影响因素的合成。假定 p_i 和 k_i 两者不依赖于产品 i 的件数 x_i，这是一种大大的简化。如果假定对于大批量销售打折扣并且每

项产品的成本随着产品数量的增加而减少，则情况可近似表达为 $p_i=\bar{p}_i-r_ix_i$，$k_i=\bar{k}_i-s_ix_i$。这样就得到二次目标函数 $c^Tx=\sum_{i=1}^{n}(p_i-k_i)x_i+\sum_{i=1}^{n}(s_i-r_i)x_i^2$。

二次最优化问题的完全形式可写成 $\min\{c^Tx+x^TCx \mid Ax\leqslant b, x\geqslant o\}$，这里 C 是 $n\times n$ 阶对称方阵。若 C 是正定的或半定的，则这个问题是凸的，能应用库恩-塔克条件。这里也能通过改变目标函数的符号，把一个最大值问题变成一个最小值问题。在这种情况下，为了得到一个凸问题，在最大值问题的目标函数中，方阵应是负半定的。对于加工计划就发生这种特殊情形，其中 C 是对角阵，当 $s_i-r_i\leqslant 0$ 时，它将是负半定的。这也是实在过程的近似表示，它对于反复观察能有用，在特定的情形下总是考查有没有"较好"的模型，证明比线性模型付出额外的工作是值得的。

二次最优化的拉格朗日函数采取形式

$$F(x, u)=c^Tx+x^TCx+u^T(Ax-b)$$

使得 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=c+2Cx+A^Tu$，$\dfrac{\partial F}{\partial u}=Ax-b$。由 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=v$ 和 $-\dfrac{\partial F}{\partial u}=y$，得到条件

(1) $Ax+y=b$; (2) $2Cx-v+A^Tu=-c$;

(3) $x\geqslant o,\ v\geqslant o,\ y\geqslant o,\ u\geqslant o$; (4) $x^Tv=0,\ y^Tu=0$。

向量 $x\in R_n$ 是一个解，当且仅当它与 $v\in R_n$，$u\in R_m$ 和 $y\in R_m$ 一起满足条件(1)至(4)。条件(1)至(3)形成一个线性系统。条件(4)也能写成(4a) $x^Tv+y^Tu=0$，因为根据条件(3)，不论条件(4)或者(4a)所要求的都是数量积中的每项为零。因此，这个条件表明，对于线性系统(1)至(3)所要求的一个可行解，x 和 v 的相应分量中至多有一个为正，类似地，y 和 u 的相应分量中至多有一个为正，总起来四个向量中至多有 $m+n$ 个分量为正，这恰好与条件(1)和(2)中方程的个数相同。这样，系统(1)至(4)的解包含在前三个条件的**可行基本解**中。这些可行基本解能用**单纯形法**确定。

考虑到最后一个条件，存在两种可能性：

沃尔夫(Wolfe)**方法**。在(1)至(4)式中引进额外的变量，使之不难找到满足(4)的，(1)至(3)的一个可行基本解。然后利用单纯形法，使得这个条件仍然满足，而从基中去掉额外的变量。

在巴兰金-多尔夫曼(Barankin-Dorfman)方法和弗兰克(Frank)-沃尔夫方法中，开始用不满足最后一个条件的可行基本解，然后利用单纯形

佐坦迪克(Zoutendijk)的可行方向法 设问题是 $\min\{f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}\}$。假设给出的约束也包含对 $\boldsymbol{x}$ 的符号限制。设 $\boldsymbol{a}_j^T$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行，b_j 是 $\boldsymbol{b}$ 的分量，那末这些约束能表示为 $\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x}\leqslant b_j(j=1, 2, \cdots, m)$。设目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在可行区域 R 内是具有连续偏导数的凸函数。上面所描述的方法，即从可行区域内一点 $\boldsymbol{x}^k$ 到下一点 $\boldsymbol{x}^{k+1}$ 的过程以如下的形式实现：在由向量 $\boldsymbol{r}^k$ 确定的方向上沿着射线 $\boldsymbol{x}^k+\lambda\boldsymbol{r}^k$ 进行，这里 $\boldsymbol{r}^k$ 的方向是这样确定的，使当 $\lambda>0$ 时这条射线起初保持在可行区域内。若 $\boldsymbol{x}^k$ 是 R 的一个内点，则没有任何限制。若 $\boldsymbol{x}^k$ 在 R 的边界上，又若 $\boldsymbol{J}$ 是这样一个指标集，对此 $\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{x}^k=b_j$ 成立，则对于选取上述意义下的 $\boldsymbol{r}^k$，充分必要的是 $\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{r}^k\leqslant 0(j\in\boldsymbol{J})$。这样的方向称为*可行的*。此外，目的在于沿此射线尽可能地减少函数 $f(\boldsymbol{x})$；对于所有满足 $\mathrm{grad}^T f(\boldsymbol{x}^k)\cdot\boldsymbol{r}^k<0$ 的 $\boldsymbol{r}^k$，$f(\boldsymbol{x})$ 将会减少。令 $\mathrm{grad}\,f(\boldsymbol{x}^k)=\boldsymbol{c}$ 并确定 $\boldsymbol{r}^k$ 作为线性最优化问题 $\min\{\mathbf{c}^T\boldsymbol{r}|\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{r}<0, j\in\boldsymbol{J}\}$ 的解。一般地，因为 $\mathbf{c}^T\boldsymbol{r}$ 并不是有下界的，所以仍要加上一个可行条件。若 $\boldsymbol{r}$ 的分量 r_i 取为 $-1<r_i\leqslant 1(i=1, 2, \cdots, n)$，则用单纯形法能确定有利于 $\boldsymbol{x}^k$ 的 $\boldsymbol{r}^k$。沿着这条射线 $\boldsymbol{x}^k+\lambda\boldsymbol{r}^k$ 走直到或者 $f(\boldsymbol{x})$ 成为最小，即达到 λ_1 满足 $\mathrm{grad}^T f(\boldsymbol{x}^k+\lambda_1\boldsymbol{r}^k)\cdot\boldsymbol{r}^k=0$；或者直到射线将离开可行区域的这一点。相应的值 λ_2 由对于 $j=1, \cdots, m$，$\lambda_2=\max\{\lambda|\boldsymbol{a}_j^T(\boldsymbol{x}^k+\lambda\boldsymbol{r}^k)=b_j\}$ 来确定。反复所描述的过程，得到下一个近似点 $\boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{x}^k+\lambda_k\boldsymbol{r}^k$，其中 $\lambda_k=\min(\lambda_1, \lambda_2)$。若 λ_k 不是有限的，则 $f(\boldsymbol{x})$ 无有限最小值。佐坦迪克建立了这个方法的收敛性。在二次函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的特殊情形下，可由附加的规则达到，在有限步后这个过程必有结果。

除了二次最优化以外，还有一个非线性最优化的特殊形式，近年来对此给出了一些令人满意的解法，并且对此也成立对偶原理。在这些特殊问题中，目标函数是*两个线性函数的商*而约束是一些线性不等式。

17.3 动态最优化

首先用一个简单的例子来说明动态最优化的基本思想。某种交通工具(卡车、货车)装运各种不同的物件；n 是物件类 $s_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的数目，$v_i>0$ 是物件的运输费，$w_i>0$ 是物件的重量，$u_i>0$ 是装载第 i 类物件的数目，而 z 是该交通工具的总容量，这里必须成立 $z\geqslant\min\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{w_i\}$。这个问题就在于要确定数 u_i，使得一次装载达到最大的运输费。

这样，问题就导致如下的最优化课题：要确定目标函数

$$f(u_1, \cdots, u_n)=\sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

的最大值，其中约束 $u_i \geqslant 0(i=1, 2, \cdots, n)$ 全为整数且 $\sum_{i=1}^{u} w_i u_i \leqslant z$。这个问题可看作 n 步过程，其中每一步都要确定出 u_i，使在最后一步达到所要求的最大值。这样，整个最优化问题变换成一个因时而异的事件，即变换成一个过程。

离散确定性过程 设 S 是一个系统，例如是一个经济的、力学的或化学性质的系统，在时段 $[t', t'']$ 内它的状态能用 n 个函数 $x_i=x_i(t)(i=1, 2, \cdots, n)$ 来描述，这里可能状态 $\boldsymbol{x}^T=(x_1, \cdots, x_m)$（在所考虑的时段内）的集合落在 n 维欧几里得空间的给定点集 X 内。x^T 的分量称为*状态变量*。

为了定义离散确定性过程，需要如下的假定：设 $t'=t_1<t_2<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_{n+1}=t''$ 是区间 $[t', t'']$ 的一个给定划分；然后在右开时段 $[t_i, t_{i+1})$ 中 $(i=1, \cdots, n)$ 系统的状态 $\boldsymbol{x}^{i+1}=(x_i(t_i), \cdots, x_n(t_i))$ 保持不变。状态 $\boldsymbol{x}^{i+1}$ 只依赖于 $\boldsymbol{x}^i$ 和某个决策量 $\boldsymbol{e}^i$，即 $\boldsymbol{x}^{i+1}=T^i(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{e}^i)$，这里 T^i（第 i 步的状态变换）独立于前面的状态。

决策量 e^i 唯一地表征为某个 n 维向量 $\boldsymbol{u}^i=(u_1, \cdots, u_n)$，这里点 $\boldsymbol{u}^i$ 必须位于指定的区域 U^i 内。每一个点 $u^i \in U^i$ 是决策过程*第 i 步许可的决策向量*。每一个序列 $P=(u^1, \cdots, u^n)$，其中 $u^i \in U^i(i=1, \cdots, n)$，和 $\boldsymbol{x}^{i+1}=T^i(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{u}^i) \in X(i=1, \cdots, n)$ 称为所考虑的 n 步决策过程的一个*许可对策*（或*操纵*）。因为系统 S 状态的改变仅出现在时间的离散点上，又因为所含的量不是随机的，所以这一类过程称为*离散确定性过程*。

最优对策 对于 n 步离散确定性过程给出在定义域 $x^i \in X(i=1, \cdots, n)$，$u^i \in U^i(i=1, \cdots, n)$ 上的某个函数 $f(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{x}^{n+1}, \boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n)$，称之为*目标函数*。若给定初始状态 $\boldsymbol{x}^1$，则目标函数 f 可以表达为 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n$ 的函数。从过程的假定得到

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{x}^1, T^1(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{u}^1), T^2(T^1(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{u}^1), \boldsymbol{u}^2), \cdots, \boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n)\\&=\tilde{f}(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n)。\end{aligned}$$

最优化问题就是要对于给定的初始状态 $\boldsymbol{x}^1$ 寻找一个许可对策 $P_0=(\boldsymbol{u}_0^1, \cdots, \boldsymbol{u}_0^n)$，具有性质 $\tilde{f}(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{u}_0^1, \cdots, \boldsymbol{u}_0^n)=\max\limits_{(u^1, \cdots, u^n)} \tilde{f}(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n)$，这里 $\{\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n\}$ 取遍所有许可对策集合。若存在这样一个对策 P_0，它就称

为最优对策。动态最优化方法必须预先假定目标函数的某个性质，所谓马尔可夫性质。

马尔可夫性质	对每一个 n 定义函数 f，即给出一系列函数 $f(x^1)$，$f(x^1, x^2, u^1)$，$f(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2)$，…，它们可递归计算。函数 $f(x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}, u^2, \cdots, u^n)$ 能借助于函数 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^n)$ 和 x^{n+1}，u^n 定义。

对于实际应用中的大多数决策过程，**可分函数类**，也称为**加性函数类**，就够用了。这些函数可以写成形式：

$$f(x^1, \cdots, x^{n+1}, u^1, \cdots, u^n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x^i, u^i)。$$

然后，这些函数具有马尔可夫性质。

在如此假定下，即对于上述具有可分目标函数 f 的 n 步(确定性，离散)过程存在最优决策，因而相应的最优化问题也存在最优解，便引进记号 $f_n(x^1) = \max\limits_{(u^1, \cdots, u^n)} \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x^i, u^i)$。

贝尔曼 (Bellman) 的最优性原理 动态最优化方法以这样一个事实为基础，替代固定初始状态 x^1 和固定步数 n 的原始问题而考虑若干个问题。这样，值 $f_n(x^1)$ 看作 x^1 和 n 的函数。若设想值 $f_n(x^1)$ 已由无论哪种方法算出，则在 $f_n(x^1)$ 的定义以及目标函数可分特征的基础上，容易递归地导出公式

$$\begin{aligned} f_n(x^1) &= \max_{u^1 \in U^1} \max_{u^2 \in U^2} \cdots \max_{u^n \in U^n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i(x^i, u^i) \right\} \\ &= \max_{u^1 \in U^1} \{ g_1(x^1, u^1) + f_{n-1}(x^2) \}。\end{aligned}$$

由于 $x^2 = T^1(x^1, u^1)$，递归公式就转换成关系

$$f_n(x^1) = \max_{u^2 \in U^1} \{ g(x^1, u^2) + f_{n-1}(T^1(x^1, u^1)) \}。$$

这个关系也能在*贝尔曼的最优性原理*基础上导出，它包含动态最优化的基本思想。

贝尔曼的最优性原理	若 $u_0^1, \cdots, u_0^n$ 表示初始状态为 x^1 的给定 n 步过程的最优对策，则决策序列 $u_0^2, \cdots, u_0^n$ 表示初始状态为 x^2 的 $(n-1)$ 步过程的最优对策。这里 x^2 是这样一个状态，系统 S 从初始状态 x^1 由决策 u^1 就变成状态 x^2。

在动态最优化的文献中，会碰到反过来的编号，用 x^{n+1} 记 n 步过程的初始状态而 u^n 记其中的第一个决策。用这种记号，状态变换可描述为 $x^i=T^i(x^{i+1},\ u^i)(i=1,\cdots,\ n)$，其中$x^n=T^n(x,\ u^n)$，$x=x^{n+1}$，从而相应于贝尔曼最优性原理的递归公式，转换成关系

$$f_n(x)=\max_{u^n\in U^n}\{g_n(x,\ u^n)+f_{n-1}(x^n)\}$$

$$=\max_{u^n\in U^n}\{g_n(x,\ u^n)+f_{n-1}(T^n(x,\ u^n))\}。$$

【例5】 本节开头所提及的问题可以看作 n 步的离散确定性过程，这里用自然编号 $u^i=(u_i)$记第 i 步的决策，$(u^1,\cdots,u^n)=(u_1,\cdots,u_n)$记具有给定性质的许可对策，而 $x^{i+1}=x^i-u_iw_i=z-\sum_{j=1}^{i}w_ju_j(i=1,\ \cdots,\ n)$，其中 $x^1=z$（无装载空间），记第 i 步的状态。于是根据最优性原理

$$f_n(z)=f_n(x^1)=\max_{\substack{u_1\in\{0,1,\cdots\}\\ u_1\cdot w_1\leqslant z}}\{u_1v_1+f_{n-1}(z-u_1u_1)\},\ \cdots,$$

$$f_1(z)=\max_{\substack{u_1\in\{0,1,\cdots\}\\ u_1\cdot w_1\leqslant z}}(u_1v_1)$$

或者如动态最优化中惯常那样变成反编号，

$$f_n(z)=\max_{\substack{u_n\in\{0,1,\cdots\}\\ u_nw_n\leqslant z}}\{u_nv_n+f_{n-1}(z-u_nw_n)\},\ \cdots,$$

$$f_1(z)=\max_{\substack{u_n\in\{0,1,\cdots,\}\\ u_nw_n\leqslant z}}(u_nv_n)。$$

显然，$g_i(u_i)=u_iv_i$。

设给出数值

$$n=3,\ z=100,$$

$$w_1=40,\ w_2=45,\ w_3=60,$$

$$v_1=20,\ v_2=75,\ v_3=102。$$

在这个情形下

$$g_1(u_1)=20u_1,\ g_2(u_2)=75u_2,\ g_3(u_3)=102u_3,$$

$$f=20u_1+75u_2+102u_3,$$

而约束表示为 $40u_1+45u_2+60u_3\leqslant 100$，这里 $u_1,\ u_2,\ u_3$ 是非负整数。

首先对函数 $g_i(u_i)(i=1,\ 2,\ 3)$列表，这里对于每一个整数 u_i 必须遵守条件 $0\leqslant u_i\leqslant z/w_i(i=1,\ 2,\ 3)$。

z	u_1	$g_1(u_1)$	z	u_2	$g_2(u_2)$	z	u_3	$g_3(u_3)$
0～39	0	0	0～44	0	0	0～59	0	0
40～79	0	0	45～89	0	0	60～100	0	0
	1	20		1	75		1	102
80～100	0	0	90～100	0	0			
	1	20		1	75			
	2	40		2	150			
(1)			(2)			(3)		

借助于步(1)，利用公式$f_1(z)=\max\limits_{u_1} 20u_1$，算出如下的表格，其中$\bar{u}_1(z)$记得到$f_1(z)$的$u_1$值。

u_1	z	$f_1(z)$	$\bar{u}_1(z)$
0	0～39	0	0
1	40～79	20	1
2	80～100	40	2
(4)			

对于$n=2$得到$f_2(z)=\max\limits_{u_2}\{g_2(u_2)+f_1(z-u_2w_2)\}$，利用表(2)和(4)得到表(5)，这里$\bar{u}_2(z)$是得到$f_2(z)$的$u_2$值。对于$n=3$有$f_3=\max\limits_{u_3}\{g_3(u_3)+f_2(z-w_3u_3)\}$，在这个关系的基础上得到最后一个表(6)。

$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	z	$f_2(z)$	$\bar{u}_2(z)$
0	0	0～39	0	0
1	0	40～44	20	0
0	1	45～84	75	1
1	1	85～89	95	1
0	2	90～100	150	2
(5)				

$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$	z	$f_3(z)$	$\bar{u}_3(z)$
0	0	0	0～39	0	0
1	0	0	40～44	20	0
0	1	0	45～59	75	0
0	0	1	60～89	102	1
0	2	0	90～100	150	0

(6)

对于 $z=100$，表(6)指出 $\bar{u}_3=0$。然后按照表(5)，有 $\bar{u}_2=\bar{u}_2(z-\bar{u}_3w_3)=\bar{u}_2(100)=2$。从表(4)得到 $\bar{u}_1=\bar{u}_1(z-\bar{u}_2w_2-\bar{u}_3w_3)=\bar{u}_1(100-2.45)=\bar{u}_1(10)=0$。这样，最优解 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)=(0, 2, 0)$ 是唯一的。装载的最优值则是 $2v_2=150$。

函数方程的方法 对于这个方法也将先提出一个适当例子的描述。

可用资金总量为 x，对于这笔资金的投资有两种可能性。量 $u_1(0\leqslant u_1\leqslant x)$ 按第一种方式投资，量 $x-u_1$ 按第二种方式投资。在给定的时段内例如一年内，预期从投资 u_1 中得利 $g_1(u_1)$，从投资 $x-u_1$ 中得利 $g_2(x-u_1)$。在时段的末了用来得到利润 g_1 和 g_2 的资产会丧失一些实力，由于摊提资产以及维持需要，以致一年后状态将是

$$x_1=au_1+b(x-u_1),\ 0<a<1,\ 0<b<1。$$

在第二年初以总量 x_1 出发，金额 $u_2(0\leqslant u_2<x_1)$ 以第一种方式投资而赢利，第二种方式投资金额为 x_1-u_2。所以两年内的利润等于

$$g_1(u_1)+g_2(x-u_1)+g_1(u_2)+g_2(x_1-u_2)。$$

在第三年初还将以同样的方式投资，那时支配的资金是 $x_2=au_2+b(x_1-u_2)$。在 n 年后得到的利润是

$$\sum_{i=1}^{n}\{g_1(u_i)+g_2(x_{i-1}-u_i)\}=\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1},\ u_i),$$

其中 $x_0=x$，而在第 n 年末可供使用的金额是 $x_n=au_n+b(x_{n-1}-u_n)$。以这种方式用下面的目标函数描述一个确定的 n 步过程。这个目标函数为

$$\sum_{i=1}^{n}g_i(x_{i-1},\ u_i)=\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1},\ u_i)=\sum_{i=1}^{n}\{g_1(u_i)+g_2(x_{i-1}-u_i)\},$$

其中 $x_0=x$，约束为 $0\leqslant u_i\leqslant x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，这里状态变换

$$x_i=T^i(x_{i-1},u_i)=T(x_{i-1},u_i)=au_i+b(x_{i-1}-u_i),\ i=1,2,\cdots,n$$

独立于步。若选取状态量和决策量的反编号，即若把 $x=x_{n+1}$ 看作初始状态，则得到如下的最优化问题：确定目标函数

$$\sum_{i=1}^{n}g(x_{i+1},u_i)=\sum_{i=1}^{n}\{g_1(u_i)+g_2(x_{i+1}-u_i)\}$$

在约束 $0\leqslant u_i\leqslant x_{i+1}(i=1,\cdots,n)$，$x_i=T^i(x_{i+1},u_i)=T(x_{i+1},u_i)=au_i+b(x_{i+1}-u_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 下的最大值。根据最优性原理得到

$$\begin{aligned}f_n(x)=f_n(x_{n+1})&=\max_{0<u_n<x_{n+1}}\{g_1(u_n)+g_2(x_{n+1}-u_n)+f_{n-1}(x_n)\}\\&=\max_{0<u_n<x}\{g_1(u_n)+g_2(x-u_n)+f_{n-1}(T(x_{n+1},u_n))\}\\&=\max_{0\leqslant u\leqslant x}\{g_1(u)+g_2(x-u)+f_{n-1}(au+b(x-u))\},\ n\geqslant 1,\end{aligned}$$

其中的 f_0 定义为 $f_0=0$。

对于 $n=1,2,\cdots$，这个系统表示未知函数 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 的一个函数方程组。为了在特定情形下，即当指定 g_1,g_2 和数 a,b 时求解这个问题，递归地确定上面这个方程组的解，即对于每一个 $n=1,2,\cdots$，确定值 $\bar{u}_n=\bar{u}_n(x)$，对此关于 $u\in[0,x]$ 和 $\bar{x}_i=\bar{x}_i(x)=a\bar{u}_i+b(\bar{x}_{i+1}-u_i)$，$(i=1,2,\cdots,n)$ 有

$$g_1(\bar{u}_n)+g_2(x-\bar{u}_n)+f_{n-1}(a\bar{u}_n+b(x-\bar{u}_n))=f_n(x)。$$

这通称为**函数方程的方法**。

【例 6】 设在上例中赢利函数是 $g_1(u)=\alpha\sqrt{u}$，$g_2(x-u)=\beta\sqrt{x-u}$，这里 $\alpha>0$，$\beta>0$ 是任意数而 $0<a=b<1$。于是在这个情形下 $x_i=au_i+b(x_{i+1}-u_i)=ax_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$，并且因为 $x_{n+1}=x$，由此得到 $x_i=a^{n+1-i}x(i=1,\cdots,n)$。在这个情形下，$f_n$ 的方程导致关系

$$f_n(x)=\max_{0\leqslant u\leqslant x}\{\alpha\sqrt{u}+\beta\sqrt{x-u}+f_{n-1}(ax)\},\ n\geqslant 1,\ f_0=0。$$

若对于一个固定的选择 $x>0$，定义函数 $\varphi_{n,x}(u)=\alpha\sqrt{u}+\beta\sqrt{x-u}+f_{n-1}(ax)$，则对于 $u\in(0,x)$ 有 $\dfrac{d}{du}\varphi_{n,x}=\alpha/(2\sqrt{u})-\beta/(2\sqrt{x-u})$ 从而对于单个点 $0<\bar{u}_n(x)=[\alpha^2/(\alpha^2+\beta^2)]\cdot x<x$，有 $\dfrac{d}{du}\varphi_{n,x}=0$，于此 $\varphi_{n,x}(u)$ 关于 $u\in[0,x]$ 达到最大值。因此，对于 $n>1$ 以及 $f_0(x)=0$，有 $f_n(x)=\alpha\sqrt{\bar{u}}+\beta\sqrt{x-\bar{u}}+f_{n-1}(a_x)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{x}+f_{n-1}(ax)$。

由此容易得到

$$f_1(x)=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)x},$$

$$f_2(x)=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)x}+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)ax}=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)x}(1+a^{1/2}),$$

....

⋮

$$f_n(x)=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)x}(1+a^{1/2}+\cdots+a^{(n-1)/2}),$$

这里 $f_n(x)$ 记为第 n 步的利润。

因为 $0\leqslant u_i\leqslant x_{i+1}(i=1,\ \cdots,\ n)$，所以

$$\bar{u}_i(x_{i+1})=[\alpha^2/(\alpha^2+\beta^2)]x_{i+1}=[\alpha^2/(\alpha^2+\beta^2)]a^{n-i}x\quad(i=1,\ \cdots,\ n)。$$

由于用了反编号，序列 $[\alpha^2/(\alpha^2+\beta^2)]x,\ [\alpha^2/(\alpha^2+\beta^2)]ax,\ \cdots,\ [\alpha^2/(\alpha^2+\beta^2)]a^{n-i}x$ 是所考虑的 n 步过程的最优对策，其中赢利函数 $f_n(x)=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)x}\sum\limits_{s=0}^{n-1}a^{s/2}$，在第 n 步后的可用资金 $x_n=a^nx$。

今后的发展　对照装载问题，利润的极大化表示一个 n 步离散过程，对于这个过程决策量的许可区域形成一个连通紧集，在此情形下是一个闭区间。因此这是离散 n 步过程的一个特殊情形，对于一般的过程决策量的区域通常表示为相应维数空间的一个有界闭区域。在这样一个简单情形下，常常可以成功地应用函数方程的方法。在更为复杂的情形下，特别地当每一步的决策表征为一个决策向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,\ \cdots,\ u_m)(m\geqslant2)$ 时，就要用进一步的方法，诸如**乘数方法**或者**逐次逼近法**，目的在于把原来问题归结为有限多个较为简单的问题，对于它们来说计算机的存储量够用了。离散确定性问题只构成动态最优化中出现的决策问题的一个部分。有时考虑无限多步的过程更方便，虽然实际上这样的过程永远不会出现。因为若给定一个非常多步的离散过程并且在 f_n 方程中能取极限 $n\to\infty$ 的话，则以此代替这些关系得到单个函数方程

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\max_{0\leqslant u\leqslant x}\{g(x,\ u)+f_{n-1}(T(x,\ u))\}。$$

一般地，这个函数方程要比原始问题容易求解，而对于大的 n 它对所要求的解给出了一个好的近似。**平稳过程理论**考察在怎样的条件下可以运用这个方法。

动态最优化的另一类最优化问题处理这样的决策过程，其中在给定时段的每个瞬间，决策是可能的也正是要求的，这就叫做**连续决策过程**。

相应的理论紧密地联系到变分演算和庞特里雅金(Pontryagin)的最优化过程理论。这需要数学上的相当条件。

相对于离散确定性过程的是**离散随机性过程**，对于这种过程一步末了的状态只是以一个概率分布的形式知道。这些过程常常比确定性模型更接近于经济学中的各种各样问题，动态最优化的方法也已在这个方向上发展。

第18章 数 论

数论原来的任务是研究整数的性质。它系统地发展成为一个数学分支还是相当晚的事。在古代，已经有像欧几里得(大约公元前 300 年)和丢番都(Diophantos, 大约公元 250 年)的个别著名的结果。十七世纪产生了具有重要科学价值的惊人发现,其中特别要提到费尔马的研究工作。欧拉的大量工作使得数论大大地向前跨出了一步，其中充满丰富而影响深远的思想。最后高斯建立了统一的理论。1801 年高斯发表了他的不朽著作《算术研究》,严格地说,这著作是*高等算术*的基础。

现今的数论已成为一种分支很多的理论,它广泛使用抽象代数(主要是在代数数论中)和深刻的分析方法(在解析数论中),由此导出的一些问题和分支与整数仅有间接的联系。

与数学的其他部门不同，数论中许多问题和结果对没有专门知识的数学上的门外汉也是可以理解的。但定理的证明常常需要广泛的数学工具。

高斯称数学为*科学的皇后*，1808 年高斯在给他的朋友波利埃(Bólyai) 的信中说:“值得注意的是所有认真研究这门科学的人都会对它产生一种强烈的热爱。”

环和域 在第 1 章中我们论述了初等数论的基本事实。从整除性理论可知两个整数的商可能是但不一定是整数，例如 $15/3=5$，但 $15/7$ 不是整数。我们说:在整数范围内,作为乘法逆运算的除法不总是可以进行的。称加减乘运算均能进行的数系为**环**;如果除法(用 0 作除数除外)在一个数系中也能进行，我们称之为**域**;例如有理数构成域。以后就用 $\mathbf{Z}$ 表示整数环 $0, \pm1, \pm2, \cdots$，用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数域。如果 a 和 b 是 $\mathbf{Z}$ 中两个数并且 $b\neq0$，那末商 a/b 在 $\mathbf{Q}$ 中，但这商不一定在 $\mathbf{Z}$ 中。如果后一种情况发生,那末称 a 可被 b *整除*或者 a 是 b 的*倍数*。

理想　暂且不谈 **z**，我们需要由实数或复数组成的环 R。环 R 的具有下述性质的子集 I 是特别重要的:

(i) 如果 a 和 b 在 I 中，那末 $a-b$ 也在 I 中;

(ii) 对 R 中每个数 r 和 I 中每个数 a，乘积 ra 总在 I 中。称 R 中这些子集为 R 中的理想。

例如，如果 m 是自然数，所有形为 $0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, \cdots\cdots$ 的数是 **z** 中的理想(见图 18-1)。很清楚，两个 m 的整倍数的差仍然是 m 的倍数(性质(i))，m 的倍数的倍数仍是 m 的倍数(性质(ii))。在这种情况下为了指明它是由所有数 m 的倍数所组成，我们用 $M=(m)$ 表示这理想。称由环 R 的单个元素的所有倍数组成的理想为**主理想**，在这里这单个元素是 m。容易验证在 **z** 中每个理想是主理想，这样只要在 (m) 中依次设 $m=0, 1, 2, \cdots$ 就能得到 **z** 中所有的理想。

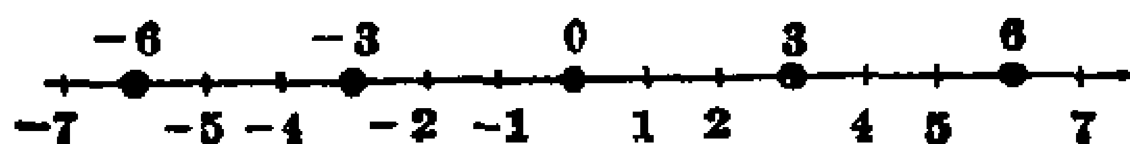


图 18-1　数直线上的理想(3)

也能对理想定义整除性的概念。如果理想 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素也是理想 $\boldsymbol{B}$ 中的元素，我们说理想 $\boldsymbol{A}$ 可被理想 $\boldsymbol{B}$ 整除，也就是说，在集论的意义下 $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$。表面上名词"整除"的朴素的意义似乎和通常相反，但是与整除性理论的联系立即澄清了这种命名方法的理由。将上述定义用到 **z** 中的两个理想 $\boldsymbol{A}=(a)$ 和 $\boldsymbol{B}=(b)$ 上，表明 $\boldsymbol{A}$ 被 $\boldsymbol{B}$ 整除的充要条件是 a 被 b 整除。例如，理想(2)是由 $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \cdots$ 组成，理想(4)是由 $0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \cdots$ 组成，因此在集论意义下 $(4)\subseteq(2)$; 因为 4 被 2 整除，所以这表示理想(4)可被理想(2)整除。其次，我们定义两个理想 A 和 B 的乘积 AB，即是由所有有限多个积 ab 的和所组成的理想，这里 a 和 b 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中的任意元素。在 **z** 中当 $\boldsymbol{A}=(a)$ 和 $\boldsymbol{B}=(b)$ 可知有 $\boldsymbol{AB}=(ab)$，例如 $(2)\cdot(4)=(8)$。

理想的概念是在代数数论的发展过程中产生出来的。**理想论**研究环和它的理想的结构。为了简化结果的叙述，采用下述说法是适宜的: 设 a 和 b 是环 R 中的数，I 是 R 中的理想; 如果 $a-b$ 是 I 中的数，我们说 $a\equiv b(\bmod I)$(读作: a 和 b 对模 I 同余)。这个**同余**关系是一个等价关系，它具有传递性、对称性和自反性。根据这些性质可把 R 中所有数分为不相交的模 I 的剩余类，其方法是将所有对模 I 同余的数属于同一类。前面

关于同余记号的意义，在于大多数关于等式的计算规则对固定模的同余也成立。

历史上，同余的概念首先是由高斯对环 $\mathbf{z}$ 引进的。这里 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ 表示两个整数 a 和 b 的差在理想 $M=(m)$ 中，使得 $a-b$ 被 m 整除或者 a 和 b 被 m 除时具有相同的余数。

【例】 因为 $88-(-10)=98$ 被 14 整除，因此 $88\equiv-10(\mathrm{mod}\,14)$；$3^7\equiv1(\mathrm{mod}\,1093)$；$2^{32}\equiv-1(\mathrm{mod}\,641)$。

整数

整数环 $\mathbf{z}$ 的剩余类的某些性质能借助于数的整除性来研究。设 $(a,\ b)$ 表示两个数 a 和 b 的最大公因子(gcd)，并设 p 表示质数。

模 m 的剩余类环　在模 m 的剩余类中定义剩余类的加法和乘法后可成为环，这点能用例子说明。设 r_1 是由数 $\cdots-10,\ -4,\ 2,\ 8,\ 14,\ \cdots$ 组成的模 6 的剩余类 $\bar{2}$，设 r_2 是由数 $\cdots-7,\ -1,\ 5,\ 11,\ \cdots$ 组成的模 6 的剩余类 $\bar{5}$，那末定义 r_1+r_2 是包含 $2+5=7$ 的剩余类，事实上它包含所有被 6 除余数为 1 的数。我们写 $\bar{2}+\bar{5}=\bar{1}$，其他的例子是 $\bar{5}+\bar{0}=\bar{5}$，$\bar{3}+\bar{3}=\bar{0}$。用 $\bar{2}\cdot\bar{5}=\overline{10}=\bar{4}$ 定义乘积；其他模 6 的例子是 $\bar{5}\cdot\bar{0}=\bar{0}$，$\bar{3}\cdot\bar{3}=\bar{3}$，$\bar{2}\cdot\bar{3}=\bar{0}$。

在刚才定义的加法和乘法运算下，模 m 的剩余类构成所谓模 m 的剩余类环。我们能够确切地描述这种环的结构。它构成域的充要条件为 m 是素数。

素剩余类群　从 m 个关于模 m 不同的剩余类 $\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \cdots\overline{m-1}$ 中选出由与 m 互素的数组成的剩余类，我们就得到模 m 的素剩余类。对 $m=6$ 有两个素剩余类 $\bar{1}$ 和 $\bar{5}$；对 $m=p$ 总有 $p-1$ 个剩余类，即 $\bar{1},\ \bar{2},\ \cdots,\ \overline{p-1}$。

用 $\varphi(m)$ 表示模 m 的素剩余类的个数（欧拉函数）。例如，$\varphi(6)=2$，$\varphi(p)=p-1$；$\varphi(m)$ 是一个数论函数，即是定义在整数上的函数。倘若 $(a,\ b)=1$ 这函数是可乘的，即 $\varphi(a,\ b)=\varphi(a)\varphi(b)$。容易算出 $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^{k-1}(p-1)$。刚才叙述的规则使得有可能对所有 m 算出 $\varphi(m)$；例如，$\varphi(3240)=\varphi(2^3)\varphi(3^4)\varphi(5)=4\cdot54\cdot4=864$。

在乘法运算下，模 m 的素剩余类构成阶为 $\varphi(m)$ 的群 G_m。对所有 m，群 G_m 的结构是重要的，但是这里仅讨论 $m=p$ 的情况。G_p 是循环的，这表示每个模 p 的素剩余类可写为某个固定剩余类 $\bar{g}$ 的一个幂；称这个 g 是模 p 的原根。例如对 $p=11$ 剩余类群 G_{11} 能够由 $\bar{g}=2$(或由 $\bar{6},\ \bar{7},\ \bar{8}$)生

成，这时乘幂 $2^0\equiv1$, $2^1\equiv2$, $2^2\equiv4$, $2^3\equiv8$, $2^4\equiv5$, $2^5\equiv10$, $2^6\equiv9$, $2^7\equiv7$, $2^8\equiv3$, $2^9\equiv6 \pmod{11}$ 给出了所有 $p-1=10$ 个素剩余类 $\bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{10}$。因为阶 n 的有限群 G 的每个元素 a 满足等式 $a^n=e$（e 是单位元），对 $G=G_m$ 们有欧拉定理：

欧拉定理。 当 $(a, m)=1$ 时，$a^{\varphi(m)}\equiv1 \pmod m$。在 $m=p$ 的特殊情况下，变为**费尔马定理**：当 a 不能被 p 整除时，$a^{p-1}\equiv1 \pmod p$。

带有未知数的同余式　在剩余类环和剩余类群中能解出某些代数问题。例如，我们可问，模 m 的什么样的剩余类 $\bar{x}$ 适合给定的方程 $\overline{ax}=\bar{b}$。这类问题导致带有未知数的同余式问题。线性同余式 $ax\equiv b \pmod m$ 不总是可解的，例如 $3x\equiv2 \pmod{12}$ 是不可解的，因为没有 3 的整数倍被 12 除后余 2。事实上，$ax\equiv b \pmod m$ 可解的充要条件是 b 能被最大公因子 (a, m) 整除。*n 次同余式* $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_0\equiv0 \pmod m$ 所具有的不同余解的个数可能超过它的次数 n，例如 $x^2\equiv1 \pmod 8$ 有解 $x=1, 3, 5, 7$。如果模 m 是一个素数 p，它可以根本没解，或不能有多于 n 个剩余类作为解。

幂剩余。 在*二项同余式* $x^n\equiv a \pmod p$ 中 a 不能被 p 整除，使这同余式可解的剩余类 $a \pmod p$ 称为模 p 的 n 次幂剩余。这产生了两个基本问题：

1．对一个给定的素数，n 次方剩余是什么数？

2．对什么素数 p，给定的数 a 是 n 次方剩余？

第一个问题可以用欧拉准则 $a^{(p-1)/d}\equiv1 \pmod p$ 来回答，这里 $d=(p-1, n)$。满足这条件的剩余类 a 而且只有满足这条件的剩余类 a 是 n 次幂剩余。对第二个问题的回答导致互反定律，这是数论中最漂亮和最奥妙的结果之一。当 $n=2$, $(a, p)=1$ 时，使同余式 $x^2\equiv a \pmod p$ 可解的剩余类 $a \pmod p$ 称为（*二次的*）*剩余*，而使得同余式不可解的称为（*二次的*）*非剩余*。对奇数 p，存在个数相同的模 p 的剩余和非剩余类，即都是 $(p-1)/2$ 个。例如，模 17 时我们有 $1^2\equiv1$, $2^2\equiv4$, $3^2\equiv9$, $4^2\equiv16$, $5^2\equiv8$, $6^2\equiv2$, $7^2\equiv15$, $8^2\equiv13$。因此 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16 是八个剩余类，而 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14 是八个模 17 的非剩余类。

互反定律　关于对什么样的模 p，给定的数 a 是二次剩余这个问题的讨论导致值得庆贺的二次互反定律的发现，这是由欧拉根据广泛的材料建立起来的。设 p 和 q 是奇素数，如果这两个素数中至少有一个是

$4k+1$ 型的，那末同余式 $x^2 \equiv p(\bmod q)$ 和 $y^2 \equiv q(\bmod p)$ 同时可解或同时不可解(换句话说，当且仅当 q 是 $\bmod p$ 剩余时，p 是 $\bmod q$ 剩余)。但是如果 p 和 q 是 $4k+3$ 型的，那末这两个同余式仅有一个是可解的，而另一个是不可解的。高斯在十八岁那年找到了这个定律的第一个完整的证明。后来他给出了六个进一步的证明，他称之为基本定理。自那以后总共找到了五十多个不同的证明。为了发现高次幂剩余的互反定律而采用的各种原理和作出的努力给数论以有力的推动。

大约在高斯的证明出现前十年，勒让德发表了二次互反定律的证明，但这证明有一些缺陷。勒让德引进了有用的记号 (a/p)(勒让德记号)，它根据 a 是模 p 剩余，模 p 非剩余或被 p 整除而取值 $+1$，-1，或 0。这使得有可能用

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(1-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

表示互反定律。命题

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}} \text{和} \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

是对互反定律的补充。第一个结论说明同余式 $x^2\equiv -1\ (\bmod p)$ 当 p 是 $4k+1$，即 $(p-1)/2$ 为偶数时是可解的，而当 p 具有形式 $4k+3$，即 $(p-1)/2$ 是奇数时，它是不可解的。

丢番都方程　设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的整系数多项式，设方程 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=b$ 要求整数解，那末称这方程是*丢番都方程*。这类方程是以亚历山大城的希腊数学家丢番都来命名的。丢番都方程组 $f_1=b_1, f_2=b_2, \cdots, f_k=b_k$ 等价于单个方程 $(f_1-b_1)^2+(f_2-b_2)^2+\cdots+(f_k-b_k)^2=0$，即在 $\mathbf{z}$ 中方程组的解和单个方程的解是相同的。当且仅当 b 被 $gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 整除时，*线性丢番都方程* $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ ($a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ 是整数)是可解的。

如果它是可解的，那末有无穷多个 n 元解。$n=2$ 的情况容易考虑。如果 a_1 和 a_2 是互素的，x_1', x_2' 是 $a_1x_1+a_2x_2=b$ 的任意解，那末所有的解能表示为 $x_1=x_1'+a_2t$，$x_2=x_2'-a_1t$，这里 t 是任意整数。特殊的解组能够从 a_1/a_2 的连分式的倒数第二个渐近分数中得到。

【例】　$43x_1+19x_2=b$。$43/19$ 的渐近分数是 $7/3$，$9/4$，$43/19$(见 **I**. 第3章第6节-连分数)。分数 $9/4$ 产生 $x_1'=4b$，$x_2'=-9b$，这样一般解可写为 $x_1=4b+19t$，$x_2=-9b-43t$。

对 $n\geqslant 3$ 已经发展了更一般的连分数方法。如果给定 m 个独立的线性方程 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, $i=1, 2, \cdots, m$, 如果 $m>n$, 这方程组是超定的，一般讲没有解。但是如果 $m<n$, 方程组是不定的，一般讲它有无穷多个解。更确切地说，在后一种情况方程组具有整数解的充要条件是系数矩阵 (a_{ij}) 的所有 m 阶行列式的最大公因子等于增广系数矩阵的 m 阶行列式的最大公因子，这个增广系数矩阵是由 (a_{ij}) 加上 b_i 组成的列后得到的。

解最一般的含两个未知数 x_1, x_2 具有整系数 c_{ij} 的二次丢番都方程

$$c_{11}x_1^2+c_{12}x_1x_2+c_{22}x_2^2+c_{13}x_1+c_{23}x_2+c_{33}=0$$

可以通过变量变换化为特殊型方程 $y_1^2-Dy_2^2=b$ 的求解问题，其中 D 和 b 是整数。两种情况要加以区分，如果 $D<0$, 那末不存在任何解或具有有限多个解 y_1, y_2。如果 $D>0$ (D 不是平方数)，$b=1$, 那末所谓**派尔(Pell)方程** $y_1^2-Dy_2^2=1$ 除了平凡解 $y_1=\pm 1$, $y_2=0$ 外，还具有无限多个解，这些解能够从最小解中得到。容易看出更一般的方程 $y_1^2-Dy_2^2=b$。当 b 是模 D 的平方非剩余时不能有任何解。

【例】 1、$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=19$ 有 12 组解 2, 3; -2, -3; 3, 2; -3, -2; 2, -5; -2, -5; 5, -2; -5, 2; 3, -5; -3, 5; 5, -3; -5, 3。

2．$y_1^2-5y_2^2=1$。由最小解 $y_1'=9$, $y_2'=4$, 当 $n=0, 1, 2, \cdots$ 我们得到解的全体 $y_1=\pm[(9+4\sqrt{5})^n+(9-4\sqrt{5})^n]/2$, $y_2=\pm[(9+4\sqrt{5})^n-(9-4\sqrt{5})^n]/(2\sqrt{5})$。

寻找直角边 x, y 和斜边 z 都是单位长的整数倍的所有直角三角形导致丢番都方程 $x^2+y^2=z^2$。它的解，即毕达哥拉斯数，能用公式 $x=u^2-v^2$, $y=2uv$, $z=u^2+v^2$ 表示，这里 u, v 是任意整数。最小解是 $3^2+4^2=5^2$ 和 $5^2+12^2=13^2$。

$n=2$ 的情况和 $n\geqslant 3$ 的情况之间有着惊人的差别。舒依(Thue)的定理说：方程 $a_1x^n+a_2x^{n-1}y+\cdots a_ny^n=b$ ($n\geqslant 3$, $a_1\neq 0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是整数)只有有限多个解，除非它的左边能分解为具有整系数的较低次的齐次因子。高次的丢番都方程导致深刻的问题，解它需要代数数论的知识。

在它们之中**费尔马猜想**(也称为费尔马大定理)具有特殊的兴趣：对任何整数指数 $n>2$ 不存在满足方程 $x^n+y^n=z^n$ 的非零整数 x, y, z。费尔马(大约 1637 年)在他关于丢番都问题的工作笔记本的空白边缘上写着："我已经发现了真正惊人的证明，但是这纸边太小了，不能写下。"他的证

明从未找到，尽管有优秀数学家们的努力，然而没有一个人能证明或否定这一猜想。已经得到一些有趣的结果；例如知道当 n 大到 4002 时，猜想是正确的。

解析数论 除了欧拉函数以外，在数论中已研究了许多以自然数作为定义域的函数 $f(n)$。

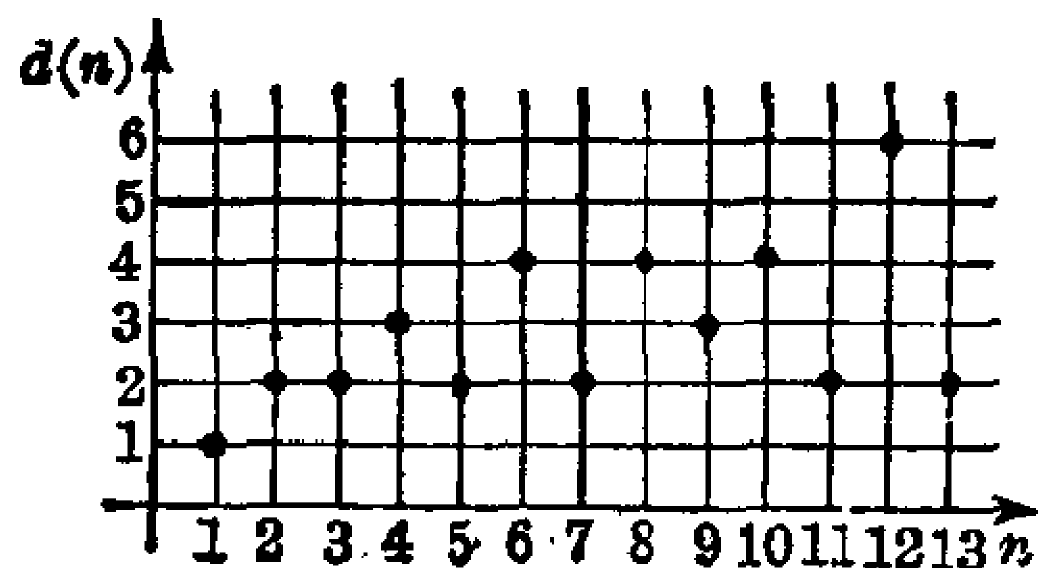


图 18-2 数论函数 $d(n)$：n 的正因子的总数

例如：$\pi(x)$，小于等于 x 的素数的个数；$d(n)$，n 的因子数（见图18-2）；$\sigma(n)$，n 的正因子之和；$r(n)$，方程 $x^2+y^2=n$ 的整数组解 x，y 的个数。这些函数中的某一些表现出非常古怪的性状，例如，$d(1)=1$，$d(2)=2$，$d(3)=2$，$d(4)=3$，$d(5)=2$，$d(6)=4$，$d(7)=2$，$d(8)=4$ 等等。然而，常常能从 f 的前面几个函数值的平均值找到其规律性。函数

$$[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)]/n$$

在许多情况下，当 n 增加时的渐近性状类似于 n 的解析函数，例如，$(1/n)\sum\limits_{k<n} d(k)$ 增长象 n 的自然对数一样。令 $[d(1)+d(2)+\cdots+d(n)]/n=\ln n+R(n)$，我们发现 $R(n)$ 是比 $\ln n$ 低阶的量。数论函数的平均值的研究，首先是它们的余项 $R(n)$ 的研究，需用最细致的分析工具。解析数论这个数学分支，从 18 世纪欧拉开始，一直到今天，始终受到著名数学家们的重视，现在仍在不断发展中。特别使人感兴趣的是函数 $\pi(x)$，即小于等于 x 的质数的个数。

高斯猜想到渐近规律 $\pi(x)\sim x/\ln x$，它的正确性一直到 1900 年左右才被阿达马和德·拉·伐利-普辛 (de la Vallée-Poussin) 所证明。他们的研究表明，对 $\pi(x)$ 最好的近似是积分对数 $\mathrm{li}(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$，余项 $R(x)=\pi(x)-\mathrm{li}(x)$ 的估计与黎曼的采他函数 $\zeta(s)=\Sigma 1/n^s$ 的复零点位置有关，这里 $s=\sigma+it$，$\sigma>1$。

在其他许多分布问题中，有首先为 L. 狄里克雷所证明的著名定理：每一个首项和公差互素的算术级数包含无限多个素数项。

堆垒素数论 我们将用一些特殊的定理和问题举例说明堆垒素数论的问题。

费尔马定理：每个具有性质 $p\equiv 1 \pmod 4$ 的素数 p 是两个自然数的平方和。若不管被加项的次序，这个表示是唯一的。

【例】 $233=8^2+13^2$。

拉格朗日定理：每个自然数可表示为不超过四个自然数的平方和。

【例】 11能写为三个数的平方和：$11=3^2+1^2+1^2$，7则需要4个数的平方：$7=2^2+1^2+1^2+1^2$。

华林(Waring)问题(1770年由华林提出，1909年由希尔伯特第一个解决)。存在一个数论函数 $g(k)$，使得每个自然数能表示为最多 $g(k)$ 个自然数的 k 次幂的和。例如，由拉格朗日定理 $g(2)=4$，$g(3)=9$。有趣的是当 $k\geqslant 3$ 时每个充分大的 n 只需要少于 $g(k)$ 个加数。已经知道 $239=4^3+4^3+3^3+3^3+3^3+3^3+1^3+1^3+1^3$ 是需用9个立方数的最大数；所有比它大的数至多需用8个立方数，已经证明，从某个自然数开始，其后所有的数可以分解为最多7个立方数。

哥德巴赫猜想。在1742年给欧拉的信中，哥德巴赫猜测每个大于6的偶数是两个奇素数的和。这个猜测至今既没有被证明也没有被否定。在这方面的最好结果属于维诺格拉道夫(Vinogradov，生于1891年)的三素数定理：每个充分大的奇整数是三个奇素数的和。这个证明用了非常精细的分析方法*。

划分。所谓一个自然数 n 的划分是把 n 表示为几个自然数的和。n 的所有划分数用 $p(n)$ 表示，这里项数没有限制，相等的加数是允许的，也不管加数的次序。因此 $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$ 是5的7个划分，因此 $p(5)=7$。函数 $p(n)$ 有许多有趣的性质，例如 $p(5n+4)\equiv 0 \pmod 5$，当 n 充分大时，$p(n)\sim [1/(4n\sqrt{3})]\exp\left[\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\right]$。一般地说，堆垒数论的基本问题可陈述如下：设 A 是自然数集，$s>2$ 是一个给定的自然数，是否每个自然数可表示为 A 的至多 s 个元素之和？自从1930年以来，应用新的方法和概念(A 的阶和稠密性)，这个问题已得到了成功的解决。

代数数

代数数域 代数数是代数方程 $f(x)=0$ 的复数根。这里 $f(x)=$

* 这方面最好的结果，目前属于我国著名的数学家陈景润，他证明了每个充分大的偶数可表示为一个奇素数和两个偶素数之和。——译者注

$a_0x^m+\cdots+a_m$ 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的多项式，$a_0\neq 0$，$m\geqslant 1$，换言之，a_0，a_1，$\cdots$，a_m 是有理数。数 α 是无限多个不同次数的方程的根；例如 $\alpha=\sqrt{3}$ 适合方程 $x^2-3=0$，$x^3-x^2-3x+3=0$，$x^4-9=0$ 等等。但是后面两个方程中的多项式能分解为低次的：

$$x^3-x^2-3x+3=(x^2-3)(x+1) \text{和} x^4-9=(x^2-3)(x^2+3)。$$

这种多项式称为是**可约的**。如果不能把 $\mathbf{Q}$ 上的多项式分解成为系数仍在 $\mathbf{Q}$ 中的低次的非常数因子，那末 $f(x)$ 称为在 $\mathbf{Q}$ 上**不可约**；例如 $f(x)=x^2-3$ 是不可约的。

对一个代数数 α 恰好存在一个首项系数为1的不可约有理系数多项式 $\varphi(x)$，使得 $\varphi(\alpha)=0$。代数数的次数定义为 $\varphi(x)$ 的次数。例如，每个有理数 r 是一次代数数，即是 $x-r=0$ 的根；$(1+i\sqrt{3})/2$ 是二次的，它是 $x^2-x+1=0$ 的根；$\sqrt[n]{2}$ 是 n 次的，因为它是 $x^n-2=0$ 的一个根。

$\varphi(x)=0$ 的根 $\alpha^{(1)}$，$\alpha^{(2)}$，$\cdots$，$\alpha^{(n)}$（其中之一是 α）称为是 α 的**共轭数**，这些根是相异的。如果在 $\varphi(x)=0$ 中所有系数是整数，那末 α 称为**代数整数**。

设 ϑ 是一个代数数。包含 $\mathbf{Q}$ 和 ϑ 的最小域 $k=\mathbf{Q}(\vartheta)$ 称为**代数数域**。例如，$\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 由所有形为 $a+b\sqrt{3}$ 的数组成，其中 a 和 b 是有理数。容易验证事实上这些数确实组成一个域，例如 $1/(a+b\sqrt{3})=(a-b\sqrt{3})/(a^2-3b^2)=A+B\sqrt{3}$。使得 $k=\mathbf{Q}(\vartheta)$ 的数 ϑ 的次数（唯一确定的）称为 k 的**次数**。

二次数域 在特殊类型的数域中，二次数域研究得最透彻。取 $\vartheta=\sqrt{d}$，我们可假定 d 是不能被平方数整除的整数。在这个条件下，我们能区分 $d\equiv 1 \pmod 4$ 和 $d\equiv 2$ 或 $3 \pmod 4$ 的二次数域 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$。在前一种情况下这个域的**整数基**是 $\omega_1=1$，$\omega_2=(-1+\sqrt{d})/2$，在后一种情况下它的整数基是 $\omega_1=1$，$\omega_2=\sqrt{d}$。因此每个 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 的代数整数能唯一地表示为 $c_1\omega_1+c_2\omega_2$，其中 c_1 和 c_2 是有理整数。

分圆域 对每个自然数 n，$z^n-1=0$ 称为**分圆多项式**，它的 n 个根称为 n **次单位根**，因为在复平面上表示这些根时，它们把单位圆绕原点分成 n 个相等的部分。对于 $n\geqslant 2$，不等于1的 $n-1$ 个根适合方程 $f(z)=0$，这里

$$f(z)=(z^n-1)/(z-1)=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1。$$

当 n 是素数 p 时，那末多项式 $f(z)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约。容易看出在这种情况

下数 ω, ω^2, …, ω^{p-1} 都是 $f(x)=0$ 的根，这里 ω 是任意一个根。域 $\mathbf{Q}(\omega)$ 称为是分圆域。它的共轭 $\mathbf{Q}(\omega)$, $\mathbf{Q}(\omega^2)$, …, $\mathbf{Q}(\omega^{p-1})$ 都是 $p-1$ 次的，并且相互重合。对一般的 n，库莫尔(Kummer)在研究费尔马大定理时，对相应的分圆域进行了精深的研究，他的结果是代数数论发展中的先驱。在他之前高斯想出了解分圆方程的一个方法。库莫尔的理论也有可能表示出所有的可用圆规和直尺作出的正 n 边形。因此在分圆理论中(希腊称作圆的分割)三个数学领域，即几何、代数和数论之间以奥妙的方式互相影响。

单位。在代数数域中一种特殊类型的代数整数是单位 ε，它们是 1 的根。它们的倒数 ε^{-1} 也是代数整数。在 $\mathbf{Q}$ 中仅有的单位是 ± 1。但通常在代数数域中包含无穷多个单位。它们能从它们中的有限个(基本单位)用乘法和指数幂的方法得到(**狄里克雷单位定理**)。除 $\mathbf{Q}$ 外，虚的二次数域(它的生成数 ϑ 是复数)有有限多个单位。对代数数域的研究已经导致了很有趣的结果。

理想论　人们根据 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{Z}$ 中的算术规律联想到假定每个代数整数可以分解为素因子的乘积，这些因子是代数整数，并且不计因子的次序和单位因子，这个分解是唯一的。但是在 19 世纪人们认识到这个假定是错误的。例如在二次数域 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ 中数 6 有二个不同的分解 $6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{5})$。必须而且可以指出的是：除了单位因子以外，数 2, 3, $1+\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$ 在 $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ 中不能继续分解。

这似乎表示对代数整数不可能有简单的算术理论。但是库莫尔找到了一种方法，这种方法后来独立地由克朗尼格(Kronecker)和戴德金加以发展。戴德金创造了理想的理论，他用代数数域 k 上的代数整数环 R 中的理想代替代数整数，并证明了主要定理：

R 中的每个理想，它不同于 R 自身和(0)，能表示为素理想的积，并且不计因子的次序，这分解是唯一的。

对有理整数环 $\mathbf{Z}$，这意味着每个主理想 (m) 如不计因子的次序，可唯一地表示为素理想的乘积 $(p_1)(p_2)\cdots(p_m)$。但是这仅仅是叙述初等数论中基本定理 $m=\pm p_1p_2\cdots p_n$ 的另一种方法。

理想类。k 上环 R 的两个理想 A 和 B 称为是等价的，如存在两个主理想 (α) 和 (β) 使得 $(\alpha)A=(\beta)B$。根据这个等价的概念我们能把 R 中所有的理想分成不相交的类，并且已经搞清所得类的数目 h 是有限的。主

理想自身也构成一类。在z中这是仅有的使$h=1$的类。h的决定是一件困难的事，但是能借助于分析得到。有一个由狄里克雷得到的关于类数的超越公式。对特殊类型的域我们有h的一个算术表达式。

超越数

不是代数数的数γ称为是**超越数**。它不满足任何整系数的代数方程。超越数的存在并不是立即就清楚的。刘维尔首先明确地构造出超越数，例如，$\sum_{n=1}^{\infty}(1/2^{n!})$。他的方法是根据这样一个定理：代数数不能用有理数"完全任意"地逼近。例如，他证明了对n次的代数数，可以找到这样一个正的实常数c，使得$|\alpha-r/s|>c\cdot s^{-n}$对所有有理数$r$，$s(s>0)$成立。下边的舒依-塞盖尔-洛斯(Thue-Siegel-Roth)定理是非常深刻的：不等式$|\alpha-r/s|<s^{-\mu}$，仅有有限多个解r,s，这里$\mu>2$，α是任何代数数，r，s是有理整数$(s>0)$。

特别有意义的是要知道一个特殊的数或给定解析函数的一个值是否是超越数。赫米特首先证明了(在1873年)：自然对数的底是超越数。之后不久林德曼(Lindmann)成功地证明了(在1882年)单位圆的面积π也是超越数。这表示化圆为方是不可能的，即利用圆规和直尺画出正方形使其面积等于给定半径的圆是不可能的。

更一般地说，如果$\alpha\neq0$，那末α和e^{α}不能同时是代数数。因此，函数e^{x}(对$x\neq0$)和$\ln x(x\neq0,\ 1)$对代数自变量x有超越值。这个结果是用复变函数方法来证明的，它也用来证明e^{α}是超越数。现在仍不知道e^{α}或者$e+\pi$或者欧拉常数γ是否是超越数。

到本世纪，D．希尔伯特列出了23个重要的数学问题。其中第七个问题已经解决了：如果α是不等于0，1的代数数，β是无理的代数数，则α^{β}是超越数。这表明两个代数数的对数的商或是有理数或是超越数。许多超越性的叙述涉及到椭圆积分和椭圆函数。例如，若椭圆的轴长是代数数，则其周长是超越数。超越数的代数独立性问题在超越数的理论中起着重要的作用。其中有林德曼的定理：

如果$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$是在有理数域$\mathbf{Q}$上的线性无关的代数数，那末不存在关系$\beta_1e^{\alpha_1}+\beta_2e^{\alpha_2}+\cdots+\beta_ne^{\alpha_n}=0$，这里$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n$是代数数，除非$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n$全为零。

第19章 代数几何

代数几何是从代数曲线、曲面理论和意大利学派的n维几何中发展而来的。牛顿、麦克劳林、欧拉和克拉默对平面代数曲线的理论作出了首要的贡献。按精确意义，代数几何的发现者是诺德(Max Noether, 1844～1921年)。意大利几何学家，主要是塞格列(Corrado Segre, 1863～1924年)、塞维里(Frarcesco Severi, 1879～1961年)和恩尔格(Federigo Enrlques, 1871～1946年)全面发展了这个学科。本世纪德国学派着手从代数观点对这门学科的基础进行了讨论，特别要提到诺德的女儿E.诺德(Emmy Noether, 1882～1935年)、范·德·瓦尔登(Bartel L. Van Der Waerden, 生于1903年)和格吕伯纳(Wolfgang Gröbner, 生于1899年)。

代数曲线和曲面 代数几何的中心概念是n维射影空间S_n中的代数簇(AV)，在S_n中每个点是用$n+1$个坐标的比$x_0:x_1:x_2:\cdots:x_n$给出的。

为了说明这个概念，我们首先探讨$n=2$的情形；这时S_2是射影平面。S_2的一个(平面)代数曲线是用齐次代数方程$F(x_0, x_1, x_2)=0$来定义的，即曲线是满足这方程的点(ξ_0, ξ_1, ξ_2)的全体。例如，可以把抛物线的方程$y^2=2p(x-a)$变为齐次的：$x_2^2/x_0^2=2p(x_1/x_0-a)$或$2apx_0^2-2px_0x_1+x_2^2=0$；在它的左边有齐次多项式(型)$F(x_0, x_1, x_2)$。从两个齐次代数方程$F_1(x_0, x_1, x_2)=0$和$F_2(x_0, x_1, x_2)=0$出发可得到曲线$F_1=0$和$F_2=0$的公共点，即同时满足二个方程的点$(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$的全体。如果$F_1(x_0, x_1, x_2)$和$F_2(x_0, x_1, x_2)$不具有公因子，那末只存在有限多个这种公共点。两种情况(一条代数曲线；有限多个点)都是射影平面上代数簇的例子。

在$n=3$的情况，即在射影空间S_3，一个型$F(x_0, x_1, x_2, x_3)$给出了一个代数曲面；不具有公因子的两个型$F_1(x_0, x_1, x_2, x_3)$和$F_2(x_0, x_1, x_2, x_3)$给出了一个平面的或空间的代数曲线。三个或更多个无公因子的型

$F_1, F_2, F_3, \cdots$仍可能给出一条曲线。S_3的曲线上的点$(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$除满足$F_i=0(i=1, 2$或$i=1, 2, 3, \cdots)$外，还满足别的方程；例如，$GF_i=0$，$G$可以是常数或者更一般地说可以是任何型且$F_i \pm F_k=0$（如果$F_i$和$F_k$有相同的次数）。

多项式理想，零点集和代数簇　为了考察所有这些方程，采用交换环R中的理想概念是适宜的。

定义。环R中元素集$\boldsymbol{a}$称为是**理想**，如果给定$\boldsymbol{a}$中两个元素a和b，$a-b$仍在$\boldsymbol{a}$中，而且若a是$\boldsymbol{a}$中任意元素，那末对R中任一元素r，乘积ra也在$\boldsymbol{a}$中。一个简单的例子是所有ra和ar组成的元素集，其中a是R中固定元素。这种类型的理想称为**主理想**，并用(a)表示。历史上理想的概念首先是用在与费尔马问题有关的数论问题中。特别是，若R是多项式$f, g, \cdots$的环，那末它的理想称为**多项式理想**。若我们仅考虑R中的型，因而它在R的一个理想中，那末我们有**齐次理想**（**H理想**）。如果H理想$\boldsymbol{a}$中每个型$F(x)=F(x_0, x_1, \cdots, x_n)$在$x_0=\xi_0, x_1=\xi_1, \cdots, x_n=\xi_n$处为零，则称$S_n$中的点$(\xi)=(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$为$H$理想$\boldsymbol{a}$的**零点**。$\boldsymbol{a}$的所有零点的全体称为$H$理想的**零点集**（看上边的例子）。

下边将引述几个关于交换环R中理想的定理，它们对代数几何是重要的。

属于环R的两个理想$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的元素全体是$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的**交**，记作$\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}$。两个理想的交仍是理想。$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的**和**$(a, b)$是所有$a+b$这种元素全体，其中$a \in \boldsymbol{a}$，$b \in \boldsymbol{b}$。两个理想的和仍是理想。**两个零点集的交**$SZ(\boldsymbol{a}) \cap SZ(\boldsymbol{b})$是同时属于$SZ(\boldsymbol{a})$和$SZ(\boldsymbol{b})$的点$(\xi)$的集合。**并或和**

$$SZ(\boldsymbol{a}) \cup SZ(\boldsymbol{b})=SZ(\boldsymbol{a})+SZ(\boldsymbol{b})$$

是至少属于SZ中某一个的所有点组成的集合。成立下边两个定理：(1) $SZ(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b})=SZ(\boldsymbol{a})+SZ(\boldsymbol{b})$；(2) $SZ(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=SZ(\boldsymbol{a}) \cap SZ(\boldsymbol{b})$。这些定义和定理能推广到有限多个理想的情况。

一个理想$\boldsymbol{a}$若它是与$\boldsymbol{a}$不同的两个理想的交则称为可约的；否则称为不可约的。相应地$SZ(\boldsymbol{a})$称为可约或不可约根据a是可约或不可约而定。

【例】　$\boldsymbol{a}=(x_1^2-x_2^2)=(x_1+x_2) \cap (x_1-x_2)$；在$S_2$中$\boldsymbol{a}$的$SZ$是一对直线$x_1+x_2=0$，$x_1-x_2=0$。

然而，一个多项式理想不是唯一地由它的SZ所确定的。例如，H

理想 $\boldsymbol{a}=(x_1+x_2)$ 和 $\boldsymbol{b}=((x_1+x_2)^2)$ 在 S_2 中有相同的 SZ, 即直线 $x_1+x_2=0$ 上的点。因此,把一个代数簇 $AV(\boldsymbol{a})$ 看作不是由 $SZ(\boldsymbol{a})$ 单独确定而是由另外的条件所确定是方便的。我们能用 H 理想 $\boldsymbol{a}$ 本身来刻划 $AV(\boldsymbol{a})$。在这种意义下，在上例中 $AV(\boldsymbol{a})\neq AV(\boldsymbol{b})$。现在根据拉斯科(Lasker)—诺德定理,每个多项式理想能表示为有限个不可约理想的交:(3) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{q}_1\cap\boldsymbol{q}_2\cap\cdots\cap\boldsymbol{q}_s$。由定义，这给出了分划 (4) $AV(\boldsymbol{a})=AV(\boldsymbol{q}_1)+AV(\boldsymbol{q}_2)+\cdots+AV(\boldsymbol{q}_s)$。特别应当注意的是表示(3)，因此分划(4)对所有理想 $\boldsymbol{a}$ 并不是唯一的。

为了进一步研究不可约理想,下述定义是必要的。设 $\boldsymbol{p}$ 是环 R 的理想,若由 $ab\in\boldsymbol{p}$ 和 $a\notin\boldsymbol{p}$ 可推出 $b\in\boldsymbol{p}$,则 $\boldsymbol{p}$ 称为*素理想*。若对于环 R 的理想 $\boldsymbol{q}$, 从 $ab\in\boldsymbol{q}$ 和 $a\notin\boldsymbol{q}$, $b\notin\boldsymbol{q}$ 可推出 $a^\rho\in\boldsymbol{q}$ 和 $b^\sigma\in\boldsymbol{q}$, 则 $\boldsymbol{q}$ 称为*准素理想*,这里 ρ 和 σ 是适当的自然数。对多项式理想下面定理成立。

(5)每个素理想是不可约的。

(6)每个不可约理想是准素理想,但并非每个准素理想是不可约的。

(7)对每个准素理想 $\boldsymbol{q}$,恰好存在一个素理想 $\boldsymbol{p}$ 使得

$$SZ(\boldsymbol{q})=SZ(\boldsymbol{p})。$$

(8)属于(3)中不可约分量 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_s$ 的素理想 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_s$ 是由 $\boldsymbol{a}$ 唯一确定的;它们称为属于 $\boldsymbol{a}$ 的素理想。

由此(见(6), (7))对不可约理想 $\boldsymbol{q}$ 的每个 SZ,恰好存在一个素理想 $\boldsymbol{p}$, 使得 $SZ(\boldsymbol{q})=SZ(\boldsymbol{p})$。因此素理想是由它的 SZ 唯一确定的。所以由定义, $AV(\boldsymbol{p})=SZ(\boldsymbol{p})$。

一般零点 根据范·德·瓦尔登，每个 $SZ(\boldsymbol{p})$能用下述方式来刻划。暂且不谈所谓*特殊点*(ξ),它的坐标是系数域 K 的代数扩张中的元素,我们也能考虑点(9) $(\xi(t))=(\xi_0(t_0, \cdots, t_k), \cdots, \xi_n(t_0, \cdots, t_k))$,它的坐标是 $K(t_0, \cdots, t_k)$ 的代数扩张中的元素, $K(t_0, \cdots, t_k)$ 是系数在 K 中不定元 $t_0, \cdots, t_k$ 的有理函数域。

定义: 若 $F(x)\in\boldsymbol{a}$ 的充要条件是 $F(\xi(t))=0$, 则 $(\xi(t))$ 称为是理想 $\boldsymbol{a}$ 的*一般零点*或 $SZ(\boldsymbol{a})$ 的*一般点*。例如,圆 (10) $x_1^2+x_2^2=x_0^2$(在非齐次坐标下是(11) $x^2+y^2=1$)有一般点(12) $x_0=t_0(1+t_1^2)$, $x_1=t_0(1-t_1^2)$, $x_2=2t_0t_1$。

素理想 $\boldsymbol{p}$ 恰好有一个一般零点。

从(12)中令(13) $x=x_1/x_0=(1-t_1^2)/(1+t_1^2)$, $y=x_2/x_0=2t_1/(1+t_1^2)$,

我们能得到(11)的一般零点。类似地，从(9)中把所有的坐标用第一个非零坐标除后我们能得到非齐次坐标的一般零点。用这种方法得到的代数独立的非齐次坐标的最大数目称为是 $\boldsymbol{p}$ 或 $SZ(\boldsymbol{p})$ 的**维数**；若由 $f(u_1, \cdots, u_s)=0$ 可推出其所有的系数为 0，则 s 个数 $u_1, \cdots, u_s$ 称为在域 K 上**代数独立**，这里 f 是系数在 K 中的多项式。从(9)，用所有可能的特殊值代替 $(\xi(t))$ 中的 $t_0, \cdots, t_k$（**参数的特殊化**），我们得到所有 $SZ(\boldsymbol{p})$ 的点(对低维的分量有可能例外)。例如，圆(10)的一般零点(12)给出了除去点 S 之外的所有点，S 是对应 $x_0:x_1:x_2=1:-1:0$ 的点。类似地，(13)给出了除 $S(x, y)=(-1, 0)$ 外的(11)的点。

如果在图 19-1 中我们取所有的直线 (14)$y=m(x+1)$，那末每根直线交圆(11)于 S 和另一个点 P，P 点坐标 (x, y) 由斜率 m 唯一确定。将(14)的 y 代入(11)，我们得到 $(1+m^2)x^2+2m^2x+(1-m^2)=0$。这二次方程有根 -1 和 $(1-m^2)/(1+m^2)$；结合(14)这给出了两个点 $S(-1,0)$ 和 $P((1-m^2)/(1+m^2), 2m/(1+m^2))$。所有用这种方法得到的点 P 与 S 点不相同，因为不是任何 m 都满足方程 $(1-m^2)/(1+m^2)=-1$。这对应于如下事实：直线 $x=-1$ 不能表示为形式(14)。相反地，圆上不同于 S 的点 $P(x, y)$ 对应于值 $m=y/(x+1)$。如果斜率 m 取为参数 t_1，那末 P 点的坐标取(13)这种形式。与 $x=\cos t$, $y=\sin t$ 相对照，此圆的参数表示是有理的。

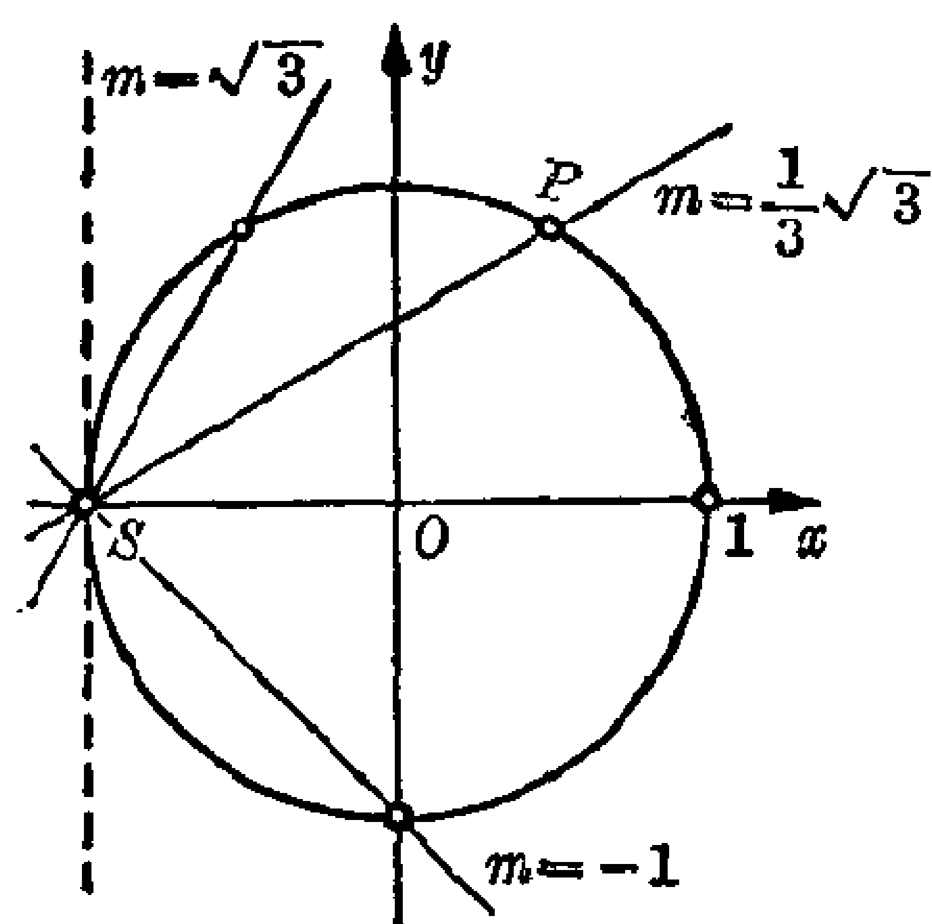


图 19-1 单位圆的有理参数表示

重数　代替象上边那样用理想来刻划 $AV(\boldsymbol{a})$ 的方法，如果给定了属于 $\boldsymbol{a}$ 的素理想 $\boldsymbol{p}_\sigma$（见(8)）且对于它们中的每一个都对应一个非负数 μ_σ 作为它的**重数**，那末 AV 能够唯一地确定。这能用公式表示为

$$AV(\boldsymbol{a})=\mu_1 SZ(\boldsymbol{p}_1)+\cdots+\mu_s SZ(\boldsymbol{p}_s)。$$

例如，上边考虑的理想 $\boldsymbol{b}=((x_1+x_2)^2)$ 确定由直线 $x_1+x_2=0$ 组成的重数为 2 的 AV。重数的概念在代数簇的交的讨论中特别重要。已经给重数下了两个定义，它们对 S_2 和 S_3 是一致的，但是在高维空间中导致不同的结果。第一个定义是以早期几何学家所假设的**数的守恒原理**为基础，按

照这原理，在特殊情况下的交点数目等于在一般情况下的交点数。此原理的确切公式和应用上的限制在1927年由范·德·瓦尔登应用关系真实特殊化的概念后得到。在另一方面，第二个理想理论的重数定义是用一个理想的长度给出的。如果应用这个定义，与第一个定义相对照，广义比绍特(Bezout)定理不再是无限制适用了；然而在别的问题中使用理想的长度是合适的。

近代方法 为了确定簇的概念，查理斯基(Oscar Zariski，生于1899年)首先在1938年除了SZ和重数外还使用了赋值论的方法；这理论不但与克鲁尔(Wolfgang Krull，1899～1971年)的局部环的理论有关，也与函数论和集论拓扑有联系。

后来在1946年威尔(André Weil，生于1906年)用拓扑方法(层论，上同调理论)给出了代数几何新的基础，这常常涉及到近代的工作。

第20章 进一步的代数结构

与向量空间有关的代数结构的特征已经在 **II**. 第3章和 **II**. 第4章中仔细讨论过了。因为这概念对近世代数特别重要，下边对从群和域到格，到环和代数，以及到表示理论的进一步发展作一个简单的说明。

格

格的概念是为了推广和统一发生于集合的子集之间的某些关系而建立起来的，这些关系也产生于某些结构象群、域、拓扑空间等等的子结构之间。格论的发展大约始于1930年，是在伯克霍夫(Garrett Birkhoff)的工作影响下发展起来的。

> **具有两种运算(称作交($\cap$)和并($\cup$))的集合 L 称为格。如果对 L 的任意元素 $a, b, \cdots$ 下边的公理成立:**
>
> **(1) 交换律** $a\cap b=b\cap a$; $a\cup b=b\cup a$,
>
> **(2) 结合律** $(a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c)$; $(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c)$, **和**
>
> **(3) 吸收律** $a\cup(a\cap b)=a$ **和** $a\cap(b\cup a)=a$。

【例1】 如果 H_1 和 H_2 是群 G 的任意子群，那末 $H_1\cap H_2$ 和 $H_1\dot{\cup} H_2=\langle H_1\cup H_2\rangle$ 都是 G 的子群。G 的所有子群集合在这些运算下为格。

【例2】 非负整数带有下述运算后构成格：交定义为最大公因子，并定义为最小公倍数。

【例3】 某些逻辑命题类在运算 and (交)和 or (并)下构成格。

【例4】 集合的子集在通常的交和并的运算下构成格。

【例5】 两个给定域的中间域构成格，若其中交就是通常的交的运算，两个域的并定义为包含这两个域的最小域(见 **II**. 第3章)。

从格 L_1 到格 L_2 上的双射映照 φ 称为是**同构的**，如果对任何 L_1 中的元素 a 和 b:

$$\varphi(a\cap b)=\varphi(a)\cap\varphi(b) \quad \text{和} \quad \varphi(a\cup b)=\varphi(a)\cup\varphi(b)。$$

如果把格 L_2 中的运算 $\cap$ 和 $\cup$ 对换，我们得到新的格 $D(L_2)$，称它为 L_2 的**对偶格**。从格 L_1 到格 L_2 的双射映照 φ 称为**对偶同构的**，如果它是 L_1 到 $D(L_2)$ 上的一个同构。

用格论的概念可以将伽罗华理论的基本定理改写为下述形式(见 II. 第3章)。

伽罗华理论的基本定理：把每个中间域与对应的伽罗华群联系起来的映照是从中间域组成的格到伽罗华群的子群组成的格的对偶同构映射。

半序集 由元素 $a, b, c, \cdots$ 组成的集合 S，若在其上定义了具有**自反性**，**传递性**和**反对称性**的关系 $a\subseteq b$，称 S 是关于此关系的半序集，反对称性表示从 $a\subseteq b$ 和 $b\subseteq a$ 可得到 $a=b$。

特别应当重视的是：S 中每对元素不一定都有 $a\subseteq b$ 或 $b\subseteq a$。

【例6】 自然数 1, 2, 3, …的集合在关系"a 整除 b"下是半序集。

【例7】 一个集的所有子集构成的集合在集合论关系"A 是 B 的子集"下是半序集。

【例8】 区间[0, 1]上所有连续的实值函数是半序集，关系 $f\subseteq g$ 表示对所有[0, 1]中 x，有 $f(x)\leqslant g(x)$。

通常把关系 $\subseteq$ 解释成为"被包含于"，并用图来表示半序。可以这样作图：与每个元素 a 相联系作平面上一个小圆 K_a，如果 a 和 b 可以比较则用线把 K_a 和 K_b 连起来。如果 $a\subset b$，那末圆 K_a 在圆 K_b 下面。

【例9】 S 由集合 $M=\{a, b, c\}$ 的子集组成：$M_0=M$, $M_1=\{a, b\}$, $M_2=\{a, c\}$, $M_3=\{b, c\}$, $M_4=\{a\}$, $M_5=\{b\}$, $M_6=\{c\}$, $M_7=\phi$。它用邻接图表示(见图 20-1)。

【例10】 由一个、两个或三个元素组成的所有可能的半序集表示在邻接图中(见图 20-2)。

从任何格可定义一个与 L 有相同元素的半序集 $S(L)$。如果 $a\cap b=a$，我们定义 $a\subseteq b$。对某些半序集此陈述可以颠倒过来。

应用 由于格论的一般性，它的应用范围特别广泛。最重要的例子是数理逻辑、数学基础、代数、拓扑和积分理论。仅仅应用格论概念就能

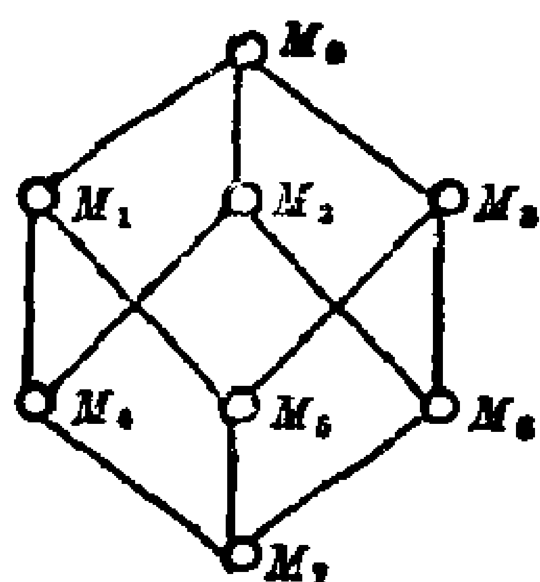


图20-1　半序集 s 的图(见例9)

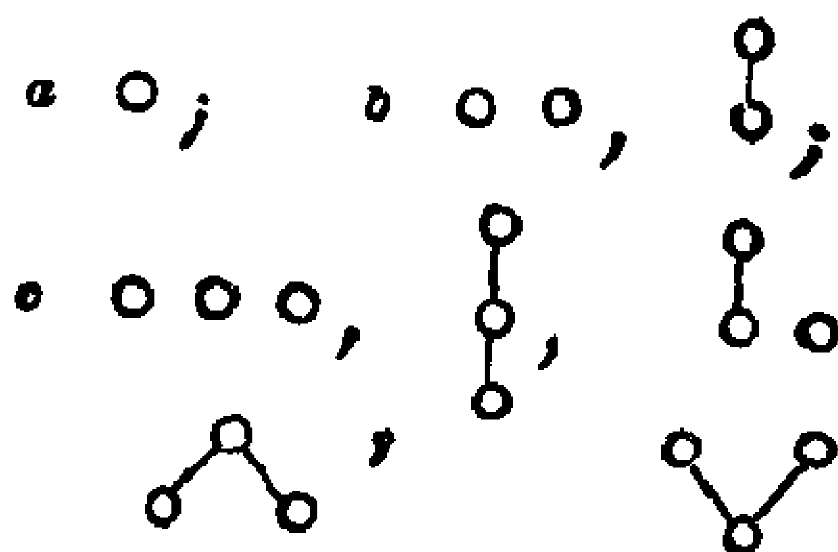


图20-2　a)一个 b)二个和 c)三个元素的所有可能的半序集的图

发展成为现代数学所需要的相当一般的积分概念。

环和代数

环　一个集 R，如果在其中定义两种运算：加法和乘法，则它称为**环**。在加法运算下，R 必须是阿贝尔群——R 的**加法群**，加法和乘法必须满足两个分配律：$a(b+c)=ab+ac$ 和 $(a+b)c=ac+bc$。

如果乘法是结合的，则此环称为**结合环**，此时我们能谈及它的**乘法半群**。如果乘法是交换的，此环称为**交换环**。全体整数和域是特殊类型的交换环。

环的进一步的例子是 1. 以向量加法和乘法作为运算的三维欧几里德空间中的向量的非结合环；2. 在矩阵的加法和乘法下，$(n\times n)$ 的矩阵环是结合的非交换环。

环的研究，作为代数近代研究特别重要的部分，对我们当代抽象代数的发展具有决定性的意义。代数结构的分析，在今天已成为代数研究中标准的课题，它由 E. 诺德提出，并由她和她的学生在重要的例子中付诸实现。他们的研究给予代数以新的推动力，并引向新的应用领域。

代数　一个环同时又是**向量空间**可得出代数的概念。

一个代数是指结合环 A，它的加法群 A^+ 是域 K 上的向量空间，其中域的数乘与环的乘法可以交换：$(\alpha u)v=u(\alpha v)$，这里 $\alpha\in K, u, v\in A$。

把代数 A 看作向量空间时的维数称为代数 A 的**秩**。

【例】 1　在区间上连续可微的实的或复的函数构成代数。

2. 实的或复的 $(n\times n)$ 矩阵全体构成秩 n^2 的代数。

结构常数　因为具有有限秩 n 的代数的每个元素可以表示为基元素 $u_1, \cdots, u_n$ 的线性组合，我们可以把两个元素 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$ 和 $v=\sum_{j=1}^{n}\beta_j u_j$

的积写成 $uv=\sum_{ij}\alpha_i\beta_j(u_iu_j)$。由此可知，如果基元素的积 u_iu_j 已知，则所有元素的积 uv 都可以计算。这种积本身一定是基元素 $u_iu_j=\sum_{k=1}^{n}r_{ij}^ku_k$ 的线性组合。

n^3 个常数 r_{ij}^k 称为代数的结构常数。它们依靠关于 uv 和 u_iu_j 的方程完全确定代数中的乘法。

【例】 具有基元素 1, i, j, k 和乘积 $1^2=1$, $1i=i$, $1j=j$, $1k=k$, $i^2=j^2=k^2=-1$; $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$ 和 $ji=-k$, $kj=-i$, $ik=-j$ 的秩 4 的代数 H 称为是**哈密尔顿四元代数**。它包含复数 $a+bi$ 作为其子域。

应用 且不谈环论在域论中起着决定性的作用，近年来它在**泛函分析**中有重要的应用。引进了绝对值概念的推广(见 **II**. 第 27 章)我们得到**赋范代数**或**希尔伯特代数**。赋范代数在分析和**拓扑代数**中是重要的工具。

表示理论

表示理论与代数理论紧密相关。它涉及的问题是：把群、环和代数同态地，即在某种不破坏其结构的意义下，映射到**矩阵或向量空间的线性变换的群或环内**。

这个向量空间称为表示空间。确定群和代数的表示不仅在分析它的结构中是重要的，并且对许多物理和化学分支，例如在**量子力学**中的应用也是重要的。此外，表示理论也可看作本世记开始蓬勃发展起来的几何中的序准则和不变量理论的推广。

群的表示 考虑表示空间是复的向量空间 V。群 G 在 V 上的表示是群 G 到由 V 的非奇异的线性变换组成的一般线性群 $GL(V)$ 中的同态。如果 V 的维数是 n，则说这是一个 n 维表示。在这种情况下，在选定 V 中的基后，每个线性变换能用 $(n\times n)$ 的矩阵表示出来，我们得到 G 到 $GL(n)$ 中的同态。这同态称为群 G 的矩阵表示。

具体描述表示可能是非常困难的。因此对某些重要的群找出它所有可能的表示的方法已经发展起来了；例如对固定数目元素的所有置换的群已发展了找出它的表示的方法。对无限群，例如拓扑群，问题变得特别困难。然而，对特殊的李群，例如罗仑兹(Lorentz)群和旋转群，许多问题得到了解决。

应用 暂且不谈已经谈到的应用，表示理论常常被用到分析中去。

因此旋转群，即三维空间中球面的旋转群的表示导致球函数的深刻理论，同时其他群的表示理论被用来寻找贝塞尔函数和其他函数的性质。

当然，罗仑兹群的表示在物理中是重要的。

结论

综上所述，我们可以说今天的代数是代数结构的理论。代数结构是在其上定义了某些运算(加、乘、交等)的集合，在那里不去研究集合中元素的性质。在本世纪初开始发展起来的结构概念对代数具有特别重要的意义，并奠定了过去 50 年的代数思想。它已经被改进并被扩充到其他数学领域中去，例如拓扑或微分结构中去。

近年来一系列新的概念在与其他数学学科的联系中发展起来了；然而，它们的研究仍在继续进行中，它们在许多情况下的重要性仍没有充分显示出来。

第21章 拓　扑

点集拓扑

在分析学和几何学中，图形的连通性起着本质的作用。例如有一个简单的定理：如果一个函数的导数处处非零，则它是一对一的，这只在函数的定义域是连通的情形下才能成立。容易求得在开区间 (0, 1) 与(2, 3)上的函数不是一对一的，但在区间的每一点导数为 1(见图 21-1)。当讨论平面中连通性时，情况更加复杂。旋度为零的向量场有一个势函数的定理，一般仅当场的定义域没有洞时才成立；这样的区域称为单连通的。例如，尽管向量场没有势函数，我们可以按这样方式选择向量场中向量的长度，使得旋度变为零（见图 21-2），通过沿图中标出的曲线积分可以看出这一点。由这些及类似的例子所提出的图形连通性研究组成拓扑学的一个小小的但有特色的部分。

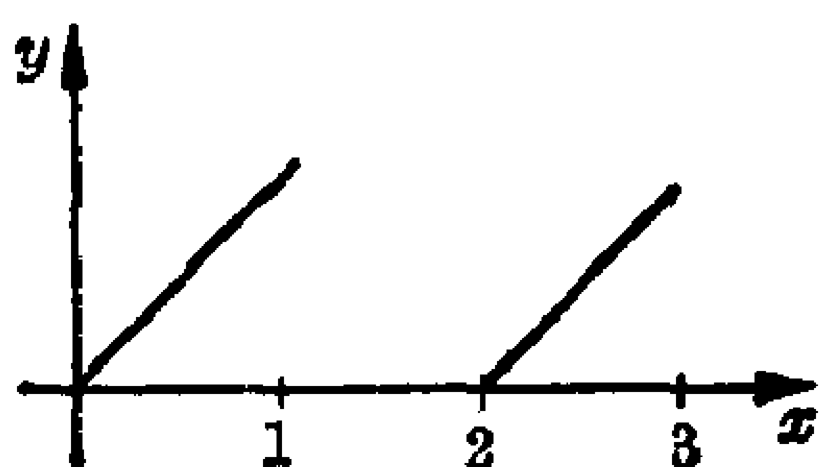


图 21-1　表示的函数不是一对一的

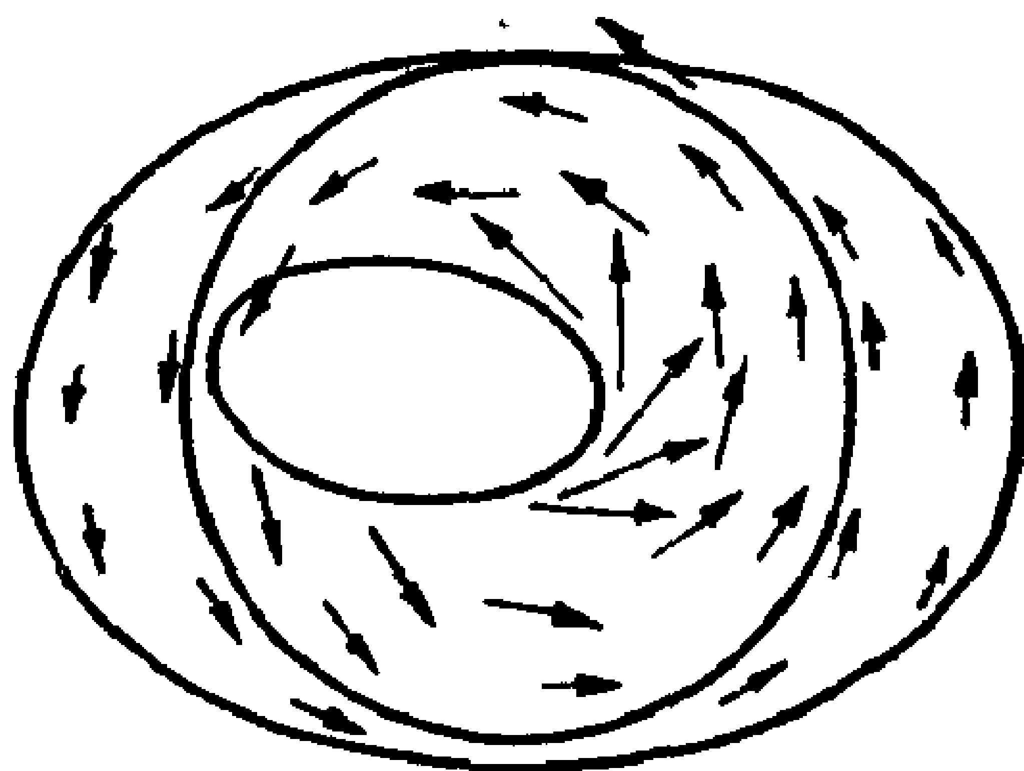


图 21-2　旋度为零且无势函数的向量场

图形的概念　从位于直线、平面或三维欧几里得空间 E^3 中的图形开始研究。高维数增加时，预料情况会变得更加复杂。在直线上，所有问题只是问图形有多少部分，但在平面上，我们还得考虑每一部分包含多少洞；三维空间中实际上有两种不同类型的洞：腔（象一种瑞士奶酪中的洞）和通道（象筛子里的洞）。

图形一般定义为所考察空间的点的集合，所以图形也称点集。这一定义将导致非常复杂的难以直观化的例子，例如在平面笛卡尔坐标系下，一个坐标为有理数，另一坐标为无理数的所有点的集合。虽然下面的论述对这样复杂的点集也成立，但我们只需集中注意于那些比较实用的图形就行了，例如，直线上的区间、平面上的曲面以及三维空间的曲面和立体。

同胚点集　在作出关于图形连通性论述以前，必须先对两个图形具有相同连通性的意义有一个精确的定义；这样的图形称为同胚的。直观地说，如果图 X 能通过弯曲、伸展、变形为 Y，而没有撕裂也没有粘贴，则说两个图形 X 与 Y 是同胚的（见图 21-3）。如果 X 按这样方法变换成

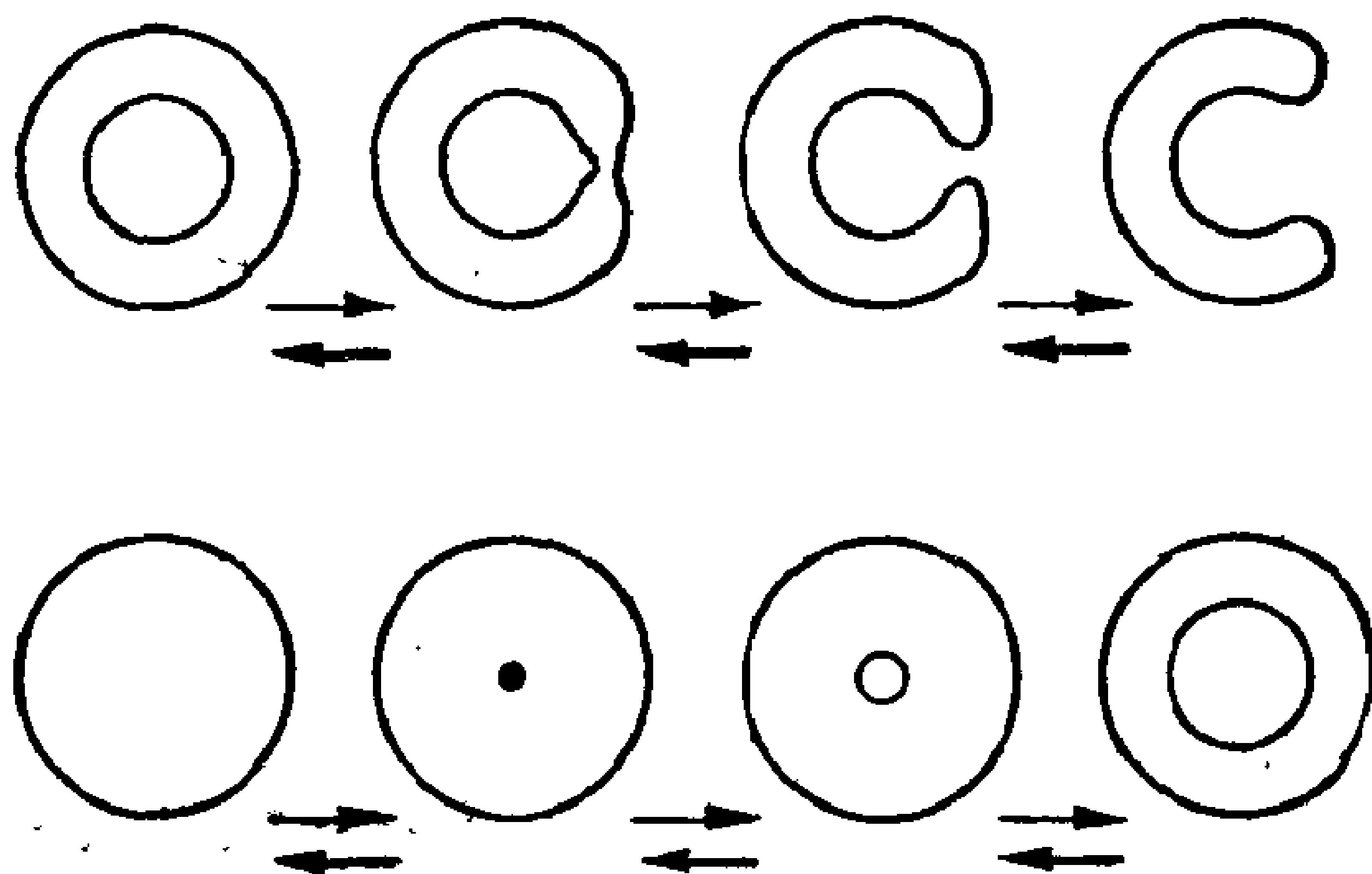


图 21-3　曲面的撕裂与粘贴

Y，那么对于 X 的每一点 p，有 Y 中唯一的点 $f(p)$ 与之相联系，反过来也是这样，即将 X 的每一点 p 与其变换 $f(p)$ 相联系的映照是 X 到 Y 上的双射映照。没有撕裂的条件意味着，对于 f 来说，如果 X 的两个点 p 与 q 充分接近，那么它们的象 $f(p)$ 与 $f(q)$ 也彼此接近。这个条件能够通过两点间的距离 $d(p, q)$ 加以精确化，并使这条件类似于单元实变函数的连续性。

> 如果对 X 的每一点 p 和每一正数 ε，存在一个正数 δ 使对 X 中的任一点 q，由 $d(p, q)<\delta$ 可得 $d(f(p), f(q))<\varepsilon$，那么称从图形 X 到图形 Y 的映照为连续的。

连续性的概念说明变形 f 没有撕裂的事实，但是点没有粘贴在一起和"腔"没有被填满的概念仍待精确地作出。这可由考虑逆映照 f^{-1} 得到，f^{-1} 将 Y 的每一点 p' 与 X 的唯一点 p（它的存在是由于 f 为双射映照）相联系使得 $f(p)=p'$。说 f 没有将任何点粘贴在一起，等于说 f^{-1} 没有被撕裂，或者说 f^{-1} 连续。于是，现在可以给出同胚的精确定义了。

> 如果存在 X 到 Y 上连续的双射映照 f，使逆映射 f^{-1} 也连续，那么图形 X，Y 称为同胚的。映照 f 称为同胚映照或拓扑映照。

【例】 1. 圆到直径上的垂直投影是一连续映照，但不是同胚的，因为它不是一对一的(见图 21-4)。

2. 正方形的边界到圆上的中心投影是同胚的(见图 21-5)。

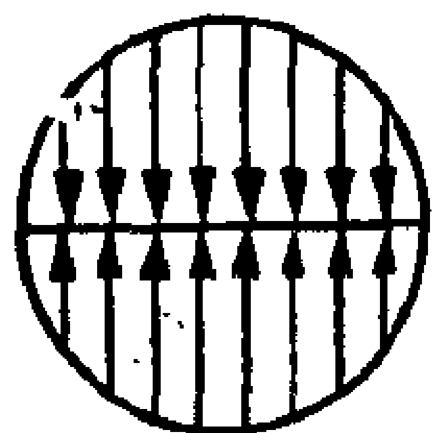


图 21-4　圆到直径上的投影

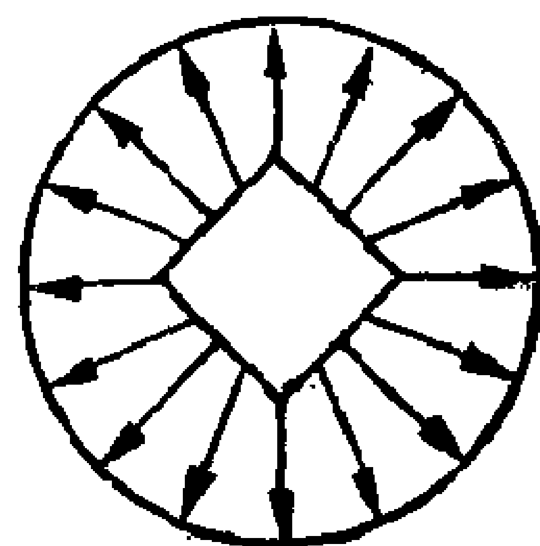


图 21-5　正方形到圆上的投影

3. 从圆 C 到半开区间 $[0, 2\pi)$ 的映照使 C 的每一点 p 与它的角 $\varphi(p)$ 相联系，在角为零的 p_0 点不连续；因为 p_0 附近的点的象相距很远，位于区间两端(见图 21-6)。

同胚的定义不是恰好相应于从一个图形到另一图形无撕裂或弯曲的变形的直观概念。它还允许对图形进行切割，要求经过变形之后，割开的地方能恰好像原来一样地逐点粘贴在一起。在图上 B_1，B_2，B_3，B_4 四

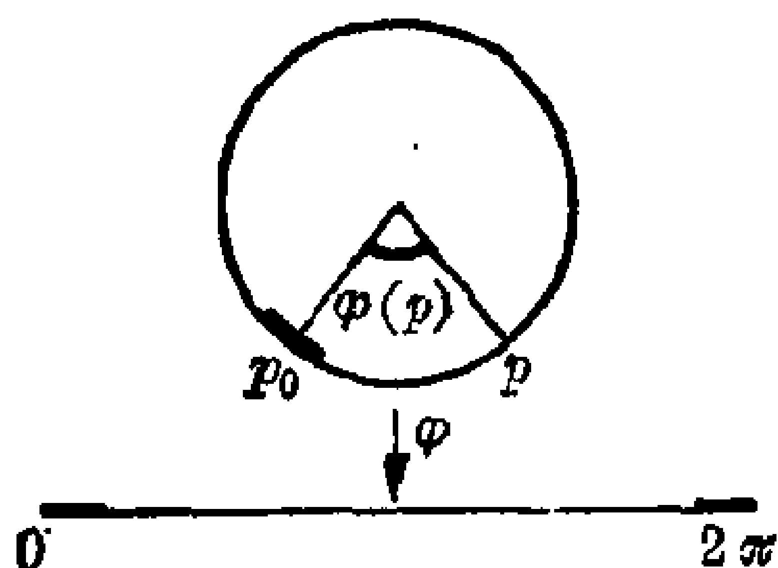


图 21-6　圆到半开区间上的映照

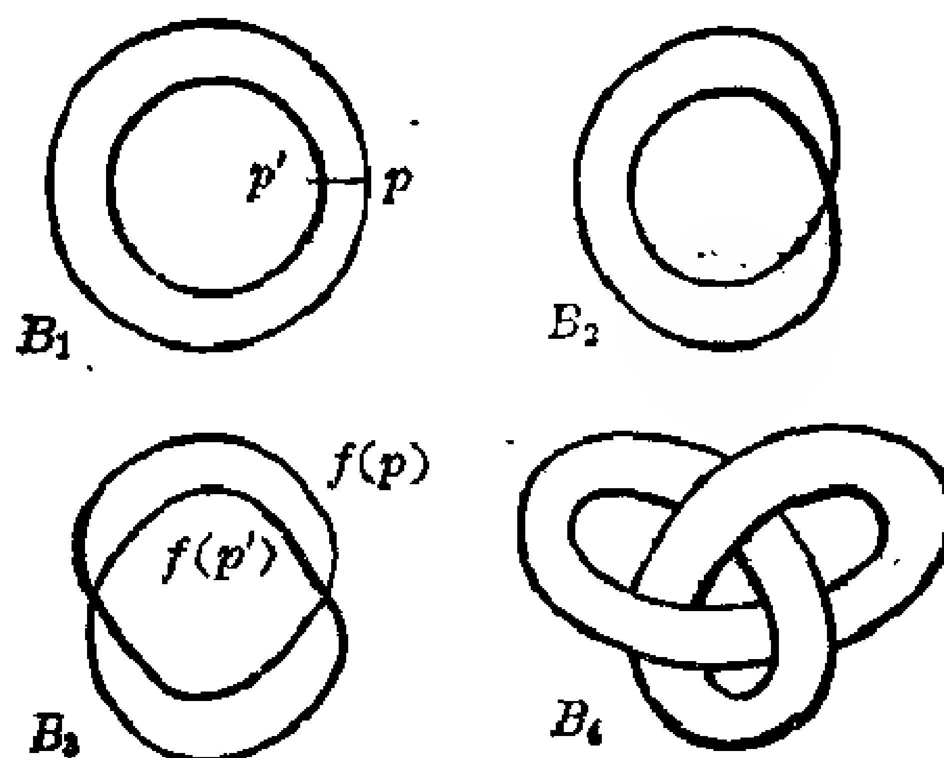


图 21-7　无扭曲的、扭曲的与打结的带

基本方法是，找出其中一个图形所满足的一种拓扑性质但另一个不满足。如果确实是这样，那么 X 与 Y 不能同胚，因为一个点集有一个拓扑性质，那么与它同胚的每一点集也具有同样的性质。这个方法需要熟悉大量拓扑性质；这里列举一些最简单和最重要的。

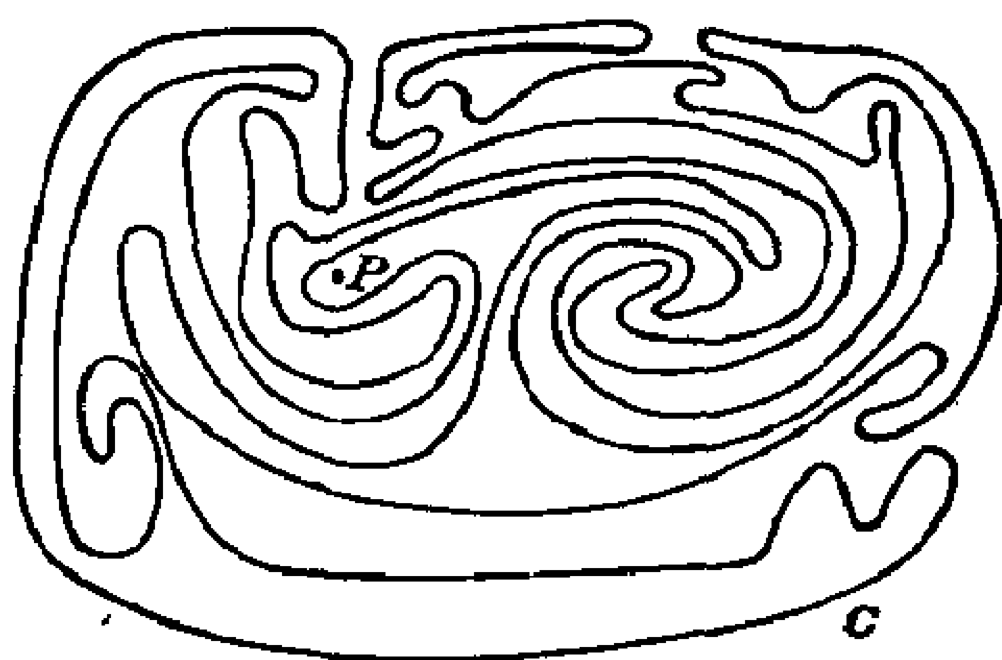


图 21-8 具有外点 P 的简单闭曲线 C

如果 Z 中的任何两个点 p 与 q 能用 Z 中的一条道路连结，即如果存在区间到 Z 内的连续映照将区间两端点分别映为 p 与 q，则点集 Z 称为**连通的**(更精确地，**道路连通的**)。因而，如果图形不是由几个不相交部分组成，则它是连通的。平面和空间中的连通图形仍旧可以有洞，单连通集除外。一个集合 Z 如果其中的任何闭曲线能在 Z 中收缩为一点，则称它为**单连通的**。单连通平面图形直观上显然不能有洞，因为围绕这样一个洞的曲线在 Z 中不能收缩为一个点。另一方面，对三维图形来说单连通条件排除了出现"通道"，但可能出现"腔"；例如，一个空心球是单连通的，尽管由于空心，它有"腔"。然而，筛子不是单连通的。

这类关于图形的洞与连通性的拓扑性质是**代数拓扑**的出发点，在代数拓扑中，任意高维图形的连通性通过与图形相联系的某种代数结构来叙述，例如**同调**和**同调群**。

我们能使一个点集 X 与一个自然数 $\dim X$，即所谓**点集的维数**相联系。对于熟悉的图形，例如一条曲线 $\boldsymbol{C}$，一个曲面 $\boldsymbol{S}$ 或一个立体 $\boldsymbol{B}$，它们的维数有一个直观的概念，$\dim X$ 的值可以料想得到，即 $\dim \boldsymbol{C}=1$, $\dim \boldsymbol{S}=2$, $\dim \boldsymbol{B}=3$。在**维数理论**中，用维数的精确定义能证明同胚的点集 X 与 Y 具有同样的维数，$\dim X=\dim Y$。于是一个点集的维数是一个拓扑性质，例如曲线永远不能与曲面同胚。

一个点的邻域 除了连通性和维数，拓扑学还研究点集的进一步性质，其中有一些在数学的其他分支例如微积分中也是很重要的。为说明在闭区间 $\boldsymbol{I}$ 上定义的一个函数在一点 x 的导数的概念，点 x 是否是端点非常要紧。如 x 是端点，我们只能讨论左或右导数。对在平面区域 D 上定义的二变量的函数 $f(x, y)$，情况也类似。定义 f 在一点的偏导数或全微

分时，也必须区分点是在 D 的内部还是在边界上。事实上，我们常常必须区分图形的内点与边界点。使这些概念精确化的第一步是引入点的邻域的思想。我们定义 p 点的 ε 邻域为所有到 p 的距离小于 ε 的点的集合，其中 ε 是任意正数。在本文中重要的是区分点 p 是否作为一直线、一平面或三维空间的一个元素。在直线上，ε 邻域是长为 2ε 的一开区间(即无端点)，在平面上，ε 邻域是半径为 ε 的开圆盘，在三维空间中，是同样半径的球体。注意圆周和球面不属于邻域。

在任一图形 F 中，我们区分**内点** p(有一个 ε 邻域完全包含在 F 中)与**边界点** q(其每一邻域都包含不属于 F 的某些点)(见图 21-9)。可以看出，F 所在空间的维数，在这些定义中起着决定性的作用。例如，在平面上圆盘 K 的中心 M 为内点，但在三维空间里圆盘 K 都是边界点，因为没有正半径的球在 K 内。开集是没有边界点的集合，它仅含有内点，例如，空间中不包括球面的球体。在复变函数论中，平面上开的连通集起着特殊的作用，被称为域。

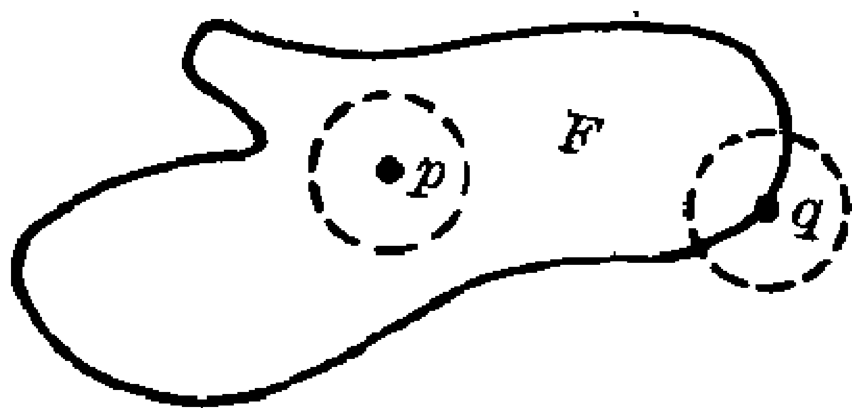


图 21-9　边界点 q 与内点 p

如点 p 的每一 ε 邻域至少含有集合 X 的一个点，则点 p 称为和集合 X **接触**。直观上，和 X 接触点的集合就是这样的点：如果它不包含在 X 内，至少也是“无限接近” X；例如，一个开区间的端点不属于开区间，但却“无限接近”它。以点 z 为中心，r 为半径的开圆盘 K，它的接触点的集合，除圆盘本身的点 p 外，还有满足 $d(q, z)=r$ 的圆周上的点 q。如果 F 的接触点都属于 F，则称 F 为闭集。上面的开圆盘 K 加上所有满足 $d(q, z)=r$ 的边界点 q 成为闭集。开集与闭集之间本质关系在于这样的事实：在直线、平面或三维空间中的集合 G，当且仅当其余集，即由所考察空间中不属于 G 的所有点的集合是闭集时，G 是开集。

为了以后推广的目的，我们定义一点 p 关于子集 X 的相对 ε 邻域 $U_\varepsilon(p)$和相对开集。X 中 p 的相对 ε **邻域**指 X 中满足 $d(q, p)<\varepsilon$ 的那些点 q，即 $X\cap U_\varepsilon(p)$。类似地，X 的一个子集 G，若 G 中每一点 p 有一个 X 中的相对 ε 邻域包含在 G 中，则称 G 在 X 中是开的。空集是任何集合的子集，因而也是 X 的子集。它也被看作 X 中的开集。

对于 X 中的开子集系统，下列断言成立：1. X本身与空集属于 X 中的开集系统。2. X中的任意多个开集之并也是 X 中开集。3. 有限多个

X 中的开集之交也是 X 中的开集。

根据相对 ε 邻域和开集的这些概念，可以给出从集合 X 到另一集合 Y 的映照 f 的连续性的新定义。

从一点集 X 到另一点集 Y 的映照 f 是连续的充要条件为：对 X 中的每一点 p 及 Y 中的 $f(p)$ 的每一(相对的)ε 邻域 V，可以找到 p 在 X 中的一 δ 邻域，f 将它映为 V 的一个子集(见图 21-10)。

从 X 到 Y 的映照 f，当且仅当 Y 中的每一开集的逆像是 X 中的开集时，f 是连续的。

在映照 f 下，Y 的子集 B 的逆像是 X 中的集合，其中每一点都被 f 映为 B 中的点。

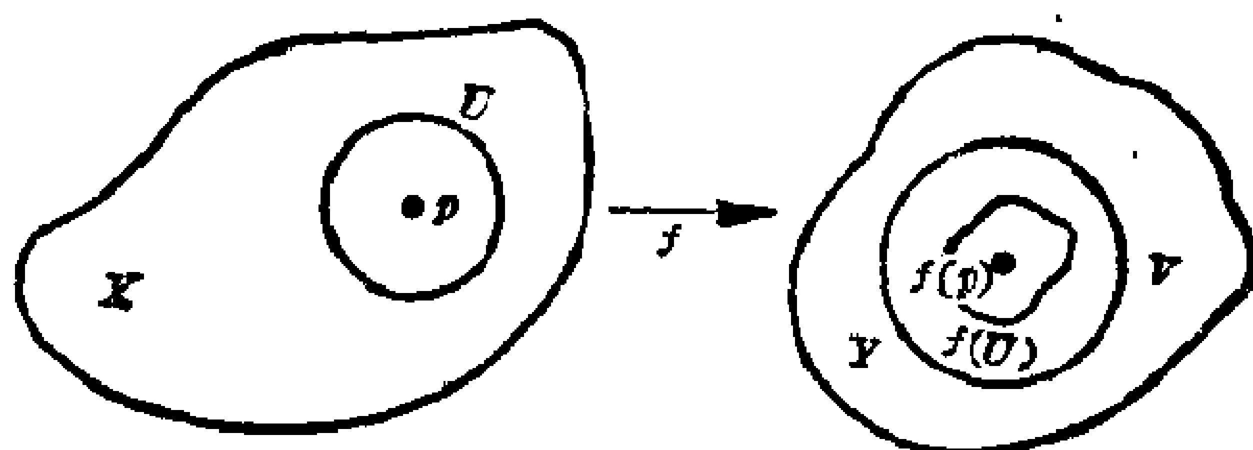


图 21-10　连续映照

n 维空间

到现在为止，我们的叙述限于直线上、平面内或三维空间中，即欧几里得空间 E^1，E^2 和 E^3。为了把它们推广到 n 维欧几里得空间，我们的出发点是注意到 E^3 中的每一点 p 可以用三重坐标(x_1, x_2, x_3)来描述。如此定义的从 E^3 到所有实数的三重坐标的集合的映照是一对一的，且是到上的，只要给定的笛卡尔坐标系保持不变，E^3 的点可以恒同于它们的三重坐标。空间 E^n 可类似地定义。

> E^n 是所有 n 重实数$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的集合；一个 n 重坐标看作这集合的一个元素，通常称为一个点。

对 E^3 中的 $p=(x_1, x_2, x_3)$和 $q=(y_1, y_2, y_3)$的距离函数 $d(p, q)=[(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2]^{1/2}$ 可以推广到 E^n；这函数保持 E^3 中距离的三个主要性质，其中三角形不等式说明在以 p, q, r 为顶点的三角形中每边之长至多等于另外两边的和。

E^n 中两点 p, q 之间的距离	$d(p, q) = \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right]^{1/2}$	1. $d(p, q)=d(q, p)$ 2. $d(p, q)\geqslant 0$, $d(p, q)=0$ 当且仅当 $p=q$ 3. 三角形不等式：$d(p, r)\leqslant d(p, q)+d(q, r)$

用这个距离 $d(p, q)$ 类似于对 $E^n(n=1, 2, 3)$ 的作法，现在能够定义 E^n 的子集 X 与 Y 的拓扑性质。从集合 X 到集合 Y 的映照 f，如果对 X 中的每一个点 p 和每一个正数 ε 存在一个正数 δ，使得 $d(p, q)<\delta$ 时就有 $d(f(p), f(q))<\varepsilon$，则 f 为**连续的**。一个映照如果是双射的(即一对一和到上的)且 f 与 f^{-1} 都是连续的，则为同胚映照。如果存在一个从 X 到 Y 的同胚映照，则称两个集合 X 与 Y 是同胚的。最后，X 中一点的 ε 邻域可以象上面同样的方法定义，使得所有的基本概念扩充到适合现在所考虑的更一般的集合。

如果所考察的对象或条件不能用三个以下的坐标来描述，但能用有限多个坐标来描述，那就用到高维空间。例如，在物理中一个事件不能只用空间的三个坐标确定，而且还要使用时间坐标。因此，每一个这样的事件相应于 E^4 中的一个点。如果希望描述不光是一个事件而是许多事件，例如在一个连续过程中，那么我们得到 E^4 的一个子集。类似的情况会在具几个自由度的物理系统中碰到。当然，只有当我们能够叙述并证明有意义的实际上有用的高维空间中的几何或拓扑定理时，对事物的这种看法才有价值。下面是这种定理的两个例子。

约当-勃劳维尔定理　在 E^2 中叙述的约当曲线定理要推广至三维，闭曲线必须用**二维拓扑球面**来代替。这是 E^3 中与球面同胚的任一子集，或直观地说，是一个变形的球面。每一个二维拓扑球面分 E^3 为两个部分。

在 E^n 中的 **n 维球**可类似三维空间的情形，定义为到定点 z 的距离不超过定数 $r(d(p, z)<r)$ 的点 p 的集合。球的表面是满足 $d(p, z)=r$ 的点 p 的集合。一个 **n-1 维球面**是 E^n 的一个子集，它与此球面同胚；它也能直观地描述为 n 维球表面的变形。约当-勃劳维尔定理和勃劳维尔不动点定理现在可以充分一般地加以叙述。

约当-勃劳维尔定理。每一个 $(n-1)$ 维的拓扑球面分 E^n 为两个部分。

勃劳维尔不动点定理。若 f 是 n 维球到自身的一连续映照，那么 f 有一个不动点。

拓扑结构

在拓扑学中引进集合上的结构思想，可使直观的拓扑学概念无比深刻地一般化，这种思想首先在代数中得到发展。象环与域这样的结构是

从数系通过抽象过程而得到的，忽略那些对代数来说是非本质的数的性质，仅仅把作为代数研究基础的那些性质保留下来。如果在拓扑学中遵循类似的途径，那么首先必须决定点集的哪些性质构成拓扑学概论的基础，然后只把为拓扑研究所需的前提定义为**一般结构**。能导出拓扑概念的点集的一个主要性质是关于确定点集间映照**连续性**的可能性，因为很多其他拓扑概念，例如同胚和连通性，要借助于连续性这一基本概念来定义。

因此，一个拓扑结构将定义为具有某种性质的一个集合 T，根据这种性质就能够断定从 T 到另一这样结构 T' 的映照 f 是否连续。把**泛函分析**中的**度量空间**作为适宜的结构看来是合理的，因为一旦有了距离的概念(见 *n* 维空间)，连续性就能定义，而根据定义，度量空间是一个集合，对其中的所有元素对 p, q，距离 $d(p, q)$ 有定义。虽然这是一条可能的途径，然而对拓扑研究来说，我们发现度量空间的局限性太大。最终的定义是通过考察下列事实而达到的：只要知道 X 与 Y 的开集(见拓扑性质)，从点集 X 到点集 Y 的映照 f 的连续性立即可以定义。这是因为 f 连续的充要条件是 Y 中每一开集的逆象为 X 中的开集。

所以下述的拓扑空间定义对于拓扑的研究是一个适当的结构。

> 一个集合 T，连同 T 的子集所组成的满足下列要求的子集族 O，一起构成拓扑空间 T：1. T 和空集属于 O；2. O 中任意多个集合的并也属于 O；3. O 中有限多个集合的交也属于 O。

这三个公理恰好和上面所列出的点集的开子集系统的性质相对应，所以任何点集与其(相对)开子集组成一个拓扑空间 T，上段末的连续性定义，对于从拓扑空间 T 到拓扑空间 T' 的映照有意义。从 T 到 T' 的映照 f，如果是双射的，且 f 与 f^{-1} 都是连续的，则称 f 为同胚映照。如果存在 T 到 T' 的同胚映照，则称拓扑空间 T 与 T' 是同胚的。如果对拓扑空间 T 中任何一对元素 (p, q)，存在一个从区间到 T 内的连续映照，使区间端点分别映为 p 与 q，则称 T 为(道路)连通的。

这些例子说明对点集所定义的概念怎样才能够推广至任意拓扑空间。然而，关于拓扑空间的一般论述比关于点集的论述倾向于更缺少几何直观性。而且，有些关于点集的概念，难以推广到任意拓扑空间；例如，对

所有拓扑空间，不能给出维数的满意的定义。**一般的或集合论的拓扑**，是研究任意拓扑空间的，它的大部分很难看作属于几何学，宁可说它所具有的**结构理论**的特征可与代数中群论相比较。正如在群论中考察特殊类型的群如阿贝尔群一样，在一般拓扑学中，也要研究除满足上面所指的1，2，3外，还满足别的公理的拓扑空间，例如**豪斯道夫**(Hausdorff)**隔离性公理**：对T中任何两个元素p，q，存在T的两个不交的开子集X与Y，使$p\in X$，$q\in Y$(见图21-11)。

拓扑空间比距离空间更一般，特别地，每一距离空间是一拓扑空间。就是说，我们能在距离空间中区分出开集组。这些开集如同在欧几里得空间中那样定义：设M是距离空间，p是M的一个元素，ε是一正数；M中p的ε邻域是M中与点p距离小于ε的元素的全体所成之集合。如果X中的每一个元素p有p的一个ε邻域完全包含在X中，则称M的子集X是开的。不难证明，这样定义的开集组具有性质1，2，3，并且这样的M实际上成为一个拓扑空间。从这一论点可以得出重要的结论，一般拓扑学的定理与概念可以应用于距离空间，特别是应用于泛函分析的研究。

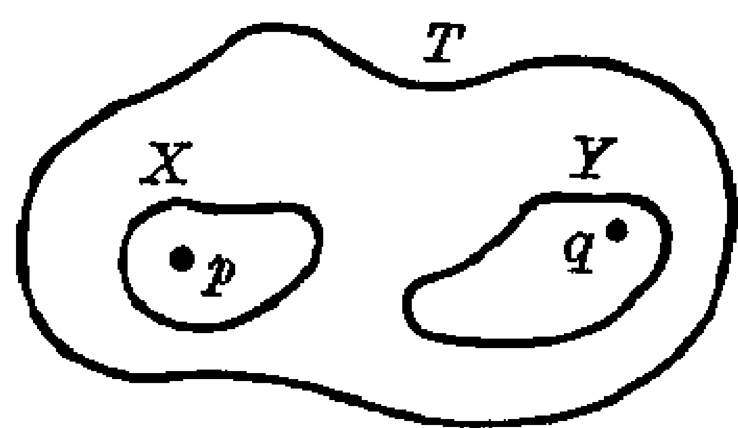


图21-11　豪斯道夫隔离性公理

作为一般拓扑学重要问题的一个例子，可提一提**度量化问题**：拓扑空间T的开集组O在什么条件下，T是可度量的，即什么时候能在T上定义一距离函数d，使T成为一距离空间而它的开集正好是O中的集合？容易知道一个必要条件是豪斯道夫隔离性公理，但这不是充分的。纳加达(Nagata)与斯米尔诺夫(Smirnov)的度量化定理给出一个拓扑空间存在这样距离的充分与必要条件。然而，对这些条件的精确叙述已超出本章的范围。

第22章 测 度 论

测度论研究几何图形的容量，或更一般地，研究点集的容量。它和积分学、集合论直接有关，能在许多分析学分支和概率论基础中找到重要应用。和三角形、矩形及其他有界的直线形面积的计算相比，计算用曲线所围成图形的面积以至更复杂图形的面积要困难些。甚至要向人们解释什么是**点集的容量**也是问题。这个问题的第一个答案是和黎曼积分紧密地联系着的**黎曼容量的概念**，它是由皮亚诺和约当在 1890 年给出的。

为了得到一个点集(例如在平面上)的容量，在平面上作方形网格，并用完全含在图形内部的小方格构成的区域**从内部去近似**给定的图形。又用包含图形在其内部的由小方格组成的区域**从外部加以近似**(见图22-1)。当网格越分越细时，新的内部近似区域总包含原来的内部近似区域，而且一般来说要多增加一些新的小方块。与此同时，新的外部近似区域将会较原来的区域少掉一些新的小方块。因此，两种近似区域面积之差只能变小。现在如果令网格继续不断细分，**内部的容量**和**外部的容量**将彼此无限接近，这时，它们共同的极限值称为**皮亚诺-约当容量**，或简称为所给图形的容量。

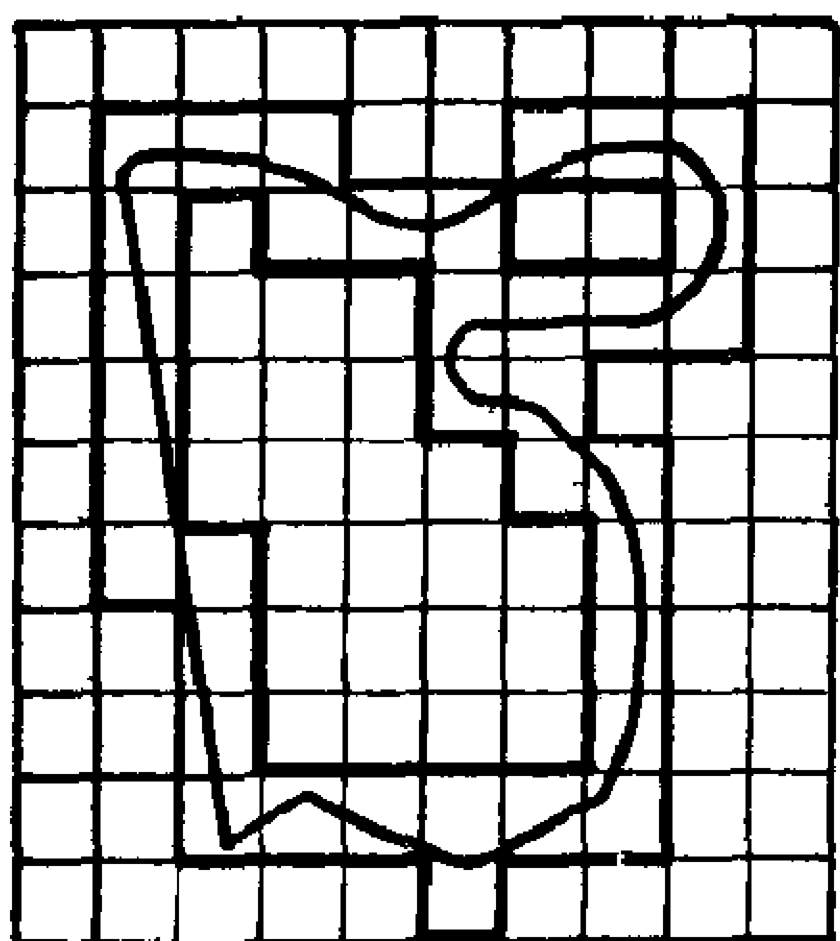


图 22-1　皮亚诺-约当容量的近似

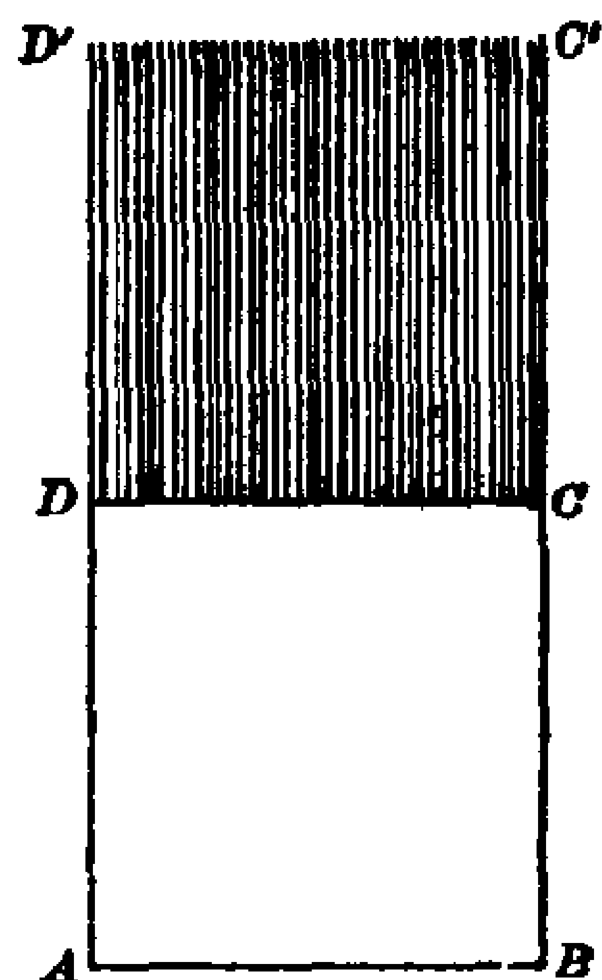


图 22-2　不存在皮亚诺-约当容量的图形

这一容量概念产生了众所周知的有界直线形的面积公式，以及圆和椭圆的面积公式等。但是，确实有不存在上述皮亚诺-约当容量的点集。图22-2表示一正方形 $ABCD$，在它的上方那条边 CD 的“有理”点处，各竖起一条长度等于正方形边长的垂线，即各垂线的垂足到顶点 C 的距离都是一个有理数。这时这一图形的外容量至少两倍于内容量，而且当网格分得越细时二者不趋于共同的极限值，这是因为 $CC'D'D$ 总是属于外部近似区域，而且只能属于外部近似区域。每一个位于 $CC'D'D$ 上的网格，不论它多么小，总包含两种点，一种点属于图形，而另一种点不属于它。

勒贝格测度 在现代数学中，确实存在这样的点集，它本来看上去似乎没有容量，却获得了重要的意义。在绝大多数情形下，一种较为广泛的容量概念获得了成功，这就是*勒贝格测度*，它是1902年由勒贝格发展起来的。它和皮亚诺-约当容量相比，在于近似图形可用无限多个大小不同的初等面积构成。

具有容量的点集都是有勒贝格测度的，其测度在数值上就等于容量。另一方面，存在这样的点集，它没有容量可言，但却有测度；例如图22-2所示的图形，其测度等于正方形 $ABCD$ 的容量，由垂线组成的那一部分图形的测度是0。*零测度集*在纯粹数学和自然过程的数学描述中都起着重要的作用。可以说这种集描述着不起本质作用的部分。高维空间的情形的考察是类似的；例如，对三维的情形，我们获得通常的体积或*空间测度*。

在积分学中，用测度代替容量就成为勒贝格积分。它是黎曼积分的扩充，正如勒贝格测度是皮亚诺-约当容量的扩充一样。

经过进一步的抽象，人们在一般测度论中把测度理解为定义在集合 Ω 上的实值函数 $m(A)$，其变量 A 跑遍 Ω 的某些子集，并且有和最简单的几何解释相应的性质。首先 $m(A)\geqslant 0$ 和 $m(A\cup B)=m(A)\cup m(B)$，其中 A 和 B 是不相交的点集。集合 A 若属于 m 的定义域，则称为关于 m 可测的。这一作法是可能实现的，例如，可直接地将测度理论中的定理用于概率论。在那里，*随机事件*看作由所有初等事件组成的“点”集 Ω 的一个子集 A，而测度 $m(A)$ 是事件 A 的*概率*。

第23章　图　论

基础知识

有向图和无向图　一个图 $G=[X, U, f]$ 是两个基本图形集合，**结点** x 的集合 X 与**边** u 的集合 U，以及一个定义在 U 上的关联函数 f 所成的组合。此函数确定每一**有向边** $u\in U$，恰好与结点 $x_i, x_k\in X$ 的一个**有序对**相对应，而一条**无向边**对应一个无序结点对（见图 23-1）。

与一条边对应的两个结点不一定相异。若 $x_i=x_k$，则 $f(u)=(x_k, x_k)$ 称为一个**环**。函数 f 不一定是单值可逆的，即一对 (x_i, x_k) 可以被几条边所对应，这些边便称为**平行边**或**重边**。

集合 X 和 U 可以是有限或无限的。若 X 和 U 是有限的，则图称为**有限的**。下面的所有论述都是关于有限图的。

为了表示图，结点可画成点，而边则画成连接此边的两个结点的弯曲弧。按照结点对之间有没有序的情形，分别称为**有向**或**无向图**（见图 23-2, 3）。

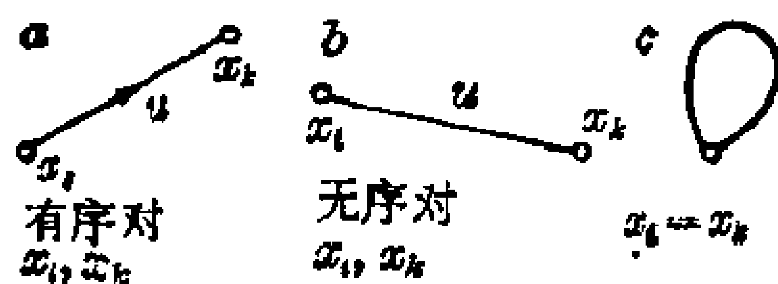


图　23-1
a) 有向边; b) 无向边; c) 环

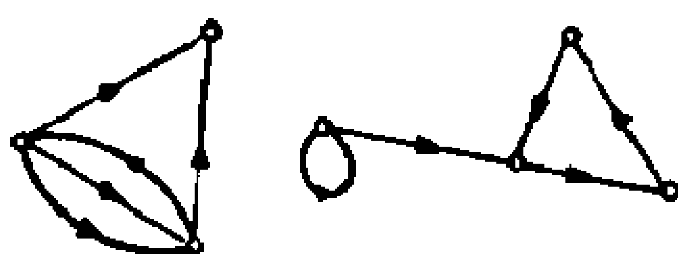


图 23-2　有向图

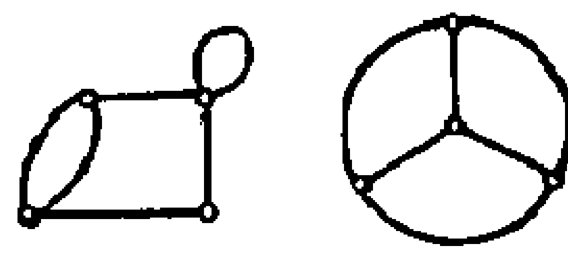


图 23-3　无向连通图；右边一个是完全的

【例】　一个城镇的街道图，通常是用无向图表示在地图上，这对于行人来说就完全够了。然而，当城镇有许多单行道时，一个车辆驾驶员便需要一张绘制成有向图的道路平面图了。

应用。对于五个**柏拉图体**（四面体、立方体、八面体、十二面体、二十面体），象其他所有多面体一样，可以表示成这样的图，它们的顶点和棱表示成图的结点和边。在地图上国家间疆界构成一个图，对铁路系统、海运

航线和航空线也可以同样地构成。

所有的通讯网络，如电话或电传网络，都可用图来表示。而电网络、水网络和集中供暖网络也可以用图来描述。在系统论和控制论中，复杂系统看作是可以借助于图来表示的那种结构，例如区组开关图、信号流图和一个商业供应网。网络技术构成了图论的一个实用的分支。一个完整过程的开头几步是先转换成一个网络，然后再加以计算和确定方向（见网络方法）。

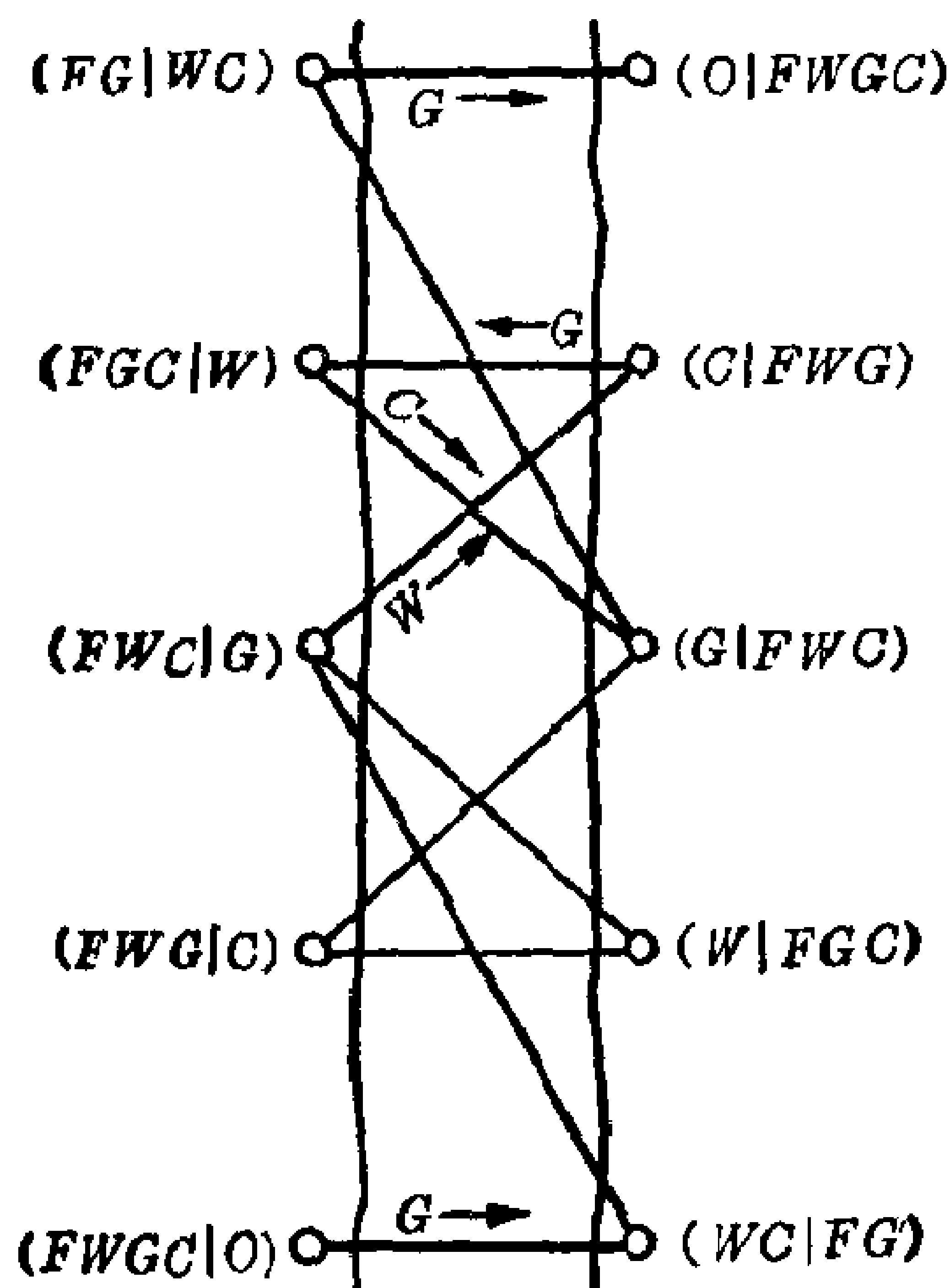


图 23-4　由一个摆渡人 F 从此岸运送一只狼 W、一头羊 G 和一篮白菜 C 到彼岸的组合；中间是一个可行的连通边序列

一般地，可以说图是解决组合问题的一个工具。

【例】 一个摆渡人 F 希望用一条小船把一只狼 W，一头羊 G 和一篮白菜 C 从一条河的左岸渡到右岸去。而这条小船只能容纳 F, W, G, C 中的两个。决不能在无人看守的情况下，留下狼和羊在一起，也不能使羊和白菜在一起。试问如何才能够做到？

首先对两边岸上允许的组合加以分类，例如，其一是 $(FWG|C)$，意即 F, W 和 G 在左岸上，而 C 在右岸上。“零”意味着在相应的岸上四种东西都没有。船在右岸上的组合与船在左岸上的组合是直接连接的，只要摆渡人能够用一次运送可以从一种组合得到另一种组合。组合和它们之间的连接关系便是图的结点和边（见图 23-4）。于是问题便可由于找出一条从 $(FWGC|0)$ 开始到 $(0|FWGC)$ 结束的边的连通序列而获得解决。上述这种序列可以有好几个。

特殊的图　任意两个不同的结点间有且仅有一条边把它们连接起来的这种图称为**完全图**。若一个图仅由孤立结点所组成，即边集是空集，则称为**零图**。若从任一结点出发沿着边可到达其他的任一结点，则这种图称为**连通图**。一个完全图是连通的。

重复地从一条边到另一条边（中间经过这两条边的公共结点），我们

得到一个**边的序列**。若在一个边序列中每条边仅出现一次，便称为一条**路**。当始点和终点重合时，路便称为是**闭的**。在其中除始点外没有其他结点出现两次的一条闭路称为一个(拓扑的)**圈**。一个连通、非空的图，当它不含闭路时，便称为**树**(见图23-5)。例如，树应用于碳水化合物链的化学结构式中。最后，如果一个图可以画在一个平面上，或者拓扑等价地可以嵌入一个球面中，而没有相交的边，则称此图为**平面图**。例如，树是平面图。

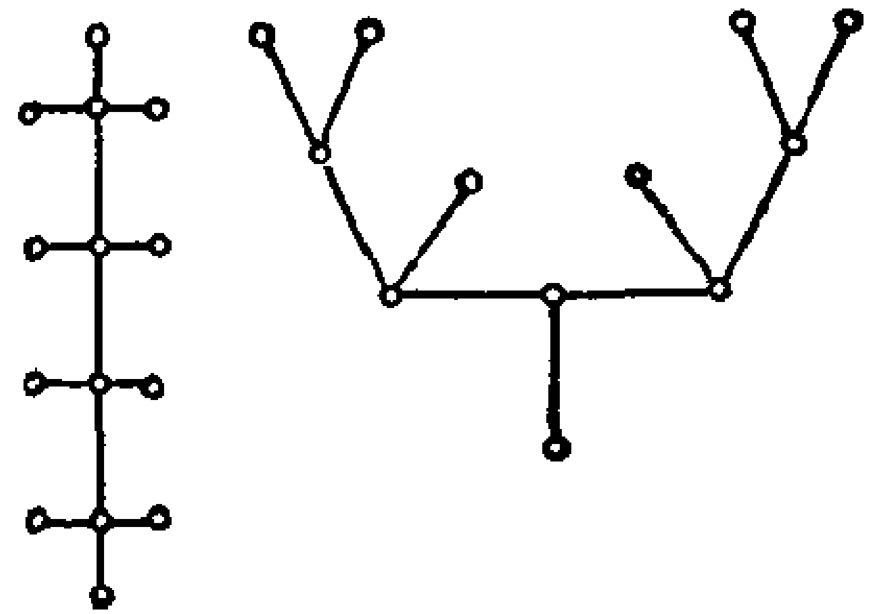


图23-5　树

组合结构　图论与组合问题有关。图论的对象不仅是象在初等组合理论中那样的去确定组合个数，而且是组合结构本身。组合结构的研究，即从图论上来考虑，是由欧拉于1736年首先作出的。他开始于**葛尼斯堡的七桥问题**，即人们是否能恰好一次地走过七座桥中的每一座的问题(见图23-6)。显而易见，这种走法既不能开始也不能结束于I到IV四个区域中的至少两个区域。人们进入又重新离开这些区域。无论如何，由于通向每一区域的是奇数座桥，故而使得这种走法是不可能的。欧拉更一般地研究了在什么样的条件下，一个已给的连通图可以用每条边恰好被覆盖一次这样的方法描述成一条闭路。此类**欧拉路**存在的充要条件是每个结点都与偶数条边相连接。

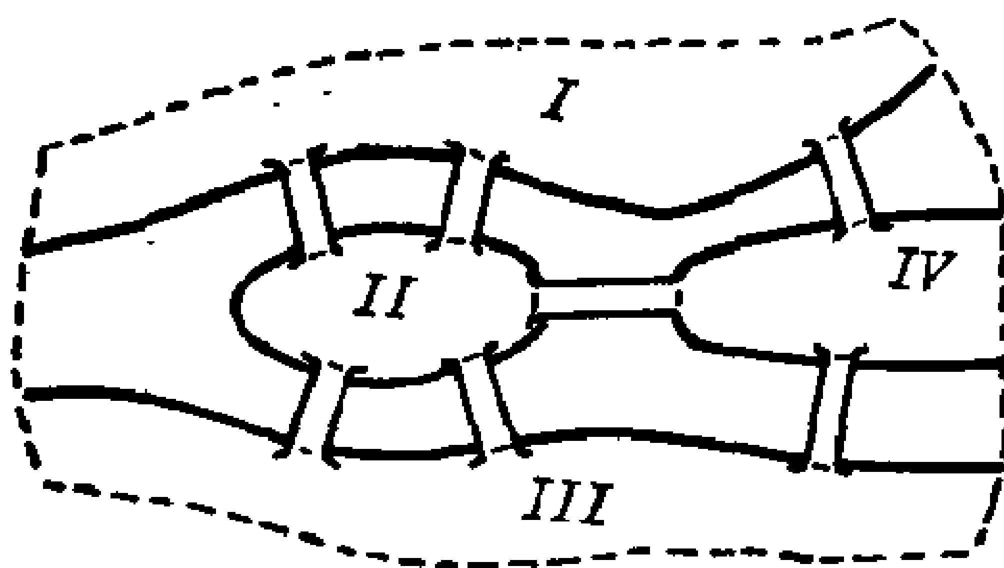
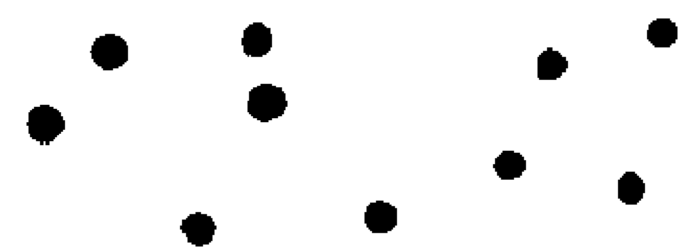
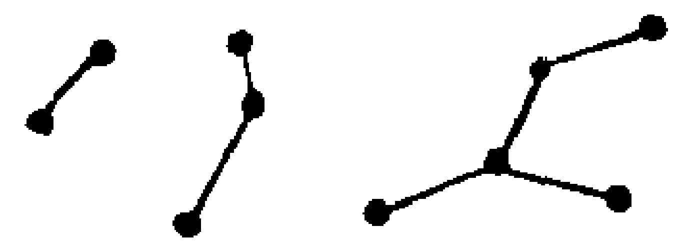


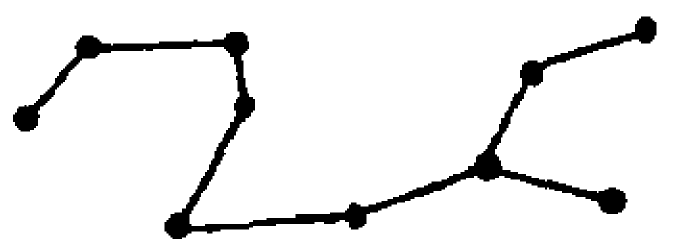
图23-6　葛尼斯堡的七桥问题



结点的分布(零图)



第一步



第二步

图23-7　最优树

实际上遇到的图，往往具有很一般的结构。而主要的议题是有关图的最优化问题的有效解算法。这可由**最佳电话网络问题**作为例子加以说

明。

【例】 用一个最低费用的电话网络来连接 n 个地点，而分叉点仅在这些地点本身出现。直接连接任何两个地点的费用是已知的。

所求之网络显然是一棵树。构造这种树可用一个简单的算法。**第一步**：连接每一个结点到费用最少的一个结点上去，于是获得一个**树系**（**森**）。**第二步**：收缩每一棵树为一点，而且重复此过程。这种方法一直继续下去，直至只剩下一棵树的时候，就中断此过程，这便是所求的最优树。在图 23-7 中，过程是对 10 个地点来实现的。在这样的方法中，任何两个结点间的距离与费用成比例。

如果希望用尝试所有可能性方法来求解问题，则对于 n 个地点将要试验 n^{n-2} 种可能性，即对于 $n=10$ 个地点，有 10^8 种可能性。

四色问题

制图者都知道，任何地图总可以用四种颜色来画，使得任何两个有共同边界（不只是一点）的国家染不同的颜色。四种颜色是否总是足够的这个问题对于图论的进一步发展是极为重要的，这个问题至今没有解决①。而要证明对于任何地图总可以用五种颜色染色，却是相当容易的。

在地图(1)中（见图 23-8）总可以用两种不同的方式把国家和它们的边界以图来表示：或者把三条或更多条边界的交点作为结点，以及结点间的边界作为边(2a)，或者把国家作为结点，而边则表示国家的邻接关系

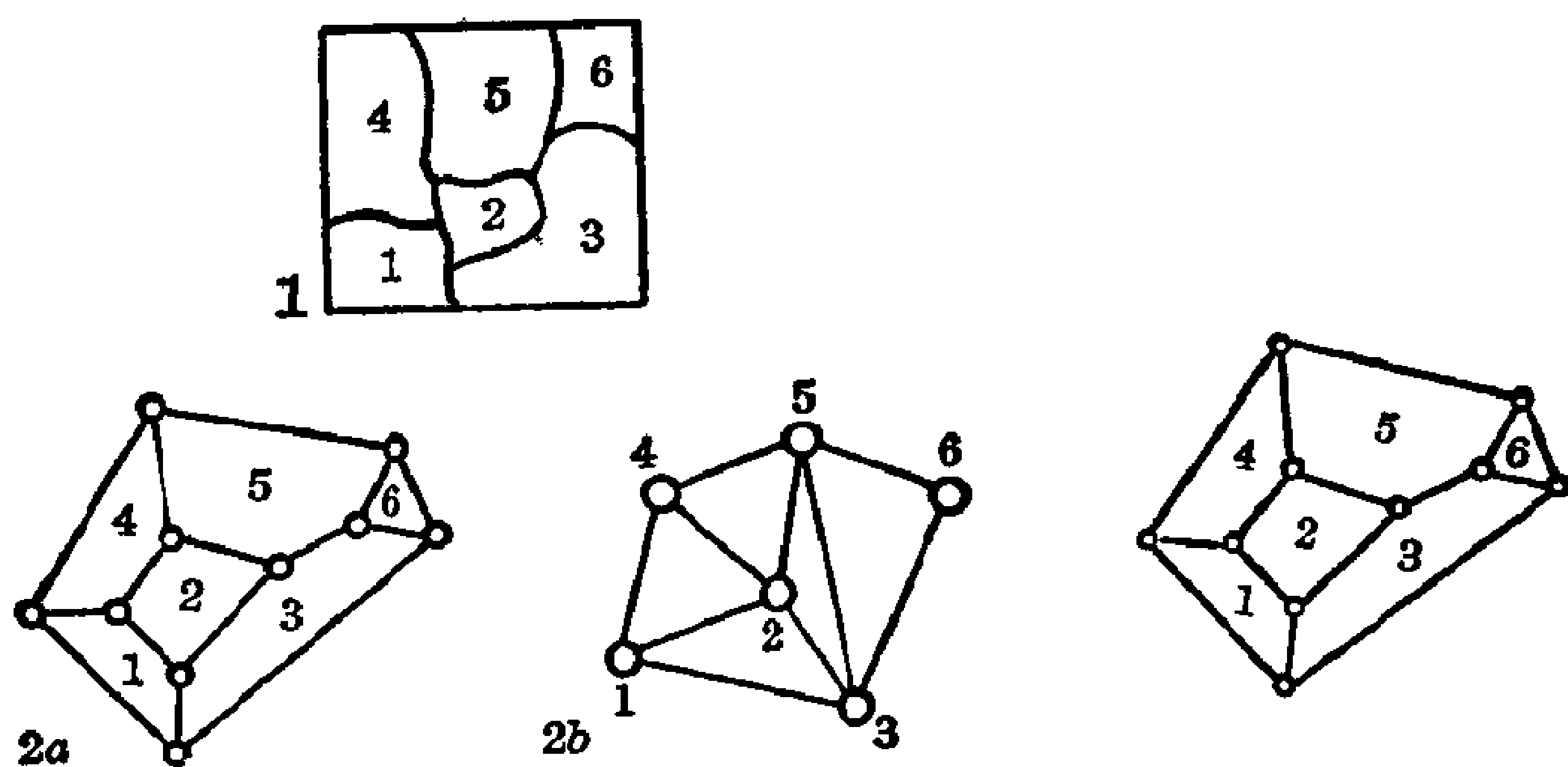


图 23-8　地图(1)及其图(2a, 2b)

图 23-9　具有哈密尔顿回路的一个正则地图的图

① 阿普尔(K. I. Appel)、黑肯(W. Haken)和考克(J. Kock)在 1976 年借助于计算机证明了四色猜想是成立的。——译者注

(2b)。在第一种情形中，把区域染色，在第二种情形中，则把结点染色。一个画在球面上的地图称为是**正则的**，当恰好是三条边界交于每个结点而且每个国家都限制在一个(拓扑)圈上。四色问题可以归结为对于正则的地图来解决。若存在一个拓扑圈或**哈密尔顿回路**(见图23-9)包含正则地图的一个图的所有结点，则因为哈密尔顿回路的内部需要两色，外部也需要两色，故而这个地图中的国家可用四色来染色。在一个长时期中，人们相信哈密尔顿回路总是存在的。反例只是在1965年才给出，故而现在知道，这种方法并不能导致四色问题的解决。

一个正则地图的图是一个**立方图**，即恰好交于每一结点的有三条无向边，而且这种图不包含这样一种边，如将此边删除后，可以把图分割为两个分离的部分，即这种图没有桥。为了证明四色问题，如果能够证明任何立方图可表示为几个圈，而所有圈都有偶数条边就足够的了。在没有平面性假设的情形下，彼得森(Petersen)能证明任何没有桥的立方图，能用这样的方法表示为几个圈，使得每个结点都恰好属于其中的一个圈。自然，在这些圈中有的可以有奇数条边。

塔脱(Tutte)于1956年进一步研究了如下定理：一个不可能由于删除任何三个结点而分割为分离部分的平面图，有一个哈密尔顿回路。在四色问题上进一步的工作使用了拓扑或组合的方法。在**拓扑的论证**中，通过利用球面上的性质可以找到平面图的特性。而在**组合的论证**中，人们试图除掉拓扑的假定，而完全按照组合的意义来描述平面图的特性。

网络方法

网络方法是用来描述、分析和优化复杂过程的进程的。例如，可以分解为若干局部过程的大型建筑的建造。网络方法的目的是：对于局部过程的完成时间、中间时间和寻求节省时间进行规划；为了缩短总时间，降低成本和提高利用率而确定局部过程的最优顺序；提出控制系统和限定职责范围。

活动与事项 网络是一个有向图，它的元素表示为活动和事项。**活动**是局部过程或部分任务；与活动相应的是**时间期间**；**事项**是过程中个别步骤的到达或是个别完成阶段的出现；与事项相应的是**时间瞬间**。**虚活动**是这样的零期间，它仅仅表示实际活动的依赖关系。由网络的边和结点来表示活动和事项，则它是一个**事项网络**。反之，若由结点来表示活动，而由网络的边来表示活动之间的依赖关系，则它是一个**活动网络**。在

这里,当活动之间的关系通常由这样的事实构成,即一个活动必须在下一活动开始之前就结束。这时,边实际上对应于事项。下面的叙述是关于事项网络的。

【例】 为了建造一个连带附近道路和场地的机器厂，需完成下列任务。若 u 表示一个时间单位,则:

1.1.	打地基	5u	2.2.	布置场地	10u
1.2.	砌厂房	11u	3.1.	运送机器	24u
1.3.	屋顶建筑	4u	3.2.	安装机器	3u
1.4.	内部工作	10u	3.3.	其他设备	8u
2.1.	铺设附近道路	9u			

第一组中的那些项目 (1.1 到 1.4) 必须一个接着一个地实现。铺设附近道路，可以在打地基(1.1)之后就开始,而必须在安装机器 (3.2) 之前完成。(虚活动 ② → ④)，而内部工作 (1.4) 跟随在安装机器(3.2) 之后 (虚活动 ⑤→⑥)(见图 23-10)。因为安装机器(3.2)不能在砌厂房 (1.2) 之前开始，故而虚活动 ③ → ④ 是必要的。

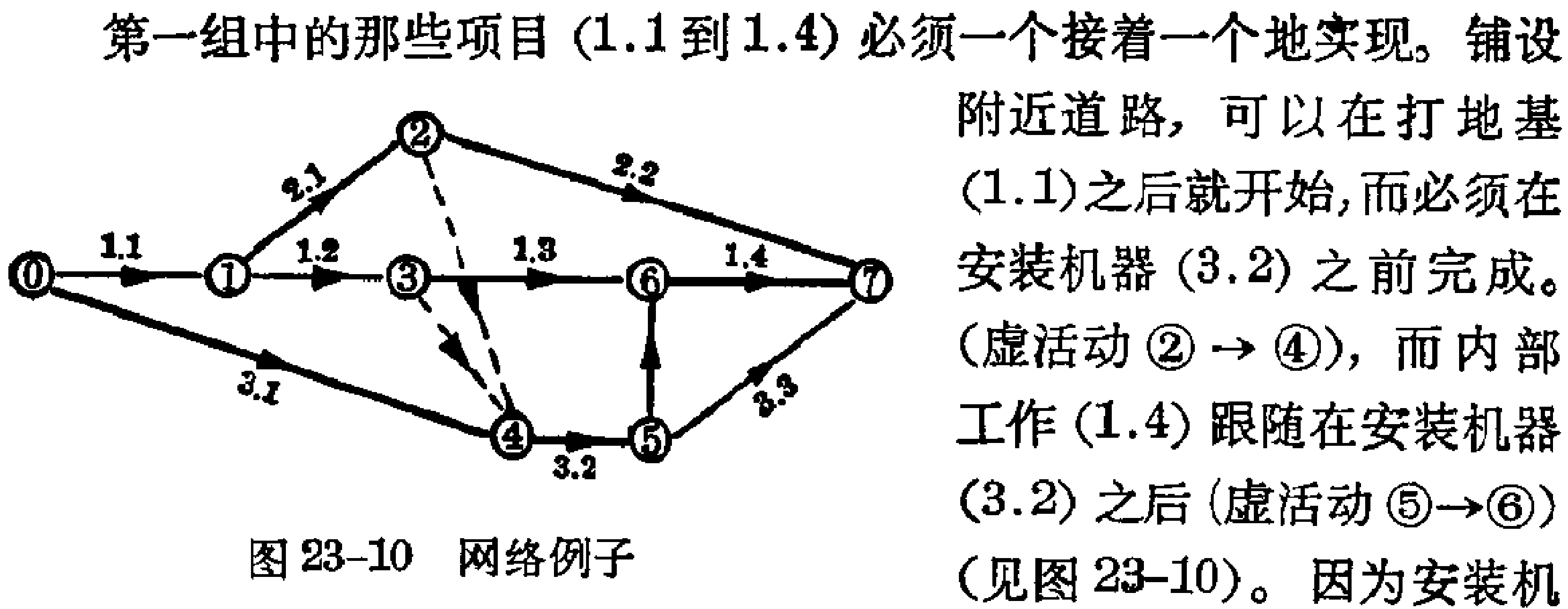


图 23-10　网络例子

关键路。 在一个网络中，人们感兴趣的是整个过程的期间，即始点事项和终点事项之间的时间。 这个期间是可以确定的，因为沿着边从始点事项到终点事项至少存在一条路,使得活动的期间之和达到最大值。这种类型的一条路称为*关键路*，而这条路上的活动称为*关键活动*。在图 23-10 中，关键路有 37 个单位时间。任何一个关键活动的延长必定导致总期间的延长,然而若一个非关键的活动在一定限度范围内加以延长,就不会出现这种情形。

活动时间。 对于网络中每一活动,存在一个最早和最迟的开始时间与一个最早和最迟的结束时间，二者是不同的。开始和结束时间是活动的期间。对于关键活动来说,最早和最迟时间是一致的。

网络矩阵　为了确定一个网络的关键路和获得活动时间，可使用网络矩阵 (见图 23-11)。矩阵的行和列对应于网络的事项,矩阵的元素给出连接事项的活动期间的单位时间数(见前述例题中元素)。为了得出计算

在前述例题中，从 ② 到 ⑦ 导出的活动 2.2 有缓冲时间 $S_G=13$, $S_U=3$, $S_F=13$, $S_B=0$。由于 $S_U=3$, 因而 2.2 可以延长三个单位时间而不致妨碍建筑的竣工。然而，延长十三个单位时间就将意味着路 ⓪ → ① → ② → ⑦ 成为关键性的，故而活动 1.1 和 2.1 必将开始于它的最早时间而不能延长，否则，因为 1.1 和 2.1 分别地有条件缓冲时间 7 和 10, 它们原本是可能延长的。

用手工计算网络矩阵，只可能计算一个具有少量的活动和事项的网络。而对于一个出现在实际中的过程网络，就必须按某一规则使用电子计算机。

网络中的专门方法　网络方法主要是用来寻求事项定位网络的关键路和缓冲时间的；已经发展了如下一些方法。

关键路方法 (CPM)。对事项定位网络和活动定位网络二者都适用；它用(确定性地获得的)活动期间来对活动本身进行估值，其目的是通过由网络矩阵而得的计算程序，而求得关键路和计算缓冲时间。

在**拟位势方法** (MPM) 中，对一个活动定位网络中的活动(结点)和依赖关系(边)二者都加以估值。对于活动来说，期间是已定值的，而依赖关系的估值可表示为一个**连接距离**。例如，不同活动的开始时间之间的时间段可由边来连接。连接距离可以取负值。按照连接距离和活动期间之间的关系，可以区分出中继式完工(连接距离大于活动期间)，正规式完工(连接距离等于活动期间)和重迭式完工(连接距离小于活动期间)。若在完全网络中出现的是正规式完工，则可得到一个 CPM 网络。

计划评审方法 (PERT) 大多使用于事项定位网络，但决定活动期间的并非用确定性的，而是用随机性叙述的方法。对于一个活动的期间 d, 存在一个最佳估计 d_0, 一个最差估计 d_p 和一个最可能估计 d_m。活动的期间由 $\underline{d}=(d_0+d_p+4d_m)/6$ 给出。除关键路外，期望值和时间的变化范围是可以计算的。

到目前为止，这些已知的方法都要假定从实际过程抽象出来的网络中，其连通性和依赖性实质上是已给的，即这些方法只对一个网络的规定的拓扑结构起作用。在**组合网络**(CNW)中，拓扑结构不再是已知的，而确定一个最优结构，就是此方法的目的。现在假定在活动的集合中，存在一个这样的关系，$A\to B$ 意指 B 必须在 A 以后实现；$C\leftrightarrow D$ 意指 C 和 D 不必一齐进行。这些条件必须由所有出现在网络中的活动表成公式，而在

使关键路达到最小的条件下求得网络的一个结构。

前面这些方法都与计算财力有关。这就导致去熟悉和考虑已实现的那些活动的财力问题。作为财力可以看作是机器、劳动力、原材料，还有活动的价格和成本。要区分这样两类问题：1．为了最优分配财力，已知整个过程的时间，去试验通过利用缓冲时间和把活动分割成几段，来达到财力的最合理负担。2．为了在限制财力下的最优时间分配，有效财力的上限是已知的，去试验尽量小地取过程的总期间，当然这里指的“尽量小”是小到局限于财力上可能允许的范围内。财力问题仍然没有得到完全解决，但非常有效的近似方法却已经在使用了。

最后，现在正在尝试创造一个关于有效的和最佳实现的复杂判别准则的网络最优化算法。

第24章　位势理论与偏微分方程

偏微分方程

阶，线性，齐性　常微分方程中只含有一个自变量的函数。与之对比，如果未知函数 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ 依赖于 n 个自变量 $x_1, \cdots\cdots, x_n$，而且方程包含偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$，$\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}$ 等，$(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则称为**偏微分方程**。出现在方程中最高阶偏导数的阶决定方程的**阶**。如果未知函数及其偏导数线性地而不是以乘积出现，则此微分方程称为**线性的**。如果一个线性偏微分方程不包含和未知函数及其导数无关的自由项则称之为**齐次的**，否则称为**非齐次的**。对线性偏微分方程，象常微分方程一样，**迭加原理**成立：如 u_1 与 u_2 是解，则每一线性组合 $u=C_1u_1+C_2u_2$（其中 C_1 与 C_2 是常数）也是解。

一阶偏微分方程　一阶偏微分方程的积分常常能归结为一个常微分方程组——**特征方程组**的积分。对于微分方程 $F(x_0, \cdots, x_n, u, p_0, \cdots, p_n)=0$，其中 $p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$，特征方程组有如下形式：

$$x_i'=\frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad p_i'=-\frac{\partial F}{\partial x_i}-p_i\frac{\partial F}{\partial u}, \quad u'=\sum\frac{\partial F}{\partial p_j}p_j,$$

其中 x_i 与 p_i 当作一个新参数 t 的函数，而一撇表示关于 t 的导数。

如果微分方程不明显依赖于 u，可以导致形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+H(t, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=0,$$

其中 $x_0=t$，$p_0=\frac{\partial u}{\partial t}$，而变量也许要重新编号。此形式的方程称为**哈密尔顿-雅可比微分方程**；其中函数 H 称为**哈密尔顿函数**。于是特征方程组有**典则形式** $\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$，$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}$。某种力学系统的质点运动用此方程描述。此时，$x_i$ 与 p_i 是位置与冲量的广义坐标，而哈密尔顿函数 H 等

于总能量(见 **II**. 第 25 章)。

高阶偏微分方程 对于高阶偏微分方程没有相应的定型的积分理论。尽管不能导出通积分，我们常常能够借助于一些仅依赖于一部分变量的函数的和或积的形式，给出适当的试验函数以找到特解：这被称为*变量分离法*。于是所给的微分方程归结为解这些函数的若干简单的微分方程。

在位势理论中研究一个特殊的*二阶线性偏微分方程*的性质。

位势理论

原来由力学问题产生的位势理论已经发展成为数学的一个独立的、广阔的分支。它的结果应用于很多物理学科，特别是在处理力学、静电学、磁学、电动力学、流体动力学和热力学问题中。位势理论还被证明在常微分方程、偏微分方程、复分析、保角变换和微分几何理论的发展中是富有成效的。

牛顿位势 最简单的位势概念是牛顿在解释物体的相互作用时发现的。

牛顿的引力定律	$F=k\cdot(m\mu)/r^2$

点位势。*牛顿的引力定律*说，三维空间中两个物体相互作用的引力，与它们的质量成正比，与它们间的距离平方成反比。如果将物体理想化，使它们的质量全都集中在一点——质点，即在点 P 的一物体有质量 m，另一物体在点 Q 有质量 μ，则可以得到上述的公式。如果质量由电荷代替，这就变成库仑(Coulomb)定律。这里 r 是两点间的距离，k 是比例常数，例如引力常数。为简化计算，下面将假设 $km=1$。如果 P 点的质量受 Q 点质量所吸引，则力 F 的方向从 P 到 Q。如果力的方向与笛卡尔坐标系的轴的夹角为 α, β, γ，其中 P 和 Q 有坐标 (x, y, z) 和 (ξ, η, ζ)，则根据解析几何的定理(见图 24-1)，$r=\sqrt{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$，$\cos\alpha=(\xi-x)/r$，$\cos\beta=(\eta-y)/r$，$\cos\gamma=(\zeta-z)/r$，所以力 F 的分量为

$$X=F\cos\alpha=\mu\cdot(\xi-x)/r^3,\ Y=F\cos\beta=\mu\cdot(\eta-y)/r^3,$$

$$Z=\mu\cdot(\zeta-z)/r^3。$$

然而，如拉格朗日在 1773 年所发现的，这三个分量是一函数 $U(x, y, z)$ 的偏导数，高斯在 1840 年称函数 U 为 Q 点的质量 μ 对点 $P(x, y, z)$ 的*位势*。

因为如果 $U=\mu/r=\mu[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-1/2}$，把 Q 看作定点，P 是可变的，则 U 关于 x 的导数是

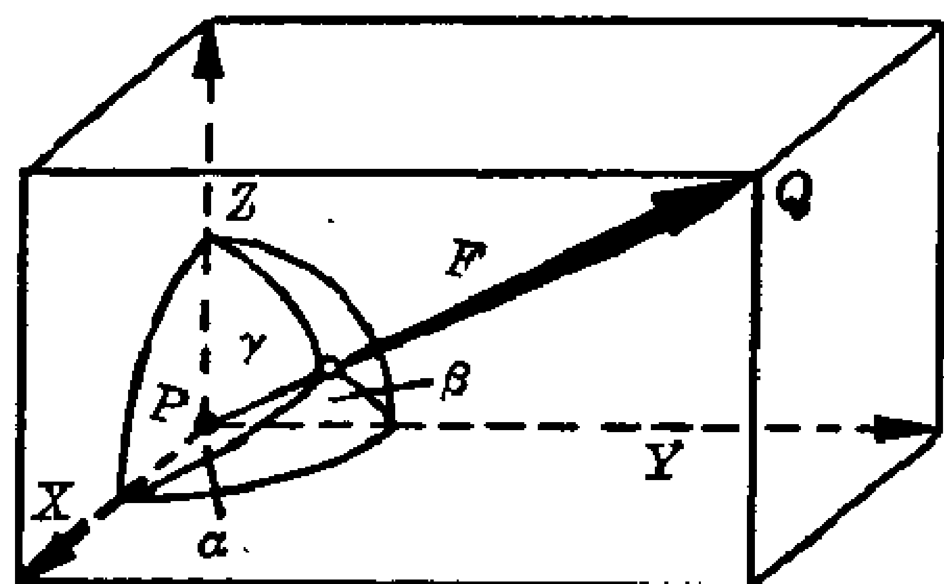


图 24-1　分解一个力为几个分量

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-(\mu/2)[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-3/2}\cdot 2(x-\xi)=\mu(\xi-x)/r^3=X。$$

类似地 U 关于 y 与 z 的偏导数是

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=Z。$$

位　　　　势
$U=U(x,\ y,\ z)=\mu/\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$

位势 U 在整个三维空间除 Q 外有定义；因为当 $P=Q$，分母为 0，表式 μ/r 对 $r=0$ 没有定义。

值 $U(x,\ y,\ z)$ 等于含有两个质点的系统的势能。

有限多个点的位势。 如 P 点的质量受有限多个带有质量 μ_s 的质点 $Q_s(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 所吸引，则作用在 P 点的合力分量 $X,\ Y,\ Z$ 是各个分力的分量 $X_s,\ Y_s,\ Z_s$ 的和：

$$X_s=\mu_s\cdot(\xi-x)/r^3,\ Y_s=\mu_s\cdot(\eta-y)/r^3,\ Z_s=\mu_s\cdot(\zeta-z)/r^3;$$

$$X=\sum_{s=1}^{n}X_s,\quad Y=\sum_{s=1}^{n}Y_s,\quad Z=\sum_{s=1}^{n}Z_s。$$

位　　势	$U=\sum_{s=1}^{n}\mu_s/r_s$

类似地，位势 U 是各个分位势之和，只要 P 不与 Q_s 的任何一点重合。

连续分布质量的位势。 为了进一步推广，自然不限于一个质点的吸引而研究一个连续分布的质量对此质量外面一点 P 的引力。我们把充满一个区域 T 的质量分成具有质量 $d\mu$ 和密度 $\rho=\frac{d\mu}{d\tau}$ 的无限小的体质元素 $d\tau=d\xi\,d\eta\,d\zeta$。在 $Q(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ 点的体积元素对点 $P(x,\ y,\ z)$ 作用着

一个具有分量 dX, dY, dZ 的引力。T 中整个质量的引力的分量通过无限多个体积元素的总和，即由 T 上的积分得到(见图 24-2):

$$dX=[(\xi-x)/r^3]d\mu,$$
$$dY=[(\eta-y)/r^3]d\mu,$$
$$dZ=[(\zeta-2)/r^3]d\mu;$$
$$X=\iiint_T[(\xi-x)/r^3]d\mu,$$
$$Y=\iiint_T[(\eta-y)/r^3]d\mu,$$

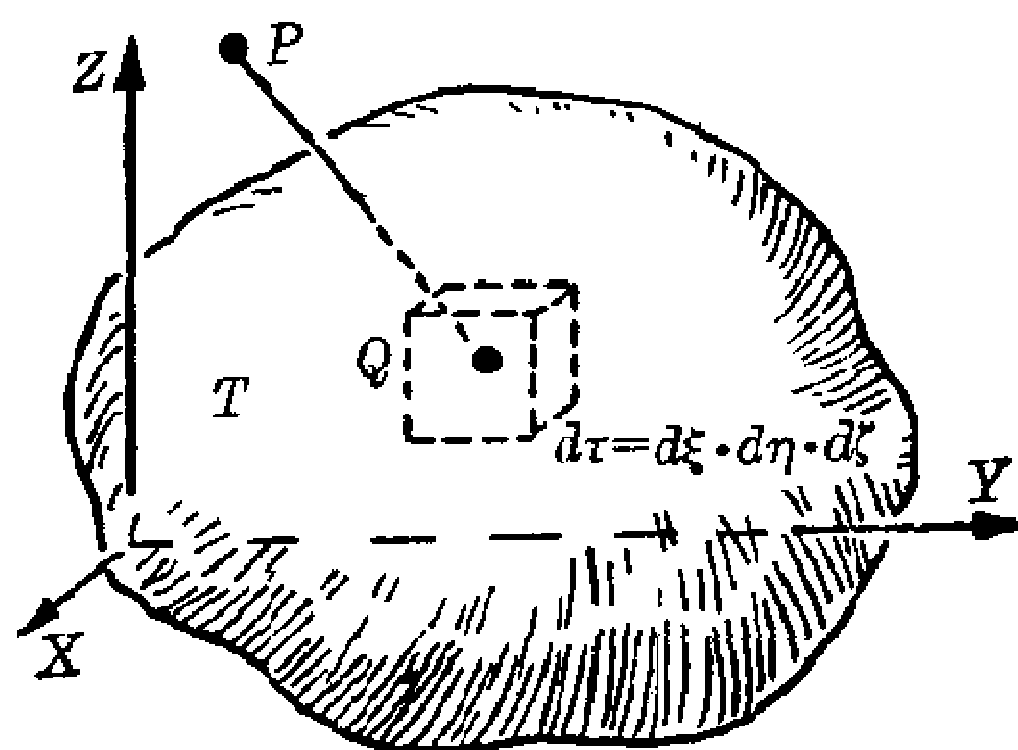


图 24-2　牛顿位势的导出

$$Z=\iiint_T[(\zeta-z)/r^3]d\mu。$$

当我们能通过积分号下求偏导数表示时，这些分量也是位势 U 的偏导数。

牛顿位势	$U=\iiint_T \frac{d\mu}{r}=\iiint_T \frac{\rho}{r}d\tau$

等势面　借助等势面可给位势一个几何解释。三维空间上的每一点 P, 只要 P 不与吸引质点或在吸引连续质量上的质点重合，其位势即可确定。如果把位势具有同样值 a 的所有点 P 联结起来，得到等势面 $U(x, y, z)=a$。当 a 变化时，所给的方程表示一个单参数的曲面族。

在点位势 $U=\mu/r$ 的情形，曲面族由 $\mu/r=a$ 表示。这些显然是以 Q

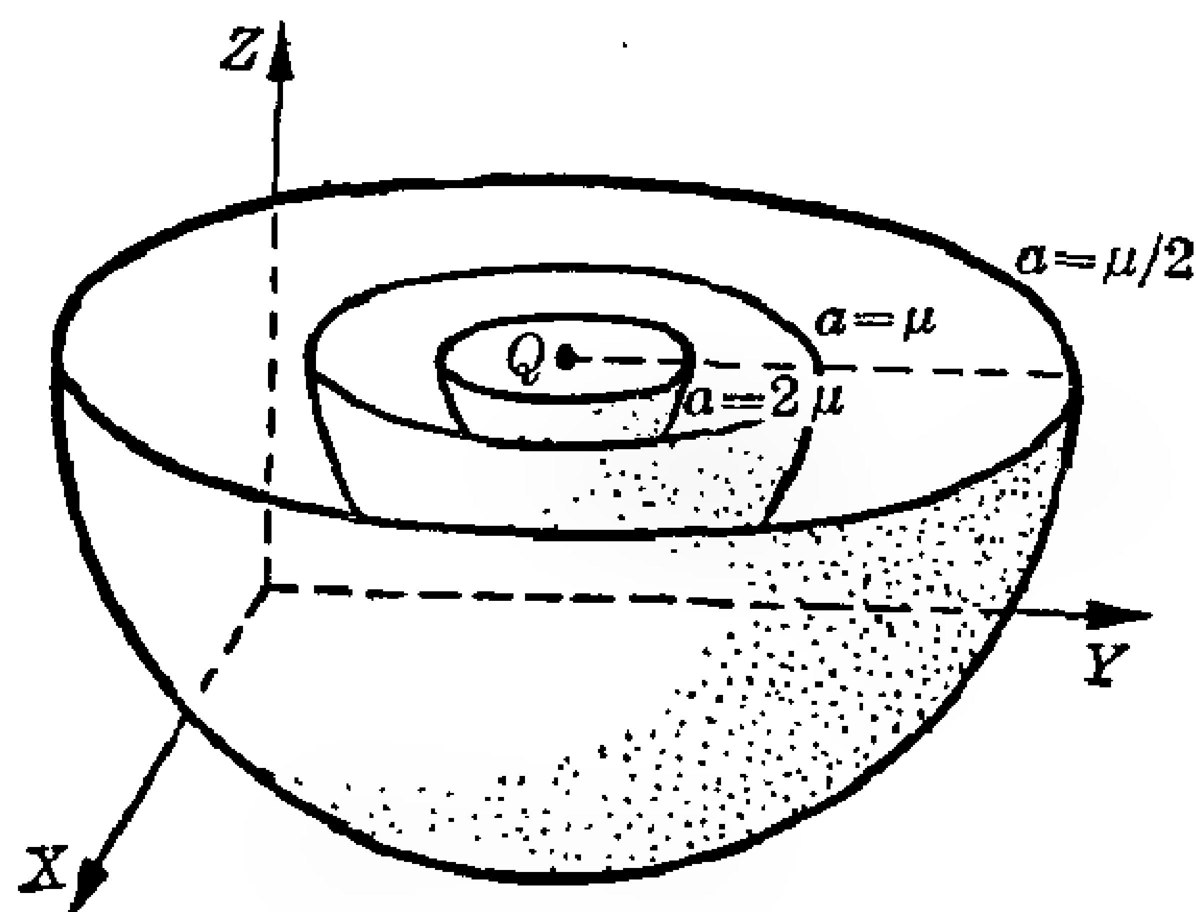


图 24-3　由 $a=\mu/r$ 定义的等势面

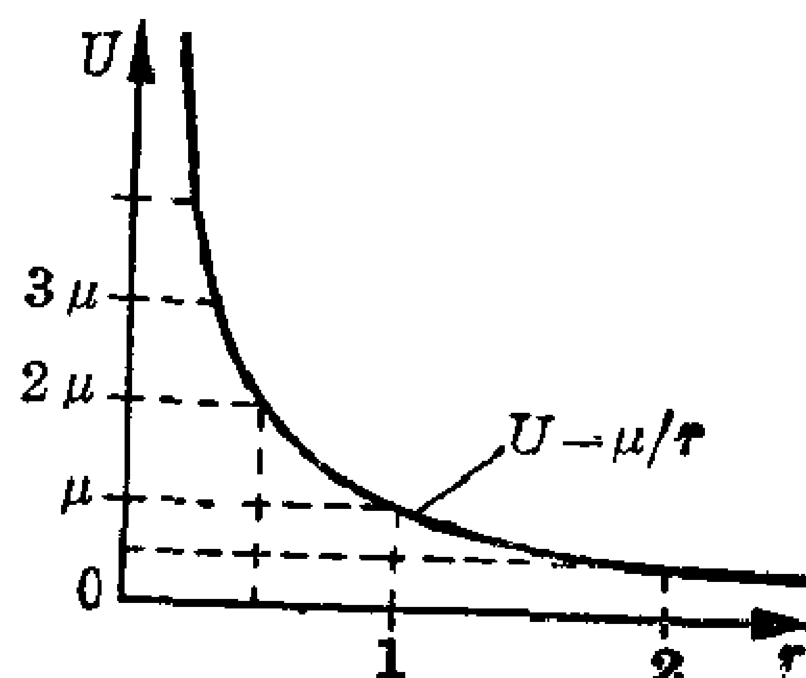


图 24-4　点位势 U 对距离 r 的依赖性

为中心的同心球面，当 a 递增时，其半径递减。图 24-3 与图 24-4 表示曲面族 $\mu/r=a$ 及位势 U 如何依赖于距离 r。

关于位势的微分方程　如果对

$$1/r=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-1/2}$$

关于 x 求两次偏导数，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x}(1/r)=-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-3/2}(x-\xi)$$

及

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1/r)&=3[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-5/2}(x-\xi)^2\\&\quad-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-3/2}\\&=3(x-\xi)^2/r^5-1/r^3。\end{aligned}$$

类似地，关于 y 与 z 的偏导数

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(1/r)=3(y-\eta)^2/r^5-1/r^3,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(1/r)=3(z-\zeta)^2/r^5-1/r^3。$$

如果这三个偏导数相加，右边相消：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1/r)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(1/r)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(1/r)=0。$$

函数 $u=1/r$ 满足微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，这个方程由拉普拉斯在 1782 年首先给出，以后就用他的名字命名。

这个线性齐次的二阶偏微分方程被缩写为 $\Delta u=0$。

因为这个微分方程是线性齐次的，如果乘上一个常数仍然成立。因为 $\Delta(1/r)=0$，所以 $\Delta(\mu/r)=0$。因此点位势 $U=\mu/r$ 是拉普拉斯方程的一个解。由于和式 $\sum_{s=1}^{u}\mu_s/r_s$ 中的每一项都满足方程 $\Delta(\mu_s/r_s)=0$，其和也满足这个微分方程。最后，在积分号下求导可得

$$\Delta U\equiv\iiint\Delta(1/r)\rho\,d\tau=0。$$

拉普拉斯算子	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta$

所以至今所考虑的这三个位势都是拉普拉斯方程的解。这就给位势理论以新的、有趣的方法：以拉普拉斯方程为出发点并称解为位势。

当 P 在吸引质量内部的情形至今尚未考察过。这时将导致一个非齐次的微分方程 $\Delta u=-4\pi\rho$，其中 ρ 是质量密度；它为普阿松在 1813 年所发现。拉普拉斯算子还出现在理论物理更重要的偏微分方程中。例如：

1. **赫尔姆霍兹**(Helmholtz)**振动方程** $\Delta u+k^2u=0$；
2. **热传导方程** $\Delta u=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$，它也应用于扩散问题；
3. 对电磁波和水波、声音传播和弦的振动的**波动方程**

$$\Delta u=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

4. 对电缆中电磁波传播的**电报方程**

$$\Delta u=a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\frac{\partial u}{\partial t}+cu_{\circ}$$

一般势函数　任何关于三个变量都二次连续可微且在空间的某区域 T 满足方程 $\Delta U=0$ 的函数 $U(x, y, z)$ 称为在此区域内的势函数或调和函数。

位势理论是位势方程 $\Delta U=0$ 的解的理论。

我们宁愿不去搜集此方程的所有解，而对探求所有势函数的共同性质或找出它们所满足的附加条件更有兴趣。

势函数的性质　设 T 是三维空间中以光滑曲面 S 为边界的一个开集，设体积元素与面积元素分别用 $d\tau$ 与 $d\sigma$ 表示（见图 24-5）。在 S 的每一点，以垂直于 S 的方向，为外法线方向 n。现在如 V 是在 T 与 S 内确定的某个二次连续可微的函数，$\frac{\partial V}{\partial n}$ 表示在 S 上各点的法向导数，则由高斯积分定理得

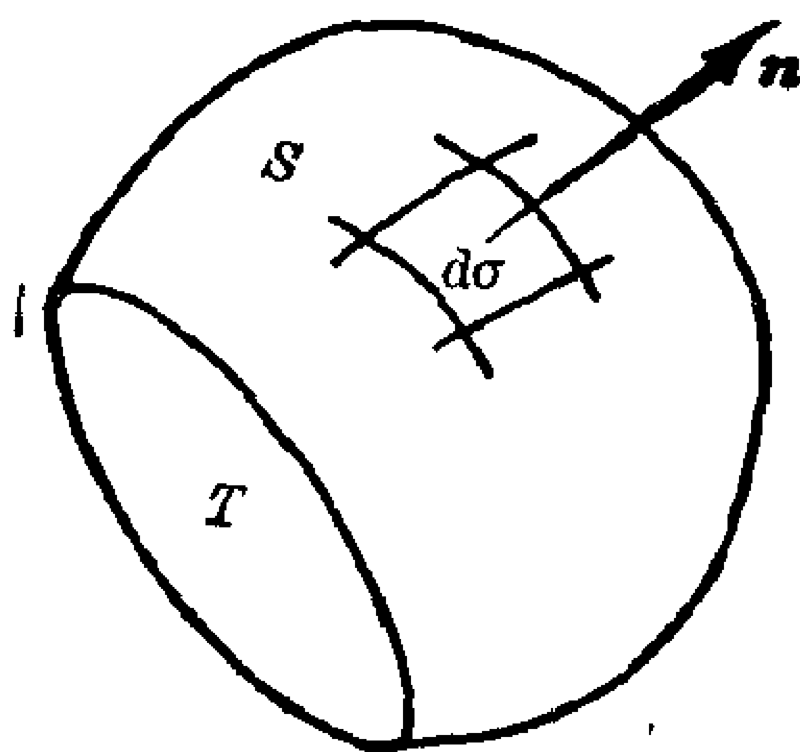


图 24-5　曲面元与法向

$$\iint_S \frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma=\iiint_T \Delta V\,d\tau_{\circ}$$

如果 V 是势函数 U，则 $\Delta U=0$ 在 T 内处处成立，所以：

对每一个势函数 U，$\iint_S \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma=0$

这个命题描述了势函数的特征：如在 T 中的任一区域 T' 的界面 S' 上此命题成立，则 U 为势函数。根据另一个积分定理，即格林(Green)定理，对在 T 和 S 中确定的任何两个二次连续可微函数 V 与 W 有

$$\iint_S \left(W \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial W}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_T (W \Delta V - V \Delta W) d\tau。$$

如果我们选 $W = 1/r$，其中 r 表 P 到定点 P_0 的距离，则 $\Delta W = \Delta(1/r) = 0$，$P = P_0$ 处除外。此点暂先在积分域 T 中被排除，因 W 在此有奇性。如我们希望让 P_0 在 T 中，必须通过极限过程，当 $P_0 \in T$，导致

$$\iiint_T (1/r) \Delta V d\tau = -4\pi V(P_0)。$$

如果选择 U 为关于 V 的势函数，可得：

对一般势函数的格林公式	$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial (1/r)}{\partial n} \right) d\sigma$

所以只要函数 U 及其法向导数 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 的值在 S 上已知，则 U 在 T 的每一点 P_0 完全被确定。

如我们取 S 为以 P_0 为中心，R 为半径的球 C，则

$$\frac{\partial (1/r)}{\partial n} = \frac{\partial (1/r)}{\partial r} = -1/r^2。$$

现在在 C 上 $r = R =$ 常数，并考虑到 $\iint_C \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0$，我们得到

高斯的势函数的平均值性质	$U(P_0) = 1/(4\pi R^2) \iint_C U d\sigma$

在球心的函数值总等于在球面上各点处函数值的平均值。所以势函数在 T 的内点不能达到极大或极小值。

边值问题　格林公式导出如下问题：在怎样条件下由 T 的边界 S 上给定的 U 值与 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 值能够决定域 T 内的位势函数？这类问题称为边值问题，它们出现在物理学的许多分支中，例如在静电学、流体动力学和热传导理论中。

现在 U 与 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 在 S 上不能同时任意选取。如 U 的边界值被给出，则函数唯一确定；具有同样边界值的两函数的差 $(U-\overline{U})$ 在整个边界上为零，所以据高斯平均值性质，在内部也为零。

从 U 的给定边界值决定内部的势函数的问题称为势函数的**第一边值问题**或**狄里克雷问题**，这是以首先做此工作的数学家的名字命名。

第二边值问题或**诺依曼(Neumann)问题**，在于求一个势函数在所有边界点有给定的法向导数 $\frac{\partial U}{\partial n}$。自然，边界值必须指定为能使条件

$$\iint_S \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma=0$$

得到满足。

第三边值问题，在于求位势方程的解，解的线性组合 $\frac{\partial U}{\partial n}+hU$ 在边界点取指定的值，其中 h 为正常数。

位势方程的简单解 三维空间的势函数 U 是三个自变量的函数，按笛卡尔坐标有形式 $U=U(x, y, z)$，按柱坐标为 $U=U(\rho, \varphi, z)$，按球坐标为 $U=U(r, \theta, \varphi)$。我们常对能写成三个单变量函数乘积的解 U 感兴趣：$U(x, y, z)=X(x)Y(y)Z(z)$ 或 $U(\rho, \varphi, z)=P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ 或 $U(r, \theta, \varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$。在这个情况下，从偏微分方程 $\Delta U=0$ 得出三个常微分方程，通常可以直接求解。这个过程是熟知的，称为**变量分离法**。例如，如果 $U(x, y, z)=X(x)Y(y)Z(z)$，则方程

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$$

给出三个微分方程

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2}=k^2,\quad \frac{1}{Y}\cdot\frac{d^2Y}{dy^2}=l^2,\quad \frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}=-(k^2+l^2),$$

所以解是 $U_{klm}(x, y, z)=e^{kx}e^{ly}e^{mz}$；$m^2=-(k^2+l^2)$；$k, l, m$ 是复数。

变换。三维空间的某些变换保持位势函数不变的性质。这些变换是关于球的反演变换，并称为**汤姆生(Thomson)变换**。例如关于单位球 $|r|=1$ 作反演变换后，$U(r, \theta, \varphi)$ 变为 $(1/r)$，$U[(1/r), \theta, \varphi]$，它仍是势函数。牛顿位势 $U=1/r$ 给出常位势 $U=1$，反之也对。

平面位势 二维位势是微分方程 $\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ 的解。它们常

发生在物理问题中，其解不依赖于第三个坐标的情形；例如，一个在 z 轴方向的很长的均匀棒的引力在两点 $P_1(x, y, z_1)$ 与 $P_2(x, y, z_2)$ 是相同的，只要坐标 z_1, z_2 与长 $2L$ 比较很小。对于近似解我们可以假设 U 不依赖于 z，且从 $U=U(x, y)$ 出发（见图 24-6）。

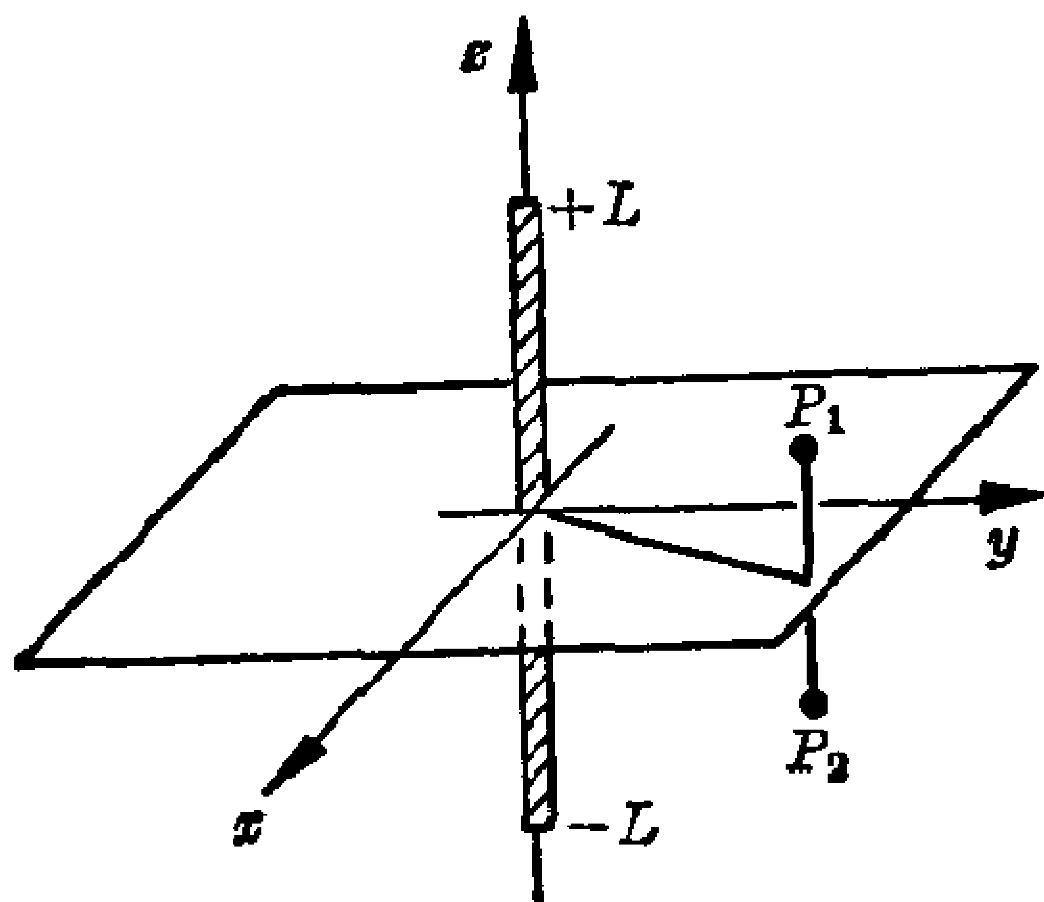


图 24-6　长 $2L$ 的杆的位势

二维位势方程的解与复分析紧密联系：一个复变量 $z=x+iy$ 的函数 $w=u+iv$ 是解析的充要条件是它的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 满足柯西-黎曼微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。$$

于是，
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0。$$

对 v 这同样成立。

任何解析函数的实部和虚部是势函数。它们被称为共轭的。

【例】　从 $w=\ln z=\ln(re^{i\varphi})=\ln r+i\varphi$，得到平面内的两个共轭位势。它们是 $u(r, \varphi)=\ln r$ 及 $v(r, \varphi)=\varphi$，或按笛卡尔坐标

$$U(x, y)=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ V(x, y)=\arctan(y/x)。$$

位势 $U=\ln r$，对数位势在平面中所起的作用象牛顿位势 $U=1/r$ 在空间中所起的作用一样。这是一个吸引点的力场的位势，只要引力和 $\frac{1}{r}$ 成正比，而不是与 $\frac{1}{r^2}$ 成正比。

第25章 变 分 学

变分学方法应用于解决几何学、理论物理与工艺学的很多问题。导致变分学课题的那些问题很早就已出现，例如在一切具有相等周长的平面区域中找出哪一个的面积最大。申诺道洛斯(Zenodoros, 大约公元前180年)早就提出了等周问题。在托尔斯泰的小说故事中，埃尔特对农民派克霍姆说:"你在一天中走一圈所能围起来的那些土地是你的。"这时派克霍姆面临着同样的问题:"你想要多少土地?"

等周问题: **在一切具有相等周界(等周图形)的平面图形中，圆有最大面积**(见图25-1); **在空间所有具有相等表面积的物体中球有最大体积。**

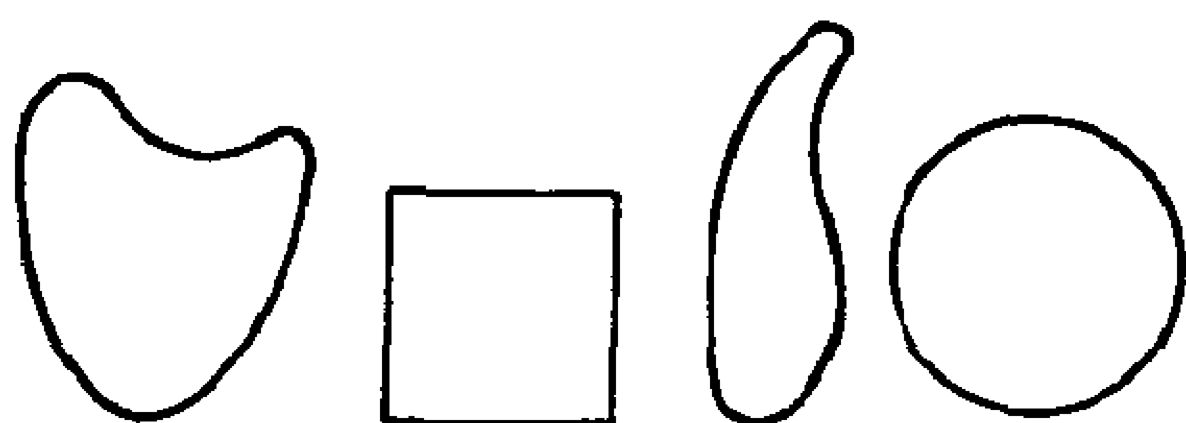


图25-1 在具有相等周长的图形中，圆具有最大的面积

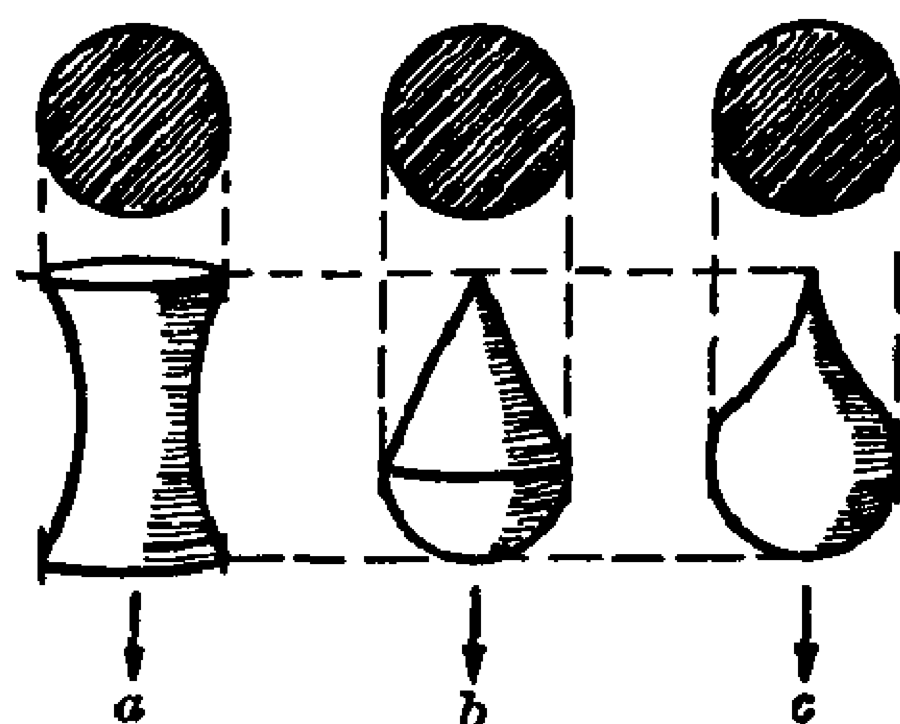


图25-2 牛顿问题:由等长曲线产生的同样的有效截口的回转体

在一个困难问题上牛顿的困惑 随着自然科学和数学知识的增长，17世纪的数学家和物理学家面临着互相联系而又深奥的问题。牛顿在他的主要著作«自然哲学的数学原理»(通常称作"原理")(1687年)中，计算了诸如柱体或球等物体在有阻力的介质中下落时的阻力。他试图寻找下

落时(具有相同的轴向速度)有最小阻力的回转体。在其他条件不变的情况下,对于同样长度和同样的有效截口,需要找出通过轴线的截口的边界曲线的形状。虽然可以肯定类似于回转双曲面的物体(a)不如由半球和圆锥联成的物体(b)更适合要求,但牛顿和他同时代的人,还不能给出象流线型物体(c)那样的解(见图25-2)。

捷线问题　更富成果更著名的是由伯努利在1696年所公开提出的捷线问题:如果已给两点 P_1, P_2 位于不同高度,但不是一个正好在另一个上方,欲在连结这两点的所有可能的曲线中找出一条曲线,使一个质点沿着它在重力影响下从 P_1 向 P_2 滑动(不计摩擦)时,所用时间最短。当时全欧洲的主要数学家:牛顿、莱布尼茨、雅可比、伯努利、洛必达、赫特(Hudde)、法蒂渥(Fatio)等人都从事这个问题的研究。从那时起,变分学便发展为一个特定的数学学科。

适当选择坐标系,画出若干联结点 P_1、P_2 的曲线 $y=f(x)$ 作为可能的下落曲线(见图25-3)。因为距离 s,时间 t 和在这条曲线上每一点的瞬时速度 v 由关系式 $v=\frac{ds}{dt}$ 联系着,又因为在重力加速度 g 作用下,速度 $v=\sqrt{2gy}$,最后因为弧的元素 ds 是 y' 和 x 的熟知函数 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$,所以我们得到运动所需要的时间 T 是积分限从 x_1 到 x_2 的定积分;由

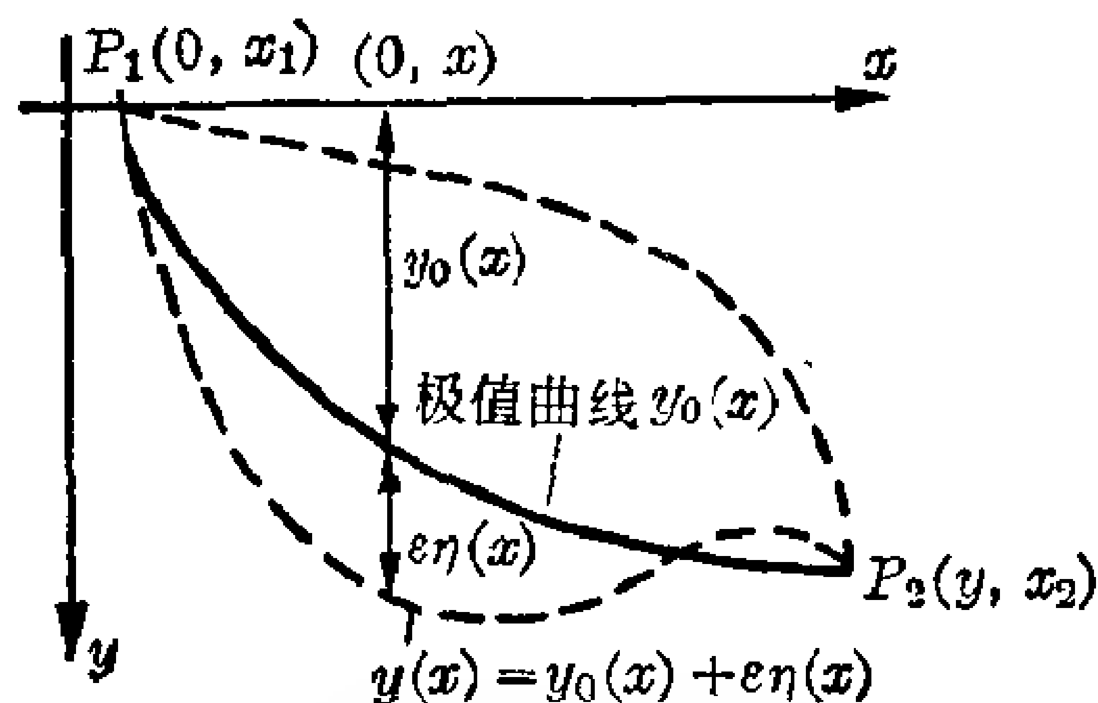


图25-3　捷线问题

$$dt=[1/\sqrt{2gy}]ds=[1/\sqrt{2gy}]\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

即得

$$T=[1/\sqrt{2g}]\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{(1+y'^2)/y}\,dx。$$

对于所要求的函数 $y_0=y_0(x)$ 这一积分应当有最小值,即对所有不同于 y_0 的 $y(x)$,积分值都较大。根据下面所述的方法(欧拉微分方程的解),我们得到摆线是这个问题的解(具有参数 α 和两个常数 C_1 和 C_2)的解:

$$x_0=(C_1/2)(\alpha-\sin\alpha)+C_2,\quad y_0=(C_1/2)(1-\cos\alpha)。$$

无边界条件的变分问题,欧拉微分方程

捷线研究归结为求函数 $y(x)$,使由它导出的函数 $f(x, y, y')$ 的积分有最小值或最大值。函数 $f(x, y, y')$ 由几何的、技术的或物理的状况加

以决定，称之为**基本函数**。在捷线问题中 $f(x, y, y')=\sqrt{(1+y'^2)/y}$ 是基本函数。用一个感叹号标志求极值，条件应成为

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx=\text{极值!}$$

基本函数依赖于自变量 x，依赖于欲求的函数 $y(x)$ 及其导数 $y'(x)$。所欲求的 $y_0(x)$ 称为**一个极值元**。

变分学的基本问题是极大或极小值问题，但是比微分学中的问题更困难。它要求找到一个函数，使得某个积分取最大或最小值。

伯努利兄弟、牛顿等人是借助于特殊的技巧解决捷线问题的，而欧拉、拉格朗日、韦尔斯特拉斯、奥斯特洛格拉特斯基、卡拉泰渥多利(Carathéodory)等人，则在十九世纪和二十世纪中发展出一种总可以求得一个解的普遍方法。

欧拉成功地化变分问题为微分方程问题。他首先假设所有允许函数 $y(x)$ 在点 P_1 与 P_2 和极值元 $y_0(x)$ 相同。他把 $y(x)$ 看作极值元 $y_0(x)$ 与变分函数 $\varepsilon\eta(x)$ 的一个组合。于是 $y(x)=y_0(x)+\varepsilon\eta(x)$ 在自由参数 $\varepsilon=0$ 时成为极值元。同时，$\eta(x)$ 在 P_1 与 P_2 必须为零，即对值 x_1 与 x_2 必须为零，从而必成立边界条件 $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$。对 $y=y(x)$，积分 J 是 ε 的函数，其中

$$J(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0+\varepsilon\eta, y_0'+\varepsilon\eta')dx。$$

函数 $J(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 有一个极值，因而由微分学法则，它的导数在 $\varepsilon=0$ 时必须为零。因为积分限是固定的，我们可以在积分号下求微分

$$J'(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2}[f_y(x, y_0+\varepsilon\eta, y_0'+\varepsilon\eta')\eta+f_{y'}(x, y_0+\varepsilon\eta, y_0'+\varepsilon\eta')\eta']dx。$$

对在 x_1 与 x_2 间连续可微且在 x_1, x_2 为零的每一函数 $\eta(x)$ 有

$$J'(0)=\int_{x_1}^{x_2}[f_y(x, y_0, y_0')\eta+f_{y'}(x, y_0, y_0')\eta']dx=0。$$

分部积分第二项，我们得：

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right]\eta(x)dx+[f_{y'}\eta(x)]_{x_1}^{x_2}=0。$$

由于边界条件，后项为零。但关系式

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right]\eta(x)dx=0$$

仅当方括号中表达式恒为零时对所有函数 $\eta(x)$ 才成立，即

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0。$$

如对于 x 求全微分，我们得到变分学中著名的欧拉微分方程。

欧拉微分方程	$f_{y'y'}y''+f_{yy'}y'+f_{xy'}-f_y=0$

这代表一个二阶的常微分方程。

一个给定的积分对一个函数取极值的必要条件可以用这个函数的微分方程代替。

一次变分　根据拉格朗日在1755年所引进的记号，称变分函数为函数 $y(x)$ 的变分 δy：

$$\delta y=\varepsilon\eta(x);\quad y=y_0+\delta y。$$

因为对极值元，积分 J 有极值，差 $\Delta J=J(y)-J(y_0)$ 对积分的极大值就决不能是正的，对极小值则决不能是负的。对任意小的 ε 值，积分值的变分可以表示为函数 $J(\varepsilon)$ 当 $\varepsilon=0$ 时的微分。乘积 $J'(0)\varepsilon$ 称为 J 的一次变分，用 δJ 表示：

$$\delta J=J'(0)\varepsilon=[f_{y'}\cdot\delta y]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left(f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right)\delta y\,dx。$$

于是，在欧拉微分方程的推导中找到的使积分极值存在的必要条件就可以表示为一次变分为零：$\delta J=0$。

推广　基本函数 $f(x, y, y')$，因而积分 J，可以依赖于几个（有限多个）函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 及其导数，而不仅依赖于一个函数 $y(x)$。于是代替一个欧拉微分方程的是 n 个微分方程的方程组。另一方面，与函数 $y(x)$ 一起，在基本函数中能出现 $y(x)$ 的更高阶导数即除 $y'(x)$ 外也有 $y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$。因而欧拉微分方程是 $2n$ 阶的。最后，我们能够探求空间曲面的极值性质。例如，张在一个闭的非平面的金属环上的肥皂膜，由于表面张力，它的形状总是尽可能取最小的曲面积。这种具有极小面积的曲面称为**极小曲面**。于是积分 J 是一个重积分，x 与 y 是基本函数的自变量，确定面积的函数 $z=z(x, y)$ 要满足：

$$\iint_B f(x, y, z, z_x, z_y)dx\,dy=极值!$$

作为存在极值的一个条件，我们得到奥斯特洛格拉特斯基微分方程，这是一个二阶的偏微分方程：

一般的等周问题中在要求 $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx=$极值！的同时，还有积分形式的附加条件，它要求关于 y 与 y' 的函数 $g(x, y, y')$ 的积分有预定的值 a: $\int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')dx=a$。

这个一般等周问题可以用拉格朗日发展起来的未定因子法归结为无附加条件的变分问题。由给定的函数 $f(x, y, y')$ 与 $g(x, y, y')$，我们组成一个带有常数因子 λ 的广义的基本函数

$$h(x, y, y')=f(x, y, y')+\lambda g(x, y, y'),$$

并对此函数解欧拉微分方程:

$$h_y-\frac{d}{dx}h_{y'}=0。$$

在指定弧长 l 的例子中，我们令 $h(x, y, y')=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$，通过对欧拉微分方程求积分得 $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\lambda^2$；于是，极值元实际上是以 $|\lambda|$ 为半径的圆弧。

方程形式的附加条件 在等周问题中，尽管形式很复杂，但基本上只有一个指定的数，例如长度。然而，一个由方程形式给出的附加条件，尽管外表可能较简单，但还会给要求的极值留下了许多任意性，例如在一个曲面上的任意路径就是。可是仅在球面上从一点到达另一点的路线是何等多呵！

曲面上的测地线是连结该曲面上两点的最短曲线。如果考虑曲面上点的坐标 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 依赖于参数 $t\left(\frac{dx}{dt}=\dot{x},\ \frac{dy}{dt}=\dot{y},\ \frac{dz}{dt}=\dot{z}\right)$，则弧长，即积分 $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$ 必须极小。然而，同时必须保证曲线确实在曲面上，即坐标 x, y, z 必须满足作为附加条件的曲面的方程

$$g(x, y, z)=g[x(t), y(t), z(t)]=0。$$

理论物理学的极小原理

数学家与物理学家很早就注意到光线从空间一点到另一点传播所经过的路径比别的路径所需要的时间短（见 **II**. 第6章第4节——函数的极值）。如果我们把这个费尔马原理作为几何光学的基础，那么折射与反射法则就能由此推导出来。

这种极小原理在18世纪被解释为目的论；实际上，莫帕台斯(Maupertuis)甚至企图从他的最小行动原理出发构造出上帝存在性的证

明！伏尔泰在他的讽刺小说“阿卡基阿博士”中，暴露出莫帕台斯是欧洲的笑柄，因而也摧毁了目的论的思想。于是导致光的路径也有可能需极大时间，而且——更重要的是——力学的变分原理能够归结为微分方程，这样无论听起来或看来都不是目的论了。这个由拉格朗日、高斯、哈密尔顿和雅可比等人推出的结果，现在用数学物理的现代术语作简要说明。

例如，在地球的重力场中一个*点质量的运动*或带电质点在电磁场中的运动，不仅由它的依赖外力的瞬时速度所决定，而且也取决于位势。因而它不仅依赖于*动能* T，而且也依赖于*势能* U。按照拉格朗日的方法，我们考虑*拉格朗日函数* $L=T-U$，它是时间 t 和空间坐标 x，y，z 及其导数 $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 的函数。如果我们考虑的不是一个点质量，而是 N 个点质量，则 L 是时间 t，$3N$ 个坐标和 $3N$ 个速度分量的函数。对各种物理问题，引进*广义坐标* q_k，$k=1, 2, \cdots, 3N$ 使得 $L=L(t, q_k, \dot{q}_k)$，$k=1, 2, \cdots, 3N$ 是这些坐标的一个函数。点质量的运动由*第二类拉格朗日运动方程*

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=0,\quad k=1, 2, \cdots, 3N$$

得出。这些方程可以由*哈密尔顿原理*导出。在一切假想的情况下，系统都能够在 t_2-t_1 的时间间隔里从 t_1 时刻所处的状态 1 转移到已知的状态 2。而在这些可以想象到的情况中，实际发生的运动是使得积分

$$J=\int_{t_1}^{t_2} L(t, q_k, \dot{q}_k)dt$$

达到最小那种情况。经典力学中这一最重要的积分原理归结为变分问题，属于这一变分问题的欧拉方程是第二类拉格朗日运动方程。

直接方法

上述的变分学方法虽然是相当漂亮的，但是在实际应用方面存在很大困难。特别是对于很多问题，欧拉微分方程的精确解很难或完全不可能求得。由于这个理由，*近似方法*发展起来了，由于这些方法避开欧拉微分方程，所以称之为变分学的直接方法。

黎兹(Ritz)方法(1909 年)　为使 $J=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx=$极值！我们对所欲求的函数 $y(x)$ 取近似值

$$y=c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x),$$

其中 $\varphi_i(x)$ 必须满足边界条件。问题在于决定常数系数 c_i。我们把 y 代入 J，得 $J(c_1, \cdots, c_n)$ = 极值！ c_i 由极值的必要条件 $\frac{\partial J}{\partial c_i}=0$, $i=1, \cdots, n$ 给出。

【例】 若 $\int_0^1 (y'^2-y''-2xy)dx$ = 极值！，其中的解满足边界条件 $y(0)=y(1)=0$，例如我们可取 $\varphi_1(x)=x(1-x)$，$\varphi_2(x)=x^2(1-x)$。于是，我们得到近似解 $y=7x^3/41+8x^2/369-71x/369$。作为检验，在此例中我们从欧拉方程得到解 $y=\sin x/\sin 1-x$。精确解与近似解之差的数量级仅为 10^{-4}。

第26章 积分方程

一个决定未知函数的方程，如果所欲求的函数出现在一个积分的被积函数之中，则称此方程为积分方程。一个很简单的例子是方程：

$$(1)\qquad \int_a^s y(t)dt=f(s)-f(a),\ a\leqslant s\leqslant b。$$

函数 $f(s)$ 是已知的，欲求函数 $y(t)$。显然解是 $y(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$。

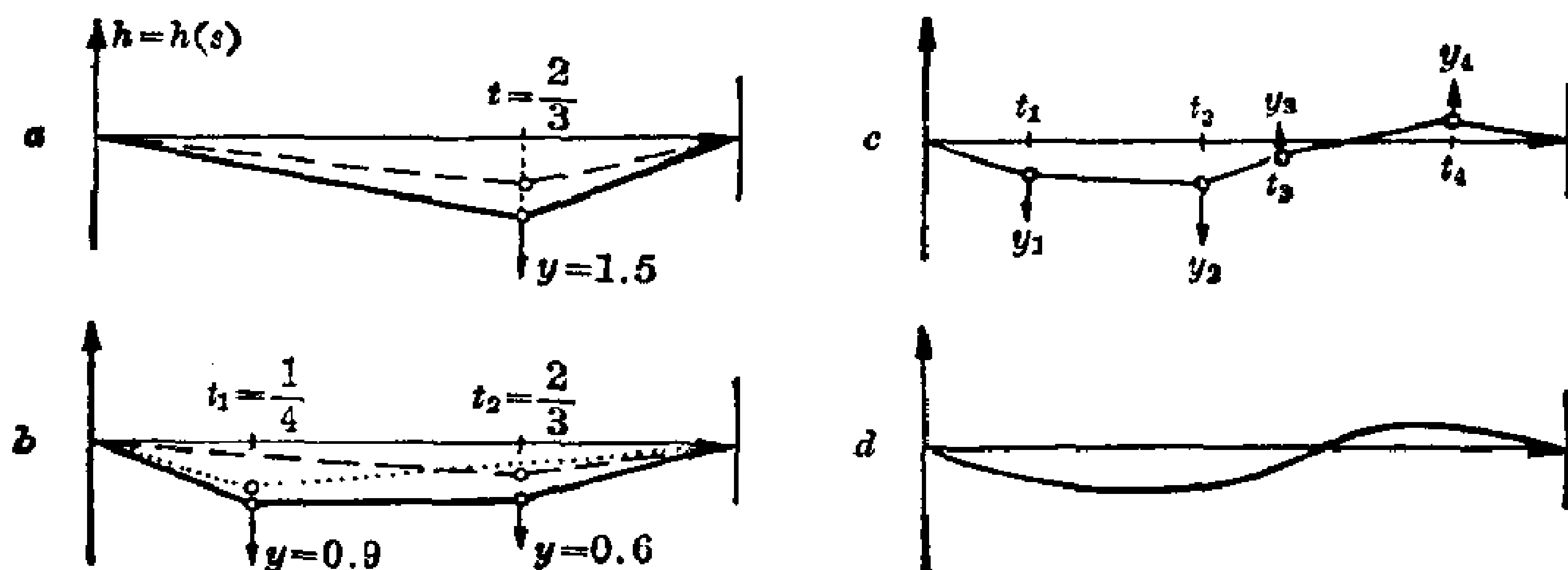


图 26-1 被拉的弦

积分方程常发生在物理或技术问题的数学处理中；关于弹性弯曲与(桥梁建筑的)振动及关于热传导过程的问题都属于这个范畴。作为一个例子，考虑一个具有长度 l 由区间 $0\leqslant s\leqslant l$ 所描述的拉紧的弦。在坐标 t 的点上，给予具有力 1 的荷载。设弯曲的弦用函数 $E(s,\ t)$ 表示；在图 26-1a 中(虚线)给出了弯曲曲线，例如，当 $t=\dfrac{2}{3}$ 时 $h(s)=E(s,\ 2/3)$。如果力的大小是 y，则挠度是 $h(s)=E(s,\ t)y$(实线)。如果两个力 y_1 与 y_2 作用在点 t_1 与 t_2，则总的挠度 $h(s)=E(s,\ t_1)y_1+E(s,\ t_2)y_2$。在图 26-1$b$ 中表示由各个挠度 $E\left(s,\ \dfrac{1}{4}\right)\cdot 0.9$(点线)和 $E(s,\ 2/3)\cdot 0.6$(虚线)合成而得。类似地由在 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$ 具有力 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ 的荷载导致挠度

$$h(s)=E(s,\ t_1)y_1+\cdots+E(s,\ t_n)y_n$$

(见图 26-1c)。特别应用在 $s=t_k$ 的第 k 个点上，挠度的值为

(2)
$$h_k=h(t_k)-E(t_k,\ t_1)y_1+\cdots+E(t_k,\ t_n)y_n$$

或
$$h_k=\sum_{i=1}^{n}E(t_k,\ t_i)y_i\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

对于作用在整个弦上连续分布的力,我们类似地得到

(3)
$$h(s)=\int_0^l E(s,\ t)y(t)dt。$$

函数 $y(t)$ 是**力密度或单位长度的力**,因而 $y\,dt$ 是一个作用在长度 dt 的元素上的微分力;相应地(2)中的求和号变为(3)中的积分。弯曲的弦组成一个光滑曲线 $h=h(s)$(见图 26-1d)。

相反,如果弯曲的弦的形式即函数 $h(s)$ 已知,而欲求弦的荷载 $y(t)$,那么关系式(3)变成 $y(t)$ 的**第一类线性积分方程**。两个变量的函数 $E(s,t)$ 称为积分方程的核。**为解此积分方程**我们可按相反方向进行:方程(3)用方程(2)逼近,即积分用具有所希望精度的有限和来逼近,其中力密度 $y(t)$ 用充分多的单个力 y_i 代替。然而在(2)中 y_i 只是具有 n 个未知量 y_i 的 n 个方程的**线性方程组的解**。

事实上,线性积分方程理论与线性方程组有很多共同点;我们可以把积分方程看做具有**无限多个未知量的线性方程组**。当弗来德霍姆(Fredholm)发展最初的一般理论(大约在1900年)时就是这样看待的。然而,他还考虑稍有不同的类型,即所谓**第二类线性积分方程**或称**弗来德霍姆积分方程**。它们会经常地,但大多数是非直接地作为微分方程重写的结果而出现。例如,弦的强迫调和振动可描述为二阶微分方程的边值问题:

(4)
$$y''+\lambda y=f(s)\quad y(0)=y(l)=0$$

需要求出弦在特定的**振动位相**时在点 s 处的位移 $y=y(s)$,常数 λ 由**振动频率**决定,函数 $f(s)$ 由相同频率和相同相位的外力决定。为了重排微分方程,在 $y(s)$ 的泰勒展开式

$$y(s)=y(0)+sy'(0)+\int_0^s(s-t)y''(t)dt$$

中,根据(4),用 $f(t)-\lambda y(t)$ 去替代 y''。对特殊情形 $s=l$ 记下这一展开式,并用边界条件 $y(0)=y(l)=0$,$y'(0)$ 可消去,于是得到方程

(5)
$$y(s)-\lambda\int_0^l k(s,\ t)y(t)dt=h(s),$$

这是关于 $y(s)$ 的**第二类线性积分方程**。**核** k 类似前述的**影响函数** $E(s,$

t); $h(s)$ 由 $f(s)$ 算得，特别当外力为0时它恒等于0($f=0$; 自由振动)。另外的边界条件不再出现。

第二类积分方程研究得特别透彻，尤其是在斯米特(Schmidt)的著作中。现在讨论这种类型方程的某些重要性质。

弗来德霍姆二者择一律。 一个第二类的线性积分方程，或者对每一给定的右端函数 $h(s)$ 有唯一确定的解 $y(s)$，或者只对某些右端函数有解，但这时总有无限多个解。

和这两种情况相对应，从(5)得来的齐次方程

$$\bar{y}(s)-\lambda\int_0^l k(s,\ t)\bar{y}(t)dt=0 \tag{6}$$

或者有唯一的*平凡解* $\bar{y}=0$，或者存在非平凡的所谓零解。第一种情形 $\bar{y}\equiv0$，其物理意义是：对于 λ 所决定的频率，不可能存在*自由振动*(也叫*固有振动*)。因此，不论外力如何分布，总存在一种完全确定的振动形式。在第二种情形，它具有零解，从另一方面看则存在固有振动。因此对于给定的外力分布 $h(s)$ 可能存在弦的振动 $y(s)$，而且任意的固有振动 $\bar{y}(s)$ 可以和它迭加：$y(s)+\bar{y}(s)$ 也是问题的解。然而，它也可以根本没有解。这种情况在物理学中是会出现的：当施加的力恰好能造成*固有振动*(*共振*)时，将推出弦的位移变成无限大。

特征值 一般地，使(6)有非平凡解的那些参数 λ 相对地说是比较少的。它们称为*特征值*，相应的零解称为*特征函数*。例如，弦振动的特征值是数 $\lambda_n=\frac{\pi^2}{l^2}\cdot n^2(n=1,\ 2,\ \cdots)$，而相应的特征函数是 $\bar{y}_n=\sin(s\sqrt{\lambda_n})$。特征值和特征函数在积分方程的理论和实践中都起着重要作用。例如，将已知函数按特征函数展成级数是解微分方程和积分方程的重要手段：熟知的傅立叶级数属于这一范畴。

预解式 若(5)有唯一解，则解 $y(s)$ 可借助*解核*或*预解式* $\Gamma(s,\ t)$ 表示为

$$h(s)+\lambda\int_0^l \Gamma(s,\ t)h(t)dt=y(s)。 \tag{7}$$

对充分小的 λ 值，预解式可用迭代过程加以计算。为此，我们将(5)的积分号下的 $y(t)$ 替换为值

$$h(t)+\lambda\int_0^l K(t,\ r)y(r)dr,$$

这个值由(5)本身给出；这就导致一个方程，形如

$$y(s)-\lambda^2\int_0^l K_2(s,\ r)y(r)dr=h(s)+\lambda\int_0^l K(s,\ t)h(t)dt。$$

在此，积分号下的 y 再次用上面给出的表示式加以替代，如此反复，最后与(7)相比较，得到展开式

$$\Gamma(s,\ t)=K(s,\ t)+\lambda K_2(s,\ t)+\lambda^2 K_3(s,\ t)+\cdots$$

这就是所谓纽曼(Neumann)级数。迭代核 $K_2,\ K_3,\ \cdots$ 可从 K 重复积分而得出。

其他类型的方程　除方程(3)和(5)外，还有第三类的线性积分方程

(9)
$$g(s)y(s)-\lambda\int_0^l K(s,\ t)y(t)dt=h(s),$$

其中 $h(s)$ 和 $g(s)$ 是已知函数。第一类和第二类积分方程是它的特殊情况，当 $g(s)$ 是常数时即可从(9)得出。

进一步还可以扩展到非线性积分方程。它还没有一般的理论。在这种方程中，欲求的函数 y 在积分号下不是以单因子出现，而是取更一般的形式，通常很复杂，例如

$$y(s)-\int_0^l g(s,\ t)[y(t)]^2dt=h(s)$$

是非线性积分方程。

第27章 泛函分析

泛函分析在近四十年内取得了重大的发展。它的出发点在于认识到从算术的基本运算到微分和积分的范围广泛的各种数学运算之间有着许多明显的共同特征，以及参与这些运算的数学对象在同运算的关系方面显示出相同的或类似的性质，尽管这些对象从属于数学中极为不同的领域。象角的加法、数的加法、向量的加法等都满足同样的加法法则。从这个意义上来说，泛函分析一开始就横跨分析的若干分支，例如积分方程理论、变分法和线性代数，形成了一门综合学科。

由于对这些*深刻的共同性质*的探索和认识，以及为了谋求同特定的数学对象无关而仅由*抽象关系*决定的最一般的叙述，结果产生了许多新的概念，它们形成了泛函分析的基础，并且经常应用于现代数学之中。

抽象空间

与日常用语不同，泛函分析中*空间*这个概念同几何，甚至同我们所处的空间没有直接的关联。但是由于同几何，尤其同解析几何与线性代数有某些相象之处，空间这个名词还是被引用作为泛函分析中的一个概念。类似地，还有其他一些概念，例如*距离*或*长度*，原是取自解析几何的语汇，但用在泛函分析中以后就失去了它们原有的几何意义。

抽象空间的概念　在泛函分析中，如果在一个集合里定义了一个极限过程，即所谓*空间的元素序列* $x_1, x_2, x_3, \cdots$ *趋向于极限* $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$" 的说法有明确的含义，则称这个集合为*抽象空间*。

【例 1】 *k 维欧几里得空间* $\mathbf{R}^k$ 的元素是由有序的 k 个实数组成的向量 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)$。如果对于每个 $i=1, 2, \cdots, k$，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{\xi_i^{(n)}\}$ 趋向于相应的 ξ_i，则称元素列 $x_n=(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)})$，$n=1, 2, \cdots$，趋向于元素 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)$。当 $k=3$ 时，$\mathbf{R}^3$ 就由三个实数的向量 $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 全体所组成。在立体几何中，可以把 x 看作一

个点，ξ_1, ξ_2, ξ_3 是它的坐标。

【例2】 自变量为 t，次数不超过 m 的多项式空间的元素为 $x=x(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_mt^m$，其中系数 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 表示复数。在这些多项式的集合中定义一种极限过程后就成一空间。根据泰勒公式：

$$x(t)=x(t_0)+x'(t_0)(t-t_0)+\frac{x''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\cdots+\frac{x^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m,$$

即次数为 m 的多项式 $x(t)$ 由它及其前 m 次导数在 $t=t_0$ 的值唯一确定。因此极限概念可以这样定义：多项式序列 $x_n=x_n(t)$ 称为**收敛于多项式** $x=x(t)$，如果函数 x_n 及其各阶导数在点 $t=t_0$ 同时收敛于函数值 $x(t_0)$ 和各阶导数值 $x'(t_0), x''(t_0), \cdots, x^{(m)}(t_0)$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t_0)=x(t_0),\ \lim_{n\to\infty}x_n'(t_0)=x'(t_0),\ \cdots,\ \lim_{n\to\infty}x_n^{(m)}(t_0)=x^{(m)}(t_0)。$$

线性空间　在线性空间中，定义了元素 $x, y, z, \cdots$，与实数或复数 $\lambda, \mu, \cdots$ 的**乘法**，以及空间的任意两个元素的加法，即对每个数 λ 和空间的每个元素 x，唯一对应于空间的一个元素，记为 λx。类似地，对每对元素 (x, y)，唯一地对应于空间的元素 $x+y$。然而在具体情况下这些乘法和加法究竟是怎样的，则完全不须确定，它们只须满足下列条件：

在线性空间中乘法和加法的条件

(1) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$,　　(2) $1\cdot x=x$,

(3) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,　　(4) $x+y=y+x$,

(5) $(x+y)+z=x+(y+z)$,　　(6) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$。

(7) 存在零元素 0，恒有 $0\cdot x=0\cdot y=O$（乘实数 0）。再者，加法和乘法必须是**连续运算**，即它们必须满足下列附加条件：

(8) 从 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+y$。

(9) 从 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_nx_n)=\lambda x$。

满足所有这些公理的**例子**：

1．如果在 k 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^k$ 中定义乘法

$$\lambda x=\lambda(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)=(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots, \lambda\xi_k)$$

以及两个元素 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)$ 和 $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k)$ 的加法 $x+y=$

$(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_k+\eta_k)$，则成为一个线性空间，零元素是 $O=(0, 0, \cdots, 0)$。

2. 在次数不超过 m 的多项式空间中定义

$$\lambda x=\lambda\alpha_0+\lambda\alpha_1 t+\cdots+\lambda\alpha_m t^m$$

和 $$x+y=x(t)+y(t)=(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)t+\cdots+(\alpha_m+\beta_m)t^m。$$

零元素是多项式 $O=O(t)=0$。

距离和距离空间的概念　从三维几何空间中一点 P 到另一点 Q，有一确定的距离，若两点不相重合，则距离不等于 0。这个距离用连结 P, Q 的线段长 $|PQ|$ 来量度，当 $P\neq Q$ 时，$|PQ|>0$。P 和 Q 间的距离等于 Q 和 P 间的距离，即 $|PQ|=|QP|$。如果在过 P, Q 的直线外取第三个点 R，则得到 $\triangle PQR$。由初等几何中的定理可知，三角形的任意一边，比如 PQ，小于其余两边 PR 和 QR 之和，即 $|PQ|<|PR|+|QR|$，这个关系叫做*三角不等式*。形式 $|PQ|\leqslant|PR|+|QR|$ 无条件成立，甚至当 P, Q 和 R 落在同一条直线上而不构成一个真正三角形时也是成立的(见图 27-1)。

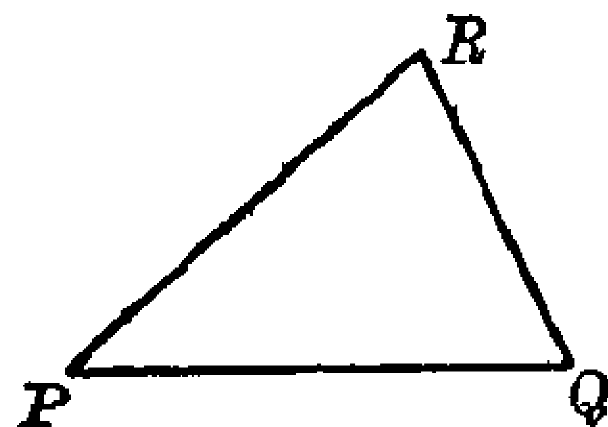


图 27-1　三角不等式

在分析中也经常需要度量*距离*，形象地讲，在所考虑的元素 $x, y, z, \cdots$ 之间，需要确定两个元素相隔的距离是“大”还是“小”。为了度量距离，必须定义*距离函数*或*距离*，即对任意两个元素 x, y，定义一个非负的实值函数 $d(x, y)$。

> **距离公理**：(1) $d(x, y)=d(y, x)$，(2) 当且仅当 $x=y$ 时，$d(x, y)=0$，(3) $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$（*三角不等式*）。

这里并没有给出距离函数的解析形式。定义了距离函数的空间叫做*距离空间*。在抽象空间中的极限过程 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ 定义为 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n)=0$。

在 k 维欧几里得空间中距离的例子：

1. $d(x, y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}(\xi_i-\eta_i)^2}$，这是解析几何中长度公式的推广。

2. $d(x, y)=\max\limits_{i=1,\cdots,k}|\xi_i-\eta_i|$。

3. $d(x, y)=\sum\limits_{i=1}^{k}|\xi_i-\eta_i|$。

对于这些距离中的每一个，均须证明满足这三条公理。除了在证明第

一个距离满足三角不等式时有点困难外，其余的证明都是十分容易的。

赋范空间　众所周知,每个复数 $\zeta=\xi+i\eta$ 都对应一个非负实数

$$|\zeta|=\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

作为 ζ 的绝对值或模。在有关函数、向量、距离的研究中,提出问题的形式经常要求将每个对象归结为一个非负实数,以作为它的"大小"的量度。这种与空间的元素 $x, y, \cdots$ 相关的数值量度如果具有下列性质就叫做范数,并记为 $\|x\|, \|y\|, \cdots$。

> 范数 $\|x\|$ 的性质：(1) 当 $x\neq O$ 时，$\|x\|>0$, $\|O\|=0$; (2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$，其中 λ 是任意实数或复数; (3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$（三角不等式）。

例如,复数的绝对值或模就具有这些性质。若空间的元素赋有范数,则称为赋范空间。

用两个元素 x, y 之差的范数定义距离函数 $d(x, y)=\|x-y\|$，就可以从范数导出距离。

在 k 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^k$ 中，下列范数具有所需的性质:

$$1.\ \|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2};\quad 2.\ \|x\|=\max_{i=1,\cdots,k}|\xi_i|;\quad 3.\ \|x\|=\sum_{i=1}^{k}|\xi_i|。$$

从这些范数,可以导出前面例子中 $\mathbf{R}^k$ 的距离。对于特定的空间，取哪一种范数定义是适用的,往往取决于研究的目的。

完备距离空间　如果距离空间 X 的元素序列 $x_1, x_2, \cdots$ 收敛于元素 x，则距离 $d(x_1, x), d(x_2, x), \cdots$ 趋向于0。由三角不等式，元素序列中任意两个元素 x_i, x_k 之间的距离 $d(x_i, x_k)$，当下标 i 和 k 无限增大时，也趋于0。它们构成柯西序列。

如果对任意的正数 ε,能找到一个下标 $n(\varepsilon)$,使对所有的 $i, k\geqslant n(\varepsilon)$,都有 $d(x_i, x_k)\leqslant\varepsilon$, 则称序列 $\{x_n\}$ 为柯西序列。

每个收敛序列是柯西序列，但柯西序列不一定收敛。如果对空间中任何柯西序列 $\{x_n\}$ 都能在这个空间中找到极限元素 x，则称这个空间是完备的。完备的赋范线性空间称为巴拿赫(Banach)空间，这是以巴拿赫(1892～1945年)的姓命名的，他是泛函分析的创始人之一。所有有限维空间,例如次数不超过 m 的多项式空间,都是完备的。空间 $L_2(a, b)$（参见希尔伯特空间）也是完备的。一般地,一个内积空间要成为希尔伯特空

间，须断定它是完备的。

希尔伯特空间　以希尔伯特的姓命名的希尔伯特空间是赋范线性空间的重要特例。对其中任意两个元素 x, y, 定义一个复值函数 (x, y)，叫做内积，具有以下性质（内积上的横线表示共轭复数）：

(1) $(x, y)=\overline{(y, x)}$;

(2) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$, 其中 λ 是任意复数；

(3) $(x, x)\geqslant 0$, 当且仅当 $x=0$ 时，等号成立；

(4) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$。

这个空间是赋范空间；范数是用内积定义的：$\|x\|=\sqrt{(x, x)}$。

希尔伯特空间的例子： 1. 复的 k 维空间 $\mathbf{C}^k$, 具有内积

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{k}\xi_i\bar{\eta}_i$$

及相应的范数 $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|\xi_i|^2}$ (ξ_i, η_i 是复数)。

2. 空间 $L_2(a, b)$，它的元素是定义在 $[a, b]$ 上的复值函数 $x(t)$，且 $\int_a^b|x(t)|^2dt$ 存在。由 $(x, y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$ 定义的内积具有所要求的性质。

泛函分析论证的例子　许瓦兹不等式的几个结果表明从泛函分析的概念能够获得某种洞察力。

在希尔伯特空间中，成立许瓦兹不等式 $|(x, y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$。

证明时，首先用第三条内积的性质，对任意复数 λ, 都有 $(x+\lambda y, x+\lambda y)\geqslant 0$, 再用其他性质得到

$$\begin{aligned}(x+\lambda y, x+\lambda y)&=(x, x+\lambda y)+\lambda(y, x+\lambda y)\\&=\overline{(x+\lambda y, x)}+\lambda\overline{(x+\lambda y, y)}\\&=\overline{(x, x)}+\lambda\overline{(y, x)}+\lambda\overline{(x, y)}+\lambda\bar{\lambda}\overline{(y, y)}\\&=(x, x)+\bar{\lambda}(x, y)+\lambda(y, x)+\lambda\bar{\lambda}(y, y)\geqslant 0。\end{aligned}$$

特别地，当 $\lambda=-\dfrac{(x, y)}{(y, y)}$ 时，此式也成立，因而得

$$\begin{aligned}&(x, x)-\overline{(x, y)}(x, y)/(y, y)-(x, y)(y, x)/(y, y)\\&\quad+(x, y)\overline{(x, y)}/(y, y)\geqslant 0。\end{aligned}$$

由此推出　$(x, y)(y, x)=(x, y)\overline{(x, y)}=|(x, y)|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$,

即为所求。

下面是这个一般结果的应用。当证明出定义在某个空间任意两个元素上的数值运算满足希尔伯特空间内积的条件后，就能从这个特定空间成立许瓦兹不等式，直接得到重要的关系，例如下表。

在空间 $\mathbf{R}^k$ 中有不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_i\eta_i\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^2}$$

在空间 $L_2(a, b)$ 中有不等式

$$\left|\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b|x(t)|^2dt}\cdot\sqrt{\int_a^b|y(t)|^2dt}$$

柯西、彭雅科夫斯基(Bunyakovski)、许瓦兹等人早就对个别的空间独立地发现了这些不等式及其他一些类似的公式。但引用泛函分析的概念后，这些分析的不同分支的共同的重要性质就一起被揭示、被解决了。

类似地，许多已经知道的关系可以作为泛函分析中定理的结果而非常容易地得到。例如，从**许瓦兹不等式**可以推出范数的三角不等式，这是因为 $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$，

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y, x+y)=(x, x)+(x, y)+(y, x)+(y, y)\\&\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2+|(x, y)|+|(y, x)|\\&\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

于是得证。

由此可以得到空间 $\mathbf{R}^k$ 和 $L_2(a, b)$ 中的柯西不等式和闵可夫斯基不等式，这些不等式也是以前就知道的。

柯西不等式　$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(\xi_i+\eta_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^2}$

闵可夫斯基不等式

$$\sqrt{\int_a^b|x(t)+y(t)|^2dt}\leqslant\sqrt{\int_a^b|x(t)|^2dt}+\sqrt{\int_a^b|y(t)|^2dt}$$

算子

借助于空间的概念只是使数学研究的对象在本质上被典型化，而算子则是描写在空间的元素上所能够施行的确定的数学运算。几乎每个数学运算，都能看作一个**对应，它由一个确定的运算法则所决定，并且将抽象空间 X 的每个元素 x 唯一地映照为空间 Y 内的一个元素 y**，空间 Y 可以与空间 X 相同，也可以不相同，这个对应也叫做 X 到 Y 内的映照。

对应法则叫做算子 $A, B, \cdots$ 或 F; 将对应关系写为形式 $y=Ax$ 或 $A(x)$（见图 27-2）。

实变量 x 的实函数 F 是特殊的算子，它们映照实数空间 $\mathbf{R}^1$ 或其子空间 X 到 $Y=\mathbf{R}^1$ 内。

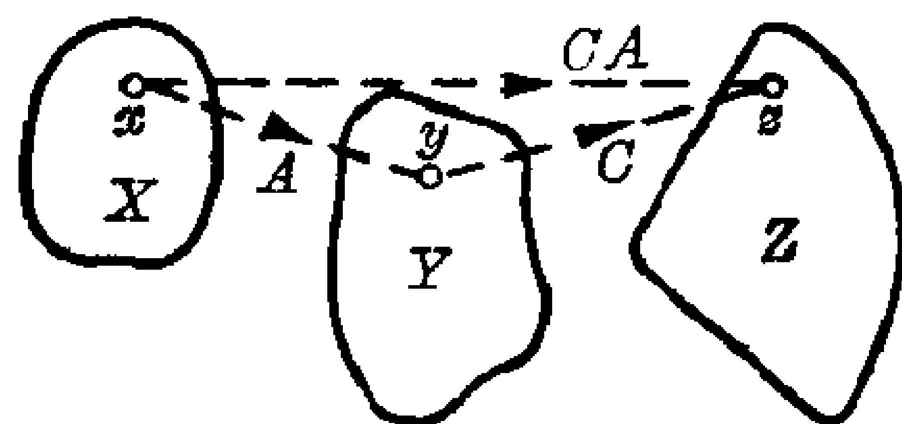


图 27-2　算子的图示；A 将 X 映照到 Y 内，C 将 Y 映照到 Z 内

对次数不超过 m 的多项式空间 X 中的每个多项式 $x(t)$，若令

$$y=Ax=x''(t)-3x'(t)-\alpha x^2(t),$$

则 $y=Ax$ 是从 X 到次数不超过 $2m$ 的多项式空间 Y 内的一个映照。

线性算子　就应用而言，线性算子是最重要的一类，它们由以下性质定义：(1) 对任意的数 λ，有 $A(\lambda x)=\lambda Ax$，(2) $A(x+y)=Ax+Ay$。例如，上面给出的算子在 $\alpha=0$ 时是线性的，否则就是非线性的。

算子的组合。如果 A 和 B 都是从 X 到 Y 内的映照，λ 是任意的数，则用乘积 λA 表示将 x 映照为 $\lambda(Ax)$ 的算子，于是 $(\lambda A)x=\lambda(Ax)$。另一方面，算子的和 $A+B$ 将 x 映照为 $Ax+Bx$，于是 $(A+B)x=Ax+Bx$。

最后，如果第三个算子 C 是空间 Y 到空间 Z 内的映照，那末算子 CA 将每个元素 x 映照为 Z 中的元素 $C(Ax)$，即在 x 上连续应用算子 A 和 C；并用公式 $(CA)x=C(Ax)$ 表示。

有界线性算子　设 A 为赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 内的映照，如果对 X 中所有 x，都有不等式

$$\|y\|=\|Ax\|\leqslant K\|x\|,\quad 其中\ K>0$$

成立，则称 A 为**有界的**。使不等式成立的最小数 K 叫做算子 A 的范数，并记为 $\|A\|$。在空间 Y 中的范数 $\|y\|$ 可以不同于空间 X 中的范数 $\|x\|$；下文不再一一说明。

【例】　设 X 是 $\mathbf{R}^3$，范数为 $\|x\|=\max|\xi_i|$。Y 是 $\mathbf{R}^2$，范数为 $\|y\|=\max|\eta_i|$，$i=1, 2$。对每个 $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，通过方程 $\eta_i=a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3$，$\eta_2=a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+a_{23}\xi_3$ 对应一个 $y=(\eta_1, \eta_2)$。这样定义的算子是有界的，因为

$$|\eta_i|\leqslant|a_{i1}|\cdot|\xi_1|+|a_{i2}|\cdot|\xi_2|+|a_{i3}|\cdot|\xi_3|\leqslant\sum_{k=1}^{3}|a_{ik}|\,\|x\|,$$

即

$$\|y\|=\max_{i=1,2}|\eta_i|\leqslant\left(\max_{i=1,2}\sum_{k=1}^{3}|a_{ik}|\right)\|x\|。$$

进一步计算可以证明 $\max_{i=1,2}\sum_{k=1}^{3}|a_{ik}|$ 正好是最小的数 K，因此就是 A 的范数。

根据上面给出的算子的加法、算子与数的乘法以及算子范数的定义，将空间 X 映照到 Y 内的*有界线性算子* $A, B, \cdots$ 全体组成一个赋范线性空间。建立这个空间对于泛函分析及泛函方法的应用具有不平常的意义。考察问题的范围如所希望的那样仍是封闭的：作为两个空间媒介物的算子似乎处在空间理论之外，然而它们自身却又归于空间的范畴。

泛函　在空间的各种映照中，*数值函数*占有独特的地位，它们是从空间到实数或复数集合内的映照，称为*泛函*。泛函分析由此而得名。

例如在赋范线性空间中的范数就是一个泛函。为简单起见，以下仅考虑赋范线性空间。

*线性泛函*更处于独特的地位。对于空间 X 的每个元素 $x, y, \cdots$，通过它确定一个实数或复数 $f(x), f(y), \cdots$，使得对于 X 中的所有元素 x, y 以及所有实数或复数 α，满足*线性条件*：$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f(\alpha x)=\alpha f(x)$。如果 f 的范数 $\|f\|$ 满足条件 $\|f\|=\sup_{x\in X}\left(\frac{|f(x)|}{\|x\|}\right)<\infty$（其中 $x\neq 0$），则称这个线性泛函是*有界的*或*连续的*。

定义在 X 上的连续线性泛函全体组成*对偶空间* X^*。若 X 是赋范线性空间，则 X^* 也是赋范线性空间。

泛函分析的一个重要问题是确定连续线性泛函的性质，用和式或积分来表示它们及其值 $f(x)$，$x\in X$，以及用对偶空间 X^* 的元素及其映照来描述原来空间 X 的集合和映照。从这些问题的观点来看，泛函分析可以说是几何学的进一步发展，即*线性几何学*。

连续线性泛函的理论在*线性算子方程*或积分方程的理论方面，在*近似积分法*的理论方面，在*广义函数*的理论方面以及在*不定乘子的拉格朗日方法*的理论等方面起着重要的作用。下面是一些关于特殊空间的结果的例子。

1. *在 $\mathbf{R}^k$，它的元素是由 k 个实数 x_i，$i=1, 2, \cdots, k$ 所决定：$x=(x_1, x_2, \cdots, x_k)$。对应于 $\mathbf{R}^k$ 上的每个线性泛函 f，必存在 k 个实数 $f_1, \cdots, f_k$，使在点 x 的泛函值能表示为形式 $f(x)=f_1\cdot x_1+f_2\cdot x_2+\cdots+f_kx_k$。*

这称为 f 借助于这个关系式的一个*表示*。反之，对应于任意 k 个实数 $f_1, \cdots, f_k$，用此式可以定义一个连续线性泛函。根据赋给 $\mathbf{R}^k$ 中元素

x 的不同范数(参见赋范空间),可以证明:

1. $\|f\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}f_i^2}$, 2. $\|f\|=\sum_{i=1}^{k}|f_i|$ 或 3. $\|f\|=\max_{i=1,\cdots,k}|f_i|$。

2. 在区间$[a,b]$上勒贝格(Lebesgue)平方可积的函数空间$L_2(a, b)$中,黎兹表示定理称:对应于每个连续线性泛函f,必存在唯一确定的函数$g\in L_2(a, b)$,使得泛函在$x\in L_2(a, b)$的值$f(x)$能表示为形式

$$f(x)=\int_a^b x(t)\overline{g(t)}dt=(x, g)。$$

更一般地,在每个(完备的)希尔伯特空间 X 中,泛函 $f(x)$ 的值能够表示为内积(x, g)。反之,任取元素 $g\in X$,可以定义一个连续线性泛函 $f(x)=(x, g)$。而且能够证明泛函 f 的范数 $\|f\|$ 就等于生成元素 g 的范数 $\|g\|$。

3. 次数不超过m的单变量多项式空间可以看作具有范数

$$\|x\|=\sum_{i=0}^{m}|x^{(i)}(t_0)|$$

的赋范线性空间。

对 X 上的线性泛函f,必能确定 f 关于多项式 $1, t, t^2, \cdots, t^m$ 的某组复数值 $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_m$, 且当多项式 x 具有形式

$$x(t)=x(t_0)+x'(t_0)t+\cdots+\frac{x^{(m)}(t_0)}{m!}t^m$$

时,有
$$f(x)=x(t_0)f_0+x'(t_0)f_1+\cdots+\frac{x^{(m)}(t_0)}{m!}f_m。$$

反之,对任意的一组数 $f_0, \cdots, f_m$, 根据这个关系式可以定义一个线性泛函,而且由于 $\|f\|=\max_{i=0,\cdots,m}(|f_i/i!|)$,它还是连续的。

4. **超平面**。在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中,一个三元 x_1, x_2, x_3 的线性方程确定一个子集,即平面。作为这种情况的推广,在线性空间中,满足方程 $f(x)=\alpha$ 的解的全体就叫做一个**超平面** H,其中 $f(x)$是连续线性泛函,α 是一个数。把元素 $y\in X$ 到超平面 H 的**距离**定义为所有距离 $\|y-x\|$, $x\in H$的下确界,即 $d(y, H)=\inf_{x\in H}\|y-x\|$。在立体几何中,是用距离的绝对值加以度量的,而距离表达式由海赛法线式给出。类似地,在一般的赋范线性空间 X 中,有 $d(y, H)=|f(y)-\alpha|/\|f\|$。若 X 还是完备的,则象三维空间一样,必存在某个元素 $x_0\in H$,距离 $\|y-x_0\|$ 正好等于元素 y 到超平面 H 的距离。

控制论的最优化问题经常归结为确定已知元素 y 到超平面的距离问题。

5. *相应于赋范线性空间中的一个元素 u，必存在一个范数为1的连续线性泛函 f，使得 $\|u\|=f(u)$。*

元素 u 的范数有时较难直接处理，但根据以上定理，可将它表示为一个线性泛函的值。例如，设 $x(t)=[\xi_1(t), \cdots, \xi_k(t)]$ 是具有实的可微分量 $\xi_i(t)$ 的 k 维向量值函数，其中 t 为实变量。又设 s 是自变量的另一个值，则可用自变量之差 $s-t$ 来给出范数 $\|x(t)-x(s)\|=\sum_{i=1}^{k}|\xi_i(t)-\xi_i(s)|$ 的上界估计。由上面的定理选取空间 $\mathbf{R}^k$ 的泛函 f，使得 $f(x(t)-x(s))=\|x(t)-x(s)\|$，且 $\|f\|=1$。即找出 k 个实数 $f_1, f_2, \cdots, f_k$，满足

$\|x(t)-x(s)\|=\sum_{i=1}^{k}f_i[\xi_i(t)-\xi_i(s)]$ 以及 $\max_{i=1,\cdots,k}|f_i|=1$。现取 $\varphi(t)=\sum_{i=1}^{k}f_i\cdot\xi_i(t)$，应用微分学第一中值定理，可得

$$\|x(t)-x(s)\|=|\varphi(t)-\varphi(s)|=|\varphi'(\tau)\cdot(t-s)|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|\xi_i'(\tau)|\cdot|t-s|,$$

其中 τ 为 s 与 t 之间的某个点。

6. *泛函的扩张。* 有时一个连续线性泛函仅定义在一个线性子空间上，因此产生这样一个问题，就是使泛函在空间的其余部分也有定义，而且保持线性和连续性，如果可能的话，还可保持范数不变。有关这种扩张的定理已由汉恩(Hahn)、巴拿赫、克来因和路特曼(Rutman)证明。

泛函分析方法在近似理论中的应用

*近似理论*是关于各种类型的方程，例如微分方程或积分方程寻求近似解的方法问题。在这些方程的抽象模式下，往往已给出将完备赋范空间 X 中的元素 x 变为赋范空间 Y 中的元素 y 的算子 A，而要寻求 X 中的元素 x^*，A 将其变为 Y 的零元素 O。因此适合 $A(x^*)=O$。在许多情形下确定 x^* 时，采用逐次逼近的*迭代过程*。将方程 $Ax=O$ 改写为等价形式 $x=B(x)$，适当选取第一个近似点 x_0，然后得到以后的近似点 $x_1=B(x_0)$，$x_2=B(x_1)$，$x_3=B(x_2)$，$\cdots$，$x_n=B(x_{n-1})$，$\cdots$，巴拿赫不动点原理可以作为判断序列 $\{x_n\}$ 是否收敛于 x^* 的准则。

巴拿赫不动点原理：*若 B 是巴拿赫空间的子集 M 到自身的映照，且对所有元素 $x, y\in M$，满足李普希茨条件 $\|B(x)-B(y)\|\leqslant L\|x-y\|$，其*

中李普希茨常数 $L<1$，则对每个任意的初始近似点 $x_0\in M$，近似点列 $x_1=B(x_0)$，$x_2=B(x_1)$，$\cdots$，$x_n=B(x_{n-1})$，$\cdots$收敛于方程 $x=B(x)$ 的唯一解 $x^*\in M$，且由下式给出误差估计：

$$\|x^*-x_n\|\leqslant[L/(1-L)]\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant[L^n(1-L)]\|x_1-x_0\|。$$

【例1】　设 $X=Y$ 是实数集，$A(x)\equiv x-\sin x-1$，$B(x)=\sin x+1$，子集 M 是区间 $\pi/2\leqslant x\leqslant 2$。$B$ 将 M 映照到区间 $2\geqslant x\geqslant 1+\sin 2(>\pi/2)$ 上，对所有的 x，$y\in M$，满足李普希茨条件 $|B(x)-B(y)|=|\sin x-\sin y|\leqslant L|x-y|$，其中 $L=|\cos 2|$。从 $x_0=\pi/2\approx 1.571$ 出发，得到 $x_1=2$，$x_2=\sin 2+1=1.909$，$\cdots$，误差估计为 $|x^*-x_2|\leqslant 0.066$，精确到三位小数的精确解是 $x^*=1.935\cdots$。

【例2】　设 $X=Y=L_2(0,1)$，

$$[A(x)](s)=x(s)-(1/2)\int_0^1\frac{x(t)}{1+s+t}\,dt-2$$

$(=0$，当 $0\leqslant s\leqslant 1$ 时$)$，

$$[B(x)](s)=1/2\int_0^1\frac{x(t)}{1+s+t}\,dt+2,$$

$M=L_2(0,1)$。B 将平方可积函数映照为平方可积函数。对所有的 x，$y\in L_2(0,1)$，有

$$\|B(x)-B(y)\|^2=\int_0^2\left|\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x(t)-y(t)}{1+s+t}\,dt\right|^2ds\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1|x(t)-y(t)|^2\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\|x-y\|^2。$$

因此满足巴拿赫不动点原理的条件，其中 $L=1/2$。取适当的初始函数 $x_0(s)=0$，于是得到近似序列 $x_1(s)=2$，$x_2(s)=\ln[(2+s)/(1+s)]+2$，$\cdots$，对函数 x_2 给出误差估计 $\|x^*-x_2\|=\left(\int_0^1|\ln[(2+s)/(1+s)]|^2ds\right)^{1/2}=0.48$。精确解 $x^*(s)$ 是不知道的。

由上可见，泛函分析的方法即使对每天在工程实践中产生的数值问题，也有巨大的价值。

第28章 几何基础——欧几里得几何和非欧几何

欧几里得几何是最古老的、历史上最重要的演绎科学学科。直到今天，它仍是精密科学的典型，并成为几何学基础系统发展的出发点。随着十九世纪发现非欧几何，这一发展进程出现了转折，并在希尔伯特的研究中达到了它的顶峰，它现在涉及着广阔的研究范围。

几何基础

欧几里得几何原本 在*几何原本*一书中，亚历山大城的欧几里得(公元前365～300年)给出了他那个时代数学知识的概要。其中包括关于*数论*的命题，例如，欧几里得算法和存在无限多质数的证明，包括正多面体理论的*立体几何*，还有与不可公度量的讨论一起的*比例和相似理论*，以及*平面几何*问题。这本著作的重要性在于其中几何定理——根据现代的知识，它具有某些局限——的证明不依靠现实世界，而完全依靠从一个公理系出发的*逻辑推理*。

亚里斯多德(Aristotle, 约公元前384～322年)将*公理*看作自明的陈述，它直接从经验产生，而且只包含那些意义无可怀疑的概念。为此，欧几里得为基本概念下了*定义*。例如，*点是没有大小的*。但是在以后的推理中，这些定义并没有用处。

一直到十九世纪，人们才发现欧几里得暗中用了序的性质而没有将它列为公理。欧几里得公理系的这种不完全性由希尔伯特在他1899年的著作*几何基础*中消除了。那本书同时回答了新的、基础性的科学问题。根据*希尔伯特公理学说*，关于基本概念的本质或它们与现实对象的关系等问题不属于有关的数学理论，而属于它的*元理论*。公理只规定基本概念之间的某些关系。欧几里得的许多定理基本上象公理一样容易证实；这样，从现代的思想方法来说，使用特殊的公理展开只是使理论系统地发展方便一些。

平行公理　欧几里得自己关于这个公理(或如他所称为公设)的叙述已经使它看来比其他公理缺少自明性。

欧几里得平行公理：如果一条直线与另外两条直线相交，使得在这直线的一侧的同旁内角和小于两直角，那末这两条直线适当延长后必在这一侧相交(见图 28-1)。

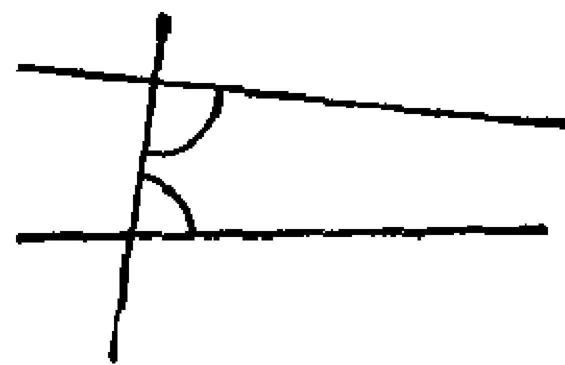


图 28-1　欧几里得的平行公设

因此有一系列显然自明的陈述导致这个公理的错误的“证明”。其中大多数陈述是和这个公理等价的。

等价于平行公设的论述：

1．波塞多留斯(**Poseidonius**，约公元前 135~51 年)：两条平行线是等距的。2．波罗克拉斯(**Proclus**，约公元 500 年)：如果一条直线与两条平行线之一相交，那末它也和另一条相交。3．萨谢利(**Saccheri**，约 1700 年)：三角形的内角之和是两直角。4．勒让德：通过不是平角的角的内部一点的直线至少与这个角的一边相交(见图 28-2)。5．F．波利埃：通过任何三个不共线的点有一个圆。

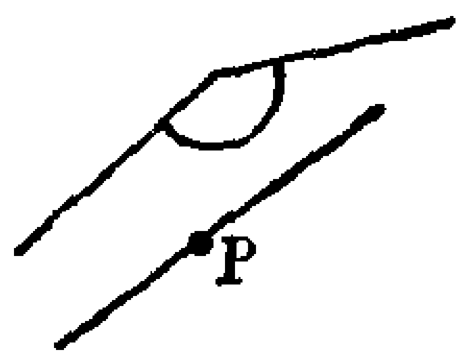


图 28-2　勒让德的论述

当高斯、罗巴切夫斯基(Lobachevskii，1792~1856 年)和 J．波利埃彼此独立地建立一种平行公设不成立的几何时，这个公理的重要性就很明显了，而且为几何公理以及一般公理系的现代解释奠定了基础。这种非欧几何显示出与欧几里得几何有类似的高度和谐和一致性。罗巴切夫斯基去世十年以后，贝尔塔拉米(Beltrami)成功地在一个曲面上发现了这种几何基本部分的第一个实现，以后克来因将欧几里得几何和非欧几何都安置于射影几何的这个较大的框架之中。

欧几里得几何的公理特征　欧几里得几何是一种*范畴理论*，其中每一个陈述或者是正确的，或者是不可证明的，意即假设它为真将会导致矛盾。另一方面，它直觉地和直接经验有关，许多定理是用直尺、圆规以及类似工具实验的结果。这种完全凭经验的方面随着解析几何重要性的增长而削弱。在解析几何里，欧几里得平面和实数对的集合是一致的。希尔伯特圆满地阐明了这种联系，并且证明了他的公理系是范畴的：也就是说这个公理系的任何两个模型是同构的；同构类型是实数域上的欧几里得平面模型。希尔伯特在将他的公理解释扩张到其他数系时，利用本质上是戴德金的发现为基础的实数的一个公理特征，证明了表示欧几里

得几何特征的公理系是*完备的*。

关于欧几里得平面的希尔伯特公理系统的基本概念是*点*、*直线*，点和直线间的*关联*关系，三个点的*介于*关系以及*线段和角的合同*。公理分四部分：A. *关联公理*，B. *顺序公理*，C. *合同公理*，D. *连续公理*，在每一部分中要用到前几部分的概念。对于立体几何，必须进一步引入*平面*的概念，而且公理也须补充。范畴的公理系的概念由于塔斯基(Tarski)在欧几里得几何的*完备性*和*可判定性*方面的结果而大大加深了，即若将它看作一种不出现或者至少在原则上可以避免变量的*初等理论*。除了某些与连续有关的问题，这是可以实现的。完全的戴德金连续公理已经被一个连续格式代替，它只要求那些可以用基本几何概念定义的直线的*戴德金分割点*的交存在(参看 II，第2章)。塔斯基的结果是：初等几何的每个陈述可以用这些公理通过形式逻辑予以证明或反驳，而且总存在一种规则，可借以确定一个已知命题是否能从公理系出发予以证明，因而判定其正确与错误。这种可在机器上实现的规则系统还有实际的用处，因为有许多初等几何的不平凡问题，象嵌装花纹问题或将多边形分解为较简单的多边形的问题，现在可以用机器解决了。正如用解析几何的方法可以将初等几何的可判定性化为实数算术的可判定性那样，对于其他几何理论，例如非欧(双曲)几何的可判定性也被解决了。

由于欧几里得几何的基本概念和公理的挑选是相当随意的，又由于方便，甚至还有个人爱好的问题，所以产生了希尔伯特的选择能否简化的问题。

表示三个点的*共线*的三元关系 $\mathrm{col}(A, B, C)$ 的直观意思是 A, B 和 C 在同一直线上。如果用这种三元关系来表示*直线*和*关联*的概念，那末平行公理可以重述如下。

用共线表示的平行公理：如果 A, B 和 P 是不共线的不同的点，那末存在点 Q，使得对于任何点 R，$\mathrm{col}(A, B, R)$ 和 $\mathrm{col}(A, Q, R)$ 不能同时成立；而且，如果 Q' 是另一个这样的点，那末 $\mathrm{col}(P、Q、Q')$ 成立。

共线本身容易化归为介于关系，因为当且仅当三点之一落在其他两个点之间时，三个点显然是共线。要用共线性表示介于关系就稍微困难些。*度量关系*也可以简化；事实上，希尔伯特的所有基本概念可以用单一的三元关系 $\mathrm{cir}(A, B, C)$ 来建立，$\mathrm{cir}(A, B; C)$ 的意思是 A, B 到 C 等距离。另一方面可以证明，欧几里得几何不能以点的二元关系为基础。

以运动为基础的平面几何公理系　以运动的概念为基础的欧几里得几何的群论基础不同于平面几何中与希尔伯特公理系或多或少紧密相关的其他公理系，在那里，合同公理用有关运动的陈述来代替。在证明合同命题时使用许多元理论的陈述。基本概念是**点**、**直线**（作为一个特定的点集）、**介于**和**运动**。**关联公理**和**介于公理**保留下来了，而合同公理用有关**运动群性质**的陈述所代替。在下面的公理系中，如果略去平行公理，就导致**绝对几何**，如果代以它的否命题就导致非欧几何。记号 $P|l$ 表示点 P 和直线 l 是关联的，换句话说："l 通过 P"，"P 在 l 上"或"l 含有 P"。

关联公理：$\mathbf{I}_1$. 过任何两点，恰好有一条直线；每条直线至少含有两个点。$\mathbf{I}_2$. 所有的点不在一条直线上。$\mathbf{I}_3$. 平行公设：对于任何直线 l 和不在 l 上的任何点 P，恰有一条直线通过 P 且与 l 没有公共点。

介于公理：$\mathbf{B}_1$. 如果 R 在 P 和 Q 之间，那末 R 也在 Q 和 P 之间，而且 P, Q, R 是同一条直线上不同的点（见图 28-3）。$\mathbf{B}_2$. 一条直线上的三个不同的点中，恰有一个点在另外两个点之间。$\mathbf{B}_3$. 如果 R 在 P 和 Q 之间，且 Q 在 P 和 S 之间，那末 R 在 P 和 S 之间（见图 28-3）。$\mathbf{B}_4$. 如果 P, Q 和 R 不共线，又如果直线 l 与 PQ 相交于 P 和 Q 之间的一点 Z_1，那末 l 含有 R，或含有介于 R 和 P 之间或介于 R 和 Q 之间的一个点 S（见图 28-4）。



图 28-3　介于公理 B_1 和 B_3

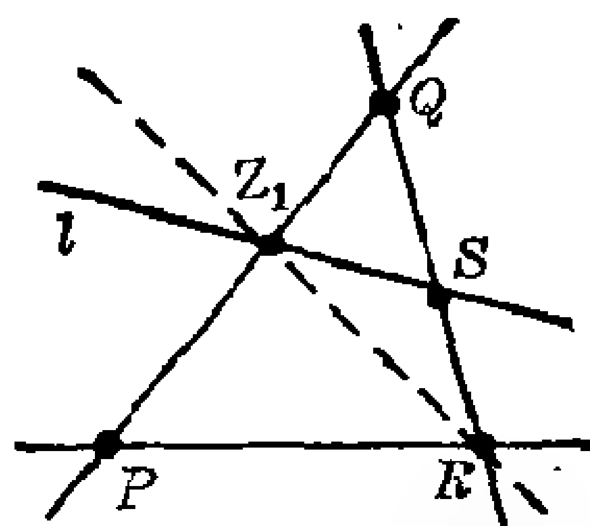


图 28-4　介于公理 B_4

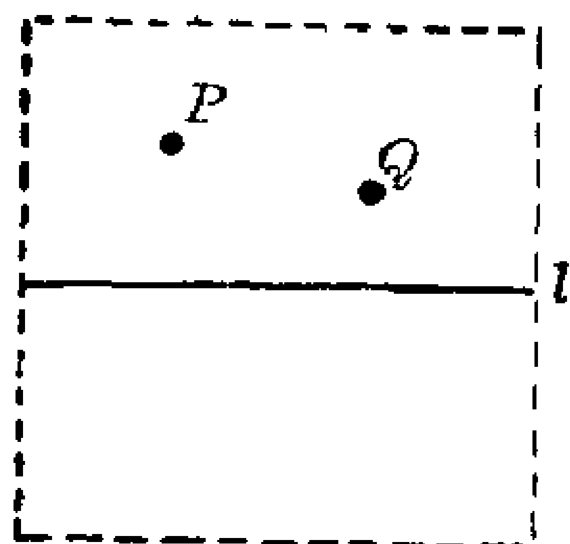


图 28-5　以 l 为边的半平面

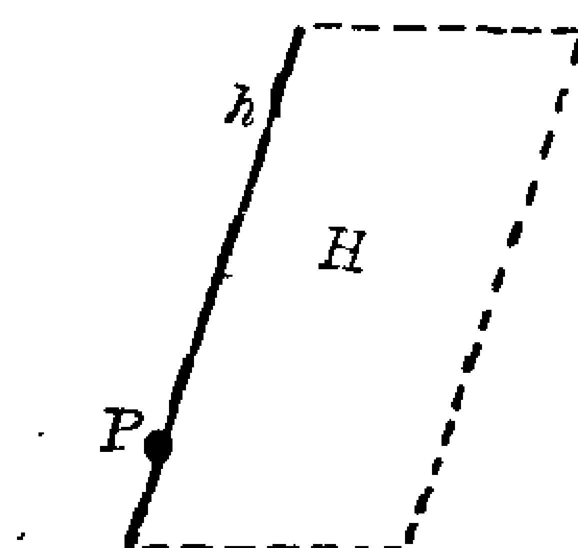


图 28-6　由三元组(P, h, H)确定的标形

定义: D_1. 如果P, Q, $O|l$, 且O不在P和Q之间, 称P和Q相对于直线l*在点O的同侧*。对于给定的l和$O|l$, 这种关系的两个等价类称为l的以O为顶点的两条*半直线*。D_2. 如果P, $Q \nmid l$, 而且在P和Q之间没有l的点,则P, Q *在直线l的同侧*。对于给定的直线l, 这种关系的两个等价类称为以l为边的*半平面*(见图28-5)。D_3. 由一个半平面H、它的边上的一条半直线h和h的顶点P组成的三元组(P, h, H)称为一个*标形*(见图28-6)。D_4. 平面的*自同构*是平面到自身的一个双方单值的映射α, 使得当且仅当R^α在P^α和Q^α之间时,点R在点P和Q之间。

容易证明,在序自同构下,直线、半直线和半平面分别被映射为直线、半直线和半平面。特别地,标形也映射为标形。有些自同构被称为*运动*,它们需要满足下列公理。

运动公理: **M_1. 如果α和β是运动,那末它们的组合$\alpha\cdot\beta$(先α, 然后β)也是运动。M_2. 恒同映射1是运动。M_3. 如果F和F'是两个标形, 那末恰好存在一个运动把F带到F'。M_4. 对于任何两个点P和Q,存在一个运动使它们互换;对于任何两条具有公共顶点的半直线,存在一个运动使它们互换。**

这些公理的一个推论是运动构成一个*群*, 特别地, 如果α是一个运动, 那末α^{-1}也是; 因为如果α将任意一个标形F映射到F', 那末根据M_3, 存在运动β把F'映射到F。映射$\gamma=\alpha\cdot\beta$把F映射到自身。这样, γ必须是恒同的, 因为否则$\gamma^2\neq\gamma$将是把F映射到自身的第二个运动。另一个推论是: 运动由三个不共线的点和它们的象唯一确定。

合同和反射的定义: D_5. 如果存在一个运动把P带到P', 把Q带到Q', 则称点对P, Q为*合同于*另一对点P', Q'。D_6. 恰好使一条直线上的点固定的运动称为(对于这条直线的)*反射*。反射ρ是对合, 即$\rho\neq 1$, $\rho^2=1$。

*反射的主定理*说, 对于具有公共点或公共垂线的直线的三个反射之积仍是一个反射(见图28-7)。这个定理和另外一些陈述不用平行公设就可以证明, 所以在非欧几何中也是正确的。对于避免使用平行公设的

证明，引入反射计算法是特别方便的。为取代前面引入的一部分群论化的概念体系，可以完全从反射系 Γ 出发进行讨论，而 Γ 看作由群（运动群）的对合所组成的生成集。直线被认为是和 Γ 的元素同一的，所以 Γ 的元素也称为直线。点是那样两条直线 l 和 m 的乘积 $l\cdot m$，它仍然是对合的，即 $(l\cdot m)\cdot(l\cdot m)=1$。这等价于 $l\cdot m=m\cdot l$。这样，直观地，点可以和对于它的反射同一。如果 $P\cdot l=l\cdot P$，点 P 和直线 l 是关联的。当所有基本概念用同样方法定义时，几何定理就简单地成为由 Γ 生成的群的计算规则。除了经典的解析几何，这种反射计算法又表明了一种将几何改变为代数的新方法。

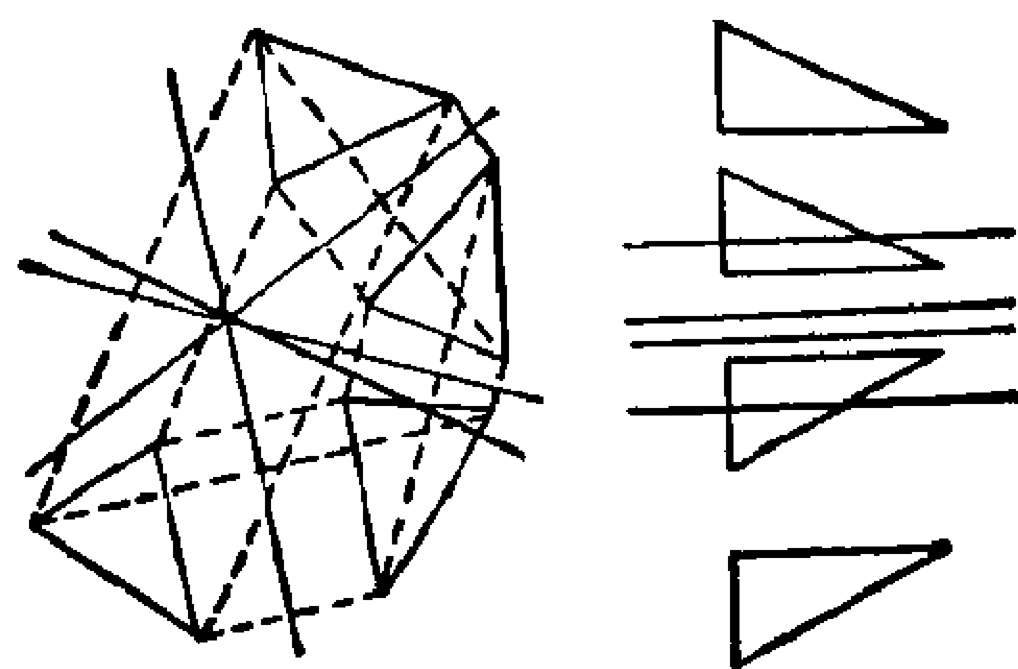


图 28-7　三个接连的反射，它们的轴通过一个公共点或有一条公垂线，合起来是一个反射

坐标的引入　除了给一种几何的单个模型以完全的公理化特征以外，在一类几何命题的模型和它们的代数特征之间的联系也是重要的。这类问题导致下列的课题：由模型论和映射论出发，为保证某些标准程序的存在性，最少需要那些公理。例如，坐标的引入就是这样。为处理这类问题已经创立的理论具有几何的术语，但在这些理论的方法论的展开中，更类似于群论或格论；例如向量空间的理论或仿射或射影平面的理论。

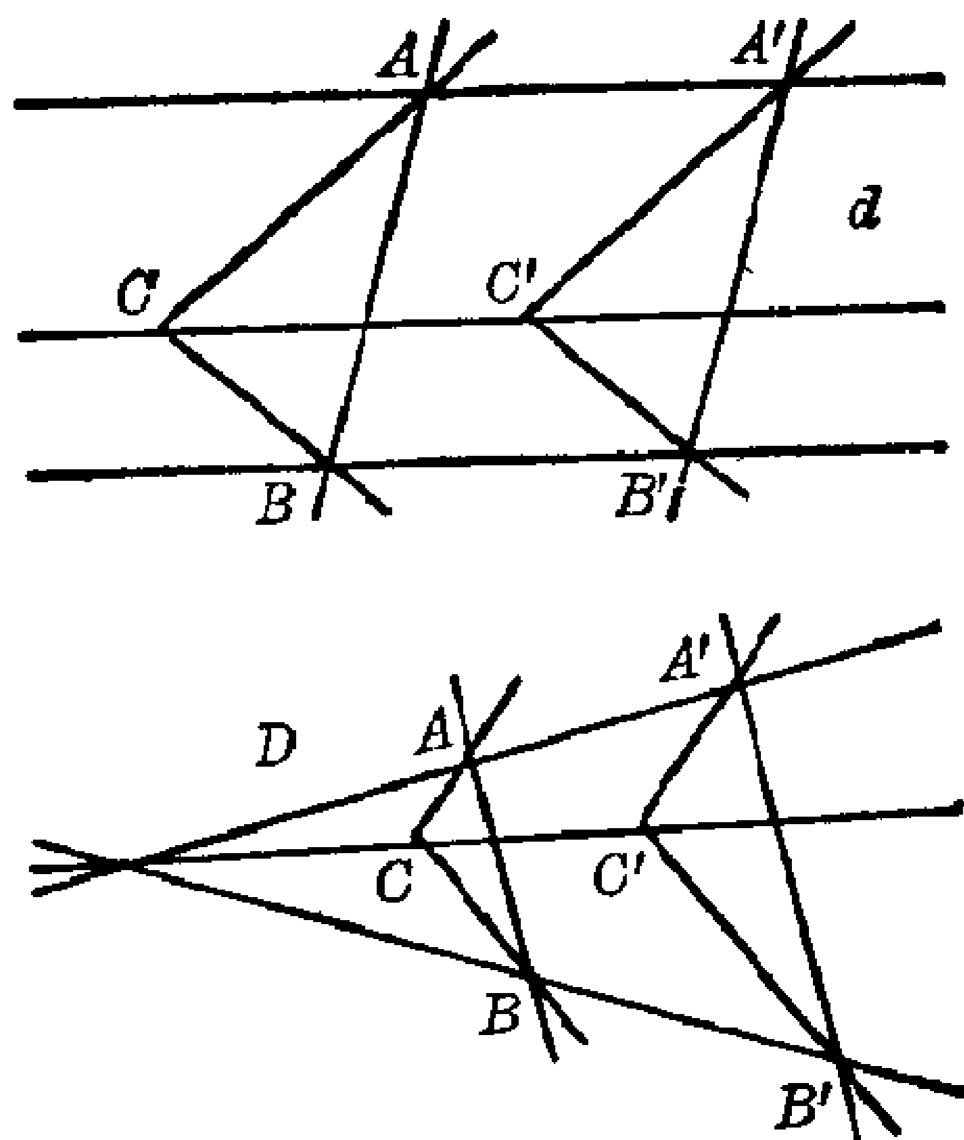


图 28-8　笛沙格定理 D 和 d

公理 $\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2$ 和 I_3 的模型构成仿射平面族，它们还没有完全分类。平移平面是根据这样的事实从中区分出来的：对于任何两个点，至少存在一个平移或平行移动，把一个点带到另一点。它们还需要满足笛沙格小定理 d。

笛沙格小定理 d：如果两个三角形的对应顶点对落在平行直线上，而且两对对应边平行，那末第三对对应边也平行（见图 28-8）。

可以证明，平移平面 T 的平移全体构成体 K（T 的标量场）上的一个向量空间，它在 K 上是偶数维或无限维的。定义标量的最好方法是作为平移群的特殊线性映射。

如果平面 T 是笛沙格平面，即如果笛沙格大定理 D 成立，平移的向量空间的维数恰好是 2。

笛沙格定理 D：如果通过一对三角形的对应顶点的直线交于一点，而且两对对应边平行，那末第三对对应边也平行（见图 28-9）。

论述 D 只是为了证明对于所有 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{T}$，其中 $\boldsymbol{a} \neq 0$，$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$，至少存在向量群的一个线性映射 α 把 $\boldsymbol{a}$ 映到 $\boldsymbol{b}$。这样，如果选定原点 O 以及过 O 的两条坐标轴 l 和 m，任何点 P 可以用它的位置向量唯一表示，而且这个向量可以分解为它的关于 l 和 m 的分量。显然，如果将体（标量）的元素与直线上的向量联系起来，从而与直线上的点联系起来，我们便得到线上的点的坐标。如果在直线上选取任意向量 $\boldsymbol{e} \neq 0$，那末每个平行向量 $\boldsymbol{a}$ 就和使 $\boldsymbol{e}$ 带到 $\boldsymbol{a}$ 的标量联系。

命题 d 和 D 是**封闭定理**的例子。另一对封闭定理是帕普斯定理 P 和 p，P 的成立是关于标量体 K 为可换的充要条件。

帕普斯大定理 P：如果一个闭六角形的顶点相间位于两条直线 l_1 和 l_2 上，其中没有一个顶点同时在这两条直线上，又如果两对对边是平行的，那末第三对对边也是平行的（见图 28-9）。帕普斯小定理 p 为同样的陈述再加上 l_1 和 l_2 平行的条件。

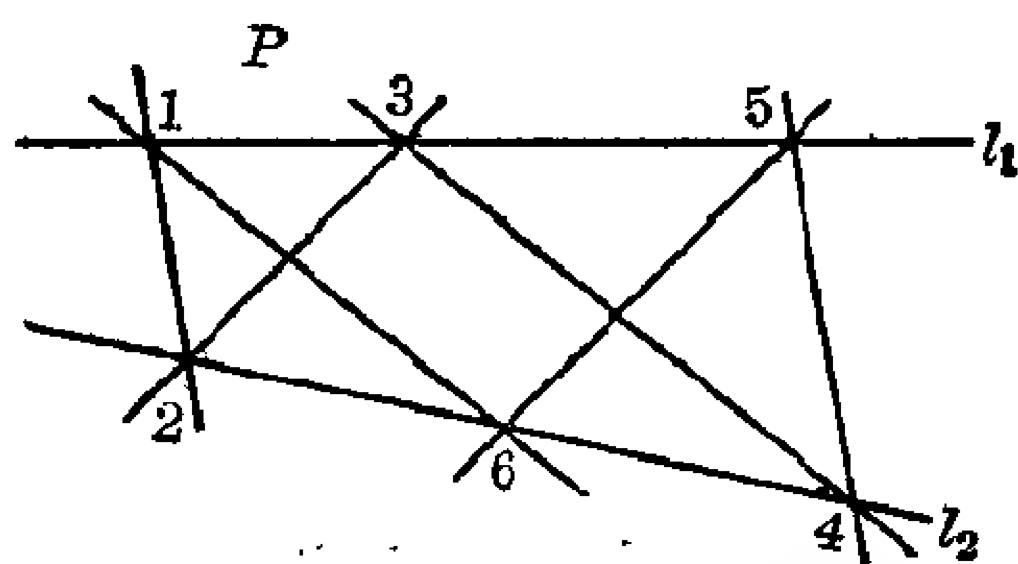


图 28-9　帕普斯定理 P

如果关联公理成立，那末这些封闭定理按照次序 $P \to D \to d \to p$ 逻辑地一个依赖于另一个。最后一个箭头能否颠倒，这是一个悬而未决的问题；前三个是不能颠倒的。然而，对于**有限仿射平面**有 $P \Leftrightarrow D$，因为根据韦德伯恩（Wedderburn）定理，每个有限体是可换的。这个事实的几何证明还没有发现。

非欧几何

欧几里得几何、非欧几何和射影几何之间的联系是在 1860 年前后由凯莱发现的，并且在以后的十年间为克来因进一步发展了。他认为凯莱的陈述："射影几何是全部几何"是正确的。

射影几何可以用关联公理、顺序公理和连续公理来描述，它和欧几里得几何公理的差别主要有以下几点：任何两直线都相交；介于公理被两对点偶的四元分离公理所代替，因为射影直线总认为是封闭的。

从射影几何到欧几里得几何或非欧几何的转变是通过引入平行和垂直的概念实现的。

两条直线或两个平面称为平行的，如果它们相交于空间的非正常平面或理想平面上。这样，在欧几里得几何中，通过不在给定直线上的点只有一条平行直线，因为通过这个点和在给定直线上的非正常点只有一条直线。如果**绝对配极**，即没有基本曲线的配极，是从非正常平面中诱导出来的，就可以定义欧几里得空间的正交性。

任何一个集合可以代替平面而被称为是非正常的，例如，射影空间中的二次曲面，它将空间划分成这个曲面(例如球面或椭球面)的内部和外部。以特定的二次曲面为非正常曲面所作的整个空间的配极确定了曲面内部的直线和平面的"正交性"：如果一条直线通过一个平面的极点，则它是垂直于这个平面的。进一步还可看到，在基本曲面内部的那部分平面上，通过给定直线外的一点有许多平行线。用这种方法就得到了**双曲几何**，它是由高斯、波利埃和罗巴切夫斯基发现的。

如果在射影空间中没有特定的曲面，而正交性是由整个空间的没有基本曲面的配极所确定，那末所得的非欧几何是**椭圆几何**，它是由 B. 黎曼首先研究的。

双曲几何 平面双曲几何是最容易获得的，只要在欧氏几何的公理系中用下列公理代替平行公理：对于任何给定的直线和直线外的任何点，至少存在两条直线，通过这个点，而和给定的直线不相交。

为了取得这种几何的模型，用关于基本曲线的配极定义正交性(参看 II. 第 12 章)。在平面的情况下，可选圆作为基本曲线(见图 28-10)。圆周上的点作为这个模型的非正常点。内部的点和弦是双曲几何的真正的点和直线(以后它们称为 h 点和 h 直线)。容易验证 h 点和 h 直线满足除平行公设以外的关联公理和顺序公理。例如，给定一条 h 直线 PQ 和 h 点 R，RU 和 RV 都"平行" PQ(U 和 V 不是 h 点)，而且还有 h 直线 a, b, c 也"平行" PQ。为定义 h 正交性，可取欧几里得平面中以这个圆作为基本曲线的配极。h 直线 STh 正交于 h 直线 $P'Q'$，如果欧几里得直线 $P'Q'$ 的极点 A 落在欧几里得直线 ST 上，而欧几里得直线 ST 的极点 B 落在欧

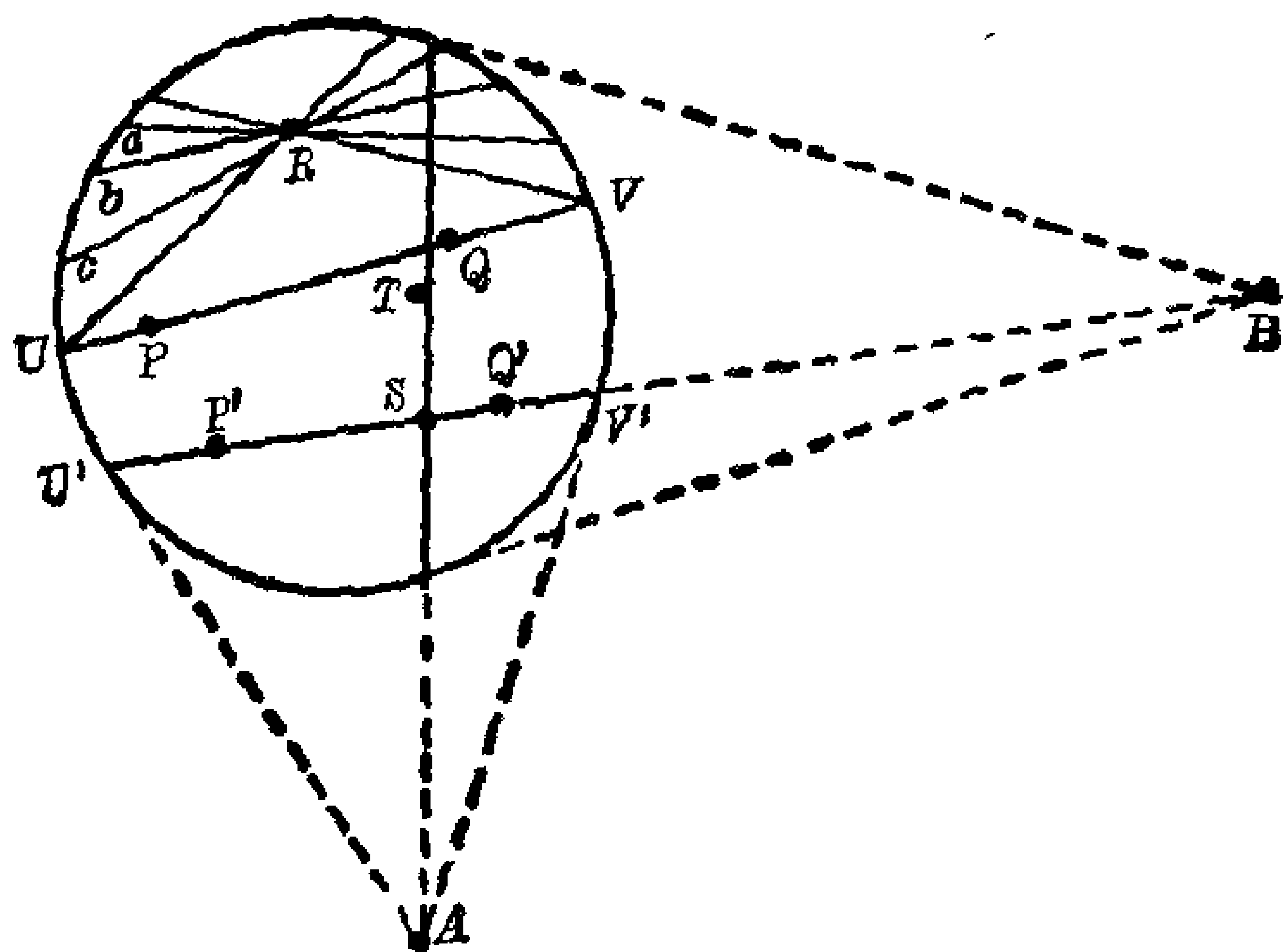


图28-10　双曲几何的模型

几里得直线 $P'Q'$ 上。由于欧几里得直线 $P'Q'$ 上任何点的极线都通过 A，所以为了向 $P'Q'$ 作 h 垂线或在 S 上作 h 垂线，只要通过 T 和 A 或 S 和 A 引一条直线就可以了。h 合同定义如下：两条 h 线段 PQ 和 $P'Q'$ 称为 h 合同的，如果由它们和基本圆的交点所形成的交比的对数绝对值相等，即如果 $|\ln D(P, Q; U, V)| = |\ln D(P', Q'; U', V')|$，则 PQ h 合同于 $P'Q'$。当有连续性的时候，这个定义也决定了应用 h 合同线段的方法。在这个基础上建立了关于 h 角的 h 合同以后，可以证明 h 三角形的三个角之和小于两直角；也可以证明：如果两个 h 三角形的三个 h 角是一致的，这两个三角形是 h 合同的。

上述论证给出了构成双曲几何基础的变换群的基本知识。根据克来因的说法，问题是：在怎样的变换群下，刚才定义的概念不变？为了回答这个问题，再次将模型解释为欧几里得平面的对象。首先，有关的映射显然必须是直射变换，它将这个圆和它的内部对应到它们自身。这种映射的例子有绕圆心的旋转和关于直径的反射；但是移动或者扩张和收缩都被排除了。这样，前述的直射变换形成群。这只要注意到这个群的映射保留线段和角的合同就够了。线段合同的不变性正是由于它是用交比 D 定义的，因为配极是被保留的，一对正交的直线变为另一对正交的直线，用圆的这些自守直射变换，我们就有了这个模型的合同群。

椭圆几何　这种几何不能象双曲几何那样，从欧几里得几何通过略去或修改一条公理这种简单的方法获得。因为从平面欧几里得几何的关

联公理、顺序公理和合同公理可以导出，对于任何直线，存在另一条直线和它不相交。因此，这些公理组必须改变；特别地，任何两条直线总是相交的。椭圆几何基本上和球面几何一致。我们将球面作为椭圆平面，el 直线是球面的大圆，而 el 点是球面的一对对径点(见图 28-11)。

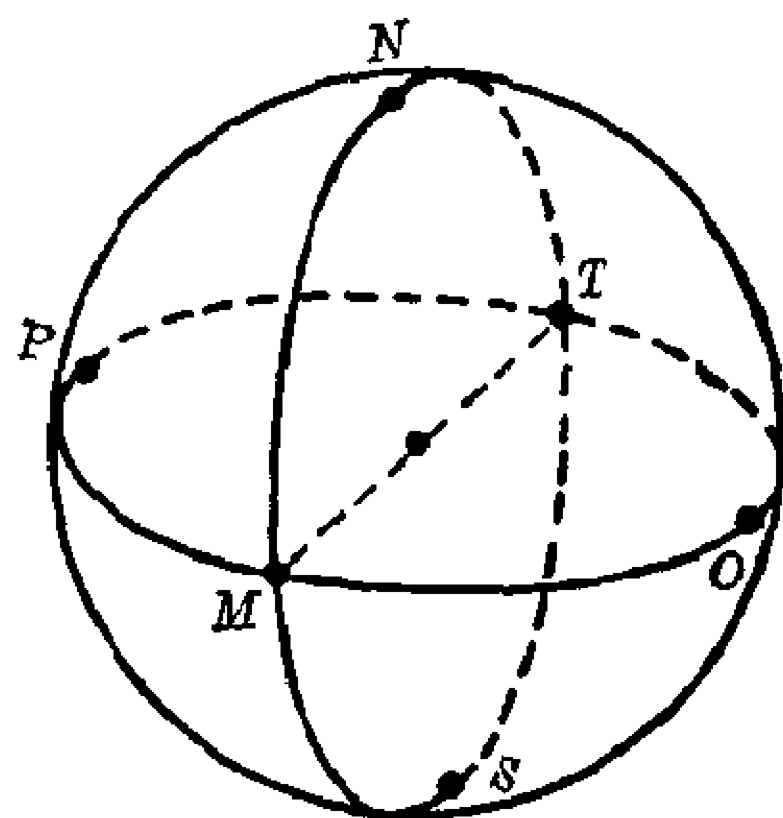


图 28-11 椭圆几何的模型

两条 el 直线总有一个公共的 el 点，因为球面上的任何两个大圆相交于两个对径点。el 点(N, S)和(M, T)决定唯一的 el 直线，就是($NMST$)，但是从 el 点(N, S)到 el 直线($MOTP$)可以引无限多 el 垂线。如果取连结两点的大圆上较短的弧长作为两点之间的距离，那末在椭圆几何中，最大的距离是 $\frac{\pi}{2}$。el 三角形的内角和总是大于两直角。

在 II. 第 4 章中已经证明，球绕它中心的旋转构成群。现在这个球面变换群是椭圆平面几何的合同变换群。

第29章 数学基础

上世纪末，数学基础跟数理逻辑一起开始了它们的近代发展。至今这两个领域仍然紧密联系着。

数学基础或"元数学"的问题，包括着从特殊数学学科的科学研究，直到关于数学命题和数学知识的性质的哲学问题等广泛范围的题目。只要问题的性质允许，有关重要问题的分析和澄清是按照通常数学问题的成功处理所需要的同样精确和严格来进行的。当然，在这里数学工具不能老是无保留地加以使用，因为所讨论的问题常常要求把这些工具本身的基础搞清楚。下面的介绍只能给出这类问题的最初步的引导，而且只能考虑某些观点。对数学基础问题特别有兴趣的读者，可参考莫斯托夫斯基(Andrzej Mostowskii)的综合报告"基础研究的三十年"，文章发表在Acta philosophica Fennica (Fasc. XVII, 1965)。

可以断言，元数学给出了一个特殊科学学科的最先进的科学学。这是基于下列事实：数学较之其他科学，在早期发展阶段就面临着对其基础作出批判性分析的问题。这主要是由于对具体事物的高度抽象，以及由此产生的对数学定义和演绎推理的精确性要求。一个反映客观现实某些属性的数学理论的概念，几乎总是在集合论基础上的某种理想化或抽象化，尽管这些抽象概念的名称往往是从狭义的具体用法借用过来的，如集合、测度、点、算法及自动机的抽象概念。

二十世纪的数学较之本世纪之前在本质上有了重大的改变，几乎所有的数学学科已按公理演绎法进行处理，因而可允许的数学推论的规则被精确地规定下来(见**II**. 第2章)。然而，在表现它们的主题时，大多数理论不仅用到纯粹逻辑，而且也用到集合论和初等算术的某些部分，只要这些部分没有明确地禁止使用。尤其是，为了发现知识和实施证明技巧时的思维经济，在实际处理一门特定的数学学科时，经常要越出这一学科的狭义框架，离开它的特殊的语言，以便事实上部分地开展这一学科的元

理论。

元数学中最引人注目的问题之一，是数学陈述的真实性问题。果真每一个被陈述为真的数学命题都描述了客观事物的一个特征吗？还是至少有某些这类的命题，例如实数良序化可能性定理，它们只不过是名词上的构造，仅仅是根据一些有效的应用才能得到承认的？这些问题将在后面更详细地处理。

数学哲学思想的传统趋势

在某种程度上说，数学研究总是要联系到对于和当时知识状况相对应的数学基础的评价。这不仅适用于古希腊时期，也适用于中世纪和早期资本主义社会。由于现时通常主要引证的是数学基础方面19世纪的结果，所以现在将它简要地提一提。

经过一段飞速发展的时期，大约在上一世纪的中叶，发生了对分析基础的批判性的细致审查。除了柯西、韦尔斯特拉斯、高斯和柏扎诺(B. Bolzano, 1781～1848年)之外，戴德金和康托尔的名字必须提到。一个主要的问题是实数概念的确切定义。由戴德金、韦尔斯特拉斯和康托尔给出的数的概念的阐述，是现今数学宝藏的一部分。

1. 逻辑主义。 戴德金和弗雷格(G. Frege, 1848～1925年)彼此独立地用逻辑建立起自然数理论，或者按现今的说法，建立在集合论的基础上。首先，弗雷格建立了自然数理论，并相继将整个数学建立在纯粹思维的法则上，因而建立在逻辑法则上。用康特(Kant)的术语来说，这样意味着证实了数学命题的分析性质。弗雷格建立了数学和逻辑之间的联系。他奠定了通常称为逻辑主义的一种纲领的基础，罗素看到弗雷格的构造是不相容的，并发展出一种改进了的系统，发表在著名的著作《数学原理》上[和怀特海德(A. N Whitehead)合著]。它的主要内容是最后证明了整个数学可以在集合论的(分歧)类型论的基础上发展起来。

逻辑主义的一个变种是数学柏拉图主义，他们的解释是把数学看作理性思维的产物。例如：在康托尔集合论基础的思想中便反映出这一点。在这种解释中，集合是理想的对象，它独立地存在于智力活动之外。数学工作者的任务，是探索在非常一般的客体世界(康托尔宇宙)中占支配地位的法则。

在某种意义上说，逻辑主义已融合到数学的集合论基础中去，这在下面将会更详细地加以描述。

2. 形式主义。形式主义解释的出现，是为了回答在逻辑主义中所展现的认识论上的困难的。这个方向的一个决定性步骤是希尔伯特于1899年出版的《几何基础》。这里，他第一次用几何作为例子，指出怎样理解形式的公理系统和它的元逻辑分析。形式主义数学基础的纲要最终由希尔伯特于1920年建立起来，并由他和他的学派继续工作下去。按照这一纲要，甚至象数论、分析和集合论这样一些数学领域，虽然初看上去各具有特定的内容，但就其本质来说，都可以当作一种形式的理论。对一个数学基础的初学者，首先遇到的问题是如何形式地来证实一个系统的无矛盾性。这就是要证明，一个陈述和它的反面，不可能两者都由公理通过逻辑规则而得出，这一任务应当用一种毫无疑问的可靠方法来完成。希尔伯特称这个方法为有限的方法，它是一种初等的组合方法，例如，数学归纳法证明的原理就是，但其中不包括超限集合论的所谓无限方法。这些努力的结果（到1938年为止）在希尔伯特和伯内斯(P. Bernays)的两卷集《数学基础》中公诸于世。这是继《数学原理》之后，本世纪最有意义的一本数学基础著作。

希尔伯特的最初意图由于哥德尔的结果不得不作修改。这些结果之一说，任何一个形式系统的无矛盾性的证明，必须使用超出这一系统本身所能提供的方法之外的方法才能得出。因此，人们不可能用严格意义下的有限方法证明数论是无矛盾的。

今天，在允许将有限方法扩充到什么类型和范围的问题上，仍然没有明显的一致意见。其中可能性之一便是并入递归函数。这些问题在这里不能再往下讲了，只能说关于有限方法并不限于无矛盾性问题，而是涉及诸如可判定性问题和更一般地来分析基础数学和元数学的具有无限本质结论的有限内核。

3. 直觉主义。由布罗瓦(L. E. J. Brouwer, 1881～1966年)建立的这种观点，和逻辑主义、形式主义的解释截然相反。类似的思想曾由克罗奈克(L. Kronecker, 1823～1891年)和庞卡莱提出过。以下的观点是直觉主义的特征：1. 拒绝*实无限*，2. 要求*实际可构造性*成为定义数学对象的唯一方法，3. 构造的原始材料由*自然数*组成，而这些自然数应当仅仅看作潜在的（不完全的）已知集合。4. 禁止经典逻辑原理用于无限集合。

为了至少解释这些观点之一，定义

$$a_n=\begin{cases}0 & 若2(n+1)是两个质数之和\\ 1 & 其他\end{cases}$$

实数 $g=0.a_1a_2\cdots$ 称为哥德巴赫数，它可计算到要求的任何精度，然而至今却不知道 $g=0$ 是否成立。由于人们尚不能判定哥德巴赫问题(见 II. 第 18 章)是否能解决，因而有某种理由主张：$g=0$ 或者 $g\neq 0$ 是没有意义的。然而，这显然意味着对**排中律**是存在某些限制的。

4. 现今的状况。 上述几个思想派别都没有一个能够达到他们最初的目的。尽管如此，从不同观点处理元数学问题，带来了他们未曾料到的有价值的看法和结果。元数学中提出的可判定性问题在早期阶段就导致可计算性和一种算法概念的确立。由希尔伯特及其学派使之精确化的形式数学语言，形成构造算法语言的基础(例如 Algol 和 Fortran 语言)，而且这类例子还会不断地增多。今天，就学者个人来说，极少有人属于一个固定的方向。他宁愿采取辩证的路线，用各种不同的部分是相互矛盾的立场来研究问题和结论。在一项研究工作中遵循某些不同的构造性的公设，很少能表明研究者的哲学立场，更多的是为了不至于不必要地越出知识可靠的边界这样一个方法论的准则。

数学基础的某些主要成果

1. 数学的集合论基础。 从逻辑主义的最初计划留下来的是这样一个认识：全部数学能建立在公理集合论的基础之上。这就是说，现存的每一种数学理论，无论它是否有公理化的特点或者涉及一些确定的对象，只要根据有关理论的目标加以适当地规范都可以把它看作公理集合论的一部分。

对集合论的公理基础作出重大贡献的是罗素、策墨罗、冯·诺意曼、弗兰克、伯内斯和哥德尔。布尔巴基 (Bourbaki) 学派从集合论观点出发，以巧妙的构思对数学进行了整理，因而为公理集合论普及到各数学领域作为它们的基础作了重要的贡献。

公理集合论的语言，比如策墨罗-弗兰克系统是一种很简单的谓词语言，具有单一的谓词符号“$\in$”。与集合论内容中很少的几条原则相应的公理已在集合论一章中列出。推论的规则是自然推理的形式规则——在数理逻辑初步一章已给出——或者是可由这些规则推出的规则。概念的定义只用显式定义进行；其他形式的定义，隐式的或递归的，能在公理集合论的框架内归结为显式定义。

数学家原则上不准越出形式集合论的框架，但这实质上仅对数学研究是如此，而数学应用在物理学或非数学学科的过程中则不受此限制。对这类过程的适当的数学模型的问题，严格地说，不是一个数学问题。

应当看到，许多数学理论有着复杂的可形式化的潜在机制，但是，如何将它们归结为集合论，将它们的语言适当地"编"成简单的集合论语言，往往是不清楚的。这一点甚至在介绍集合论本身时也是如此。例如，看看集合论那一章中构成集合的例子，其中的大多数必须严格地在公理集合论的范围内作成。你要构造所有实数集的所有子集所成之集，就必须对实数概念在公理集合论范围内加以定义，接着要求对自然数集的概念采取同样的定义，而这又归结为最原始的关于在一般集合论中有限概念的公理化分析。

此外，形式语言的语义学中的所有概念，可以集合论地加以定义，特别地，对语言学的对象本身也是这样。它们可以解释为某些"符号"的有限序列。正如集合论化拓扑中，用某种方法构造的集合元素可以称为点，任意一个集合(通常是可数的)的元素也可以认为是一个符号。

2. 以数学基础中结论为根据，对集合论基础的批评。我们产生了这样的问题：整个数学基于集合论之上的可能性，是否能对数学的一个元数学基础问题带来足够的启示？尽管通过将整个数学归结为集合论，元数学问题似乎在很大程度上能归结为有简单语言和易懂公理集合论的相应问题，然而这事实上是谬误的。在各种各样的理由中，我们现在就其中一部分简短地讨论一下。

(i) 一个立即会提出的反对意见是*集合论形式系统的无矛盾性*问题，就实际的经验而言，集合论公理系由于抽象程度太高而难以直接地证实。一类感性的经验充其量只能把握住这些公理的某些推论。比方说，具有某些边界条件的微分方程的解的存在性命题就是如此。

因此，毫不惊奇的是，集合论在开始发展的初期就不得不消除它的概念体系中相当数量的严重的悖论。尽管这些悖论已经移开，仍然使得多数数学家对于自由使用无限方法持怀疑态度。

(ii) 进一步的反对意见涉及*集合论公理系统的不完备性*(在下一节讨论)，其意思是：任何一个广泛的(递归的)公理系统，总存在若干命题，独立于这个公理系统。因此，想通过选好的固定的公理系统完全把握(甚至近似地)直觉的集合总体是毫无希望的。

(iii) 尽管有上述事实，我们仍然可以假定：相应于一个被接受的集合公理系统 A，存在某一个对象域 U（直觉的集合总体），而且任意一个集论命题或是对的（在 U 中恒真）或是错的。然后可以在一个适当的元语言 L^* 中讨论构造 $\langle A, U\rangle$，在 L^* 中，斯柯来姆（T. Skolem，1887～1963年）建立起一个著名的结果，即斯柯来姆悖论，它断言，不仅公理系 A，甚至对于由 U 中所有恒真的命题所组成的一个语法上完备的体系，也存在互不同构的模型。这样，标准模型（即公理集论中以某种方式作为鉴别准绳的一个模型）的思想，就变得十分可疑了。

这些反对意见清楚地表明，将数学建立在一个逻辑——经验基础之上的目标，特别是康托尔的柏拉图主义的经典形式，那是远远不能实现的。人们有理由问：数学建立在万能的集合论基础之上的要求是不是现实？或者要问：一个更具构造性特征的原理是否足以表达上述目的？就数学方法在数学以外领域中的应用而言，经过更细致的考察，实质上只有构造性方法是切实可行的。在现今情况下，又必须肯定地说，集合论的无限方法也不能放弃。打个比方说，无限集合论这尊炮的射程是迄今为止所不能超越的。数学应用中的构造性方法的收获也同样不能代替它。进一步可以说，尽管更详细的分析表明了康托尔宇宙只是一个意思，但是数学家，特别是研究基础论的数学家，在原则上只有通过关于抽象的数学实体的某种直觉观念，才能获得他的结论。

3. 公理理论的不完备性和真实性概念的不可定义性。 评价一个旨在对某个特定的对象域（例如物理空间或某个物理的或经济的过程）提供模型的数学理论，唯一有意义的依据是看它的成功如何。因为这仅仅表示把一种实际过程人为地理想化而已，其中命题的真实性问题是次要的。然而，对整个数学来说，由于它是一个封闭的科学，提出真实性问题便是恰当的了。这对某些数学分支也是对的。例如自然数理论或集合论，它们最初并不是公理化理论，而只是对某个可能是抽象的对象域的一种描述。

确实，很多数学命题尽管它们有抽象的特征，却和现实有明显的联系。例如考虑下列定理，其正确性是显然的：“*如果有限集 S 能分划成 n 个不相交的类 $C_1, \cdots, C_n$，其中每一类都有 m 个元素，那么 S 也一定能分成 m 个不相交的类，其中每一个具有 n 个元素*”。

当涉及一个现今已被广泛接受的命题：“*实数集存在一个良序关系*”时，一般地，涉及对存在性的命题（其中并不提及构造问题中所讨论对象

理的相对无矛盾性。二十五年后，科亨（P. Cohen）证明了连续统假说之否命题亦相容于其他(集合论)公理。

虽然这些结论与几何学有形式上的相似处，但实际情况全然不同。因为可以从统一的观点即一般集合论出发，建立起各种不同类型的几何学来，然而却还未有一个统一的原理，据此可建立起各种不同的甚至是互相排斥的集论体系。就目前情形来看，这种具有数学本质的原理似乎根本就不存在。这是因为，比集合论更抽象的数学理论，是绝对不可想象的。

哥德尔自己曾发表过这样一个看法：集合论的进一步发展将会导致出新的公理，从这一新公理出发可得出否定连续统假设的证明。至今所讨论的一些用来扩展集合论传统疆界的公理，例如关于存在不可达基数的塔斯基公理，还不足以达成哥德尔的设想。

塔斯基公理是那种用来保证不能由构集原理或选择公理来作出集的存在性公理中的一个例子。接受这类公理可被描绘成是对数学的一次无限制的延拓。然而必须记住，这种具有无限制特征的新公理的出现，并非是一种令人信服的要求，而且会导致新的严重的相容性问题。存在某种有限制的途径，可达到上述扩张的可能性，其中有全然是构造性的命题。哥德尔的可构造性公理的接受，会对集的那种随意形成赋以一种半构造性的约束。由哥德尔公理可推出连续统假设之真实性。

作为结束语可以说，数学基础的研究成果，对于阐明基础论中一些经典问题的范围与界限，作出了基本的贡献。另外还提供了一些有实际意义的应用例子，如算法理论及形式系统理论。